高等学校教材

概率论与数理统计

附随机过程

何镇邦　李桂荣　著

兵器工业出版社

前　言

本书是根据高等学校工科数学教学指导委员会关于“概率论与数理统计”教学基本要求编写的，基本内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、数字特征、极限定理、随机抽样与参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等八章。考虑到部分专业的需要附有马尔可夫过程与平稳随机过程等两章，并附有部分计算程序与附表，可供30至80学时的教学使用，亦可供有关科技人员阅读。

本书在写作过程中，我们力求做到：

1. 基本概念的引出，要讲明它的实际背景及其几何意义与物理意义。

2. 采用框图教学法及附有框图证法，并把近年来参加科学研究的有关结果写入书中，这些方法在讲学过程中受到了大家的欢迎，为了进一步推广这种方法，特编著成书。

本书第一、二、四、八、九、十章及附录Ⅰ、Ⅱ，附表及全部习题的编配与答案计算，由李桂荣同志主笔；第三、五、六、七章由何镇邦同志主笔，最后全书由何镇邦同志定稿。

胡钦训教授评审了本书的框图证法、中国科学院应用数学研究所所长吴方研究员对本书进行了精心的审阅，赵美英教授对本书定稿提供了宝贵的意见。宋文爱讲师为本书编配了部分计算程序。兵器工业总公司教材编审室的同志对本书出版给于大力的支持。我们对本书写作过程中提供了宝贵意

见和给于大力支持的所有同志，表示衷心的感谢。

请读者注意：本书是用框图教学法编写，每章开始都有一个内容总框图，它有两个作用，一是供读者在课前知道本章的系统（或供教师参考），可作预习之用；二是在每章讲授结束之后，读者可按该章总框图的系统深入进行复习后，根据自己的体会补充该章的总框图，以进一步了解它们之间的逻辑关系。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望读者批评指正。

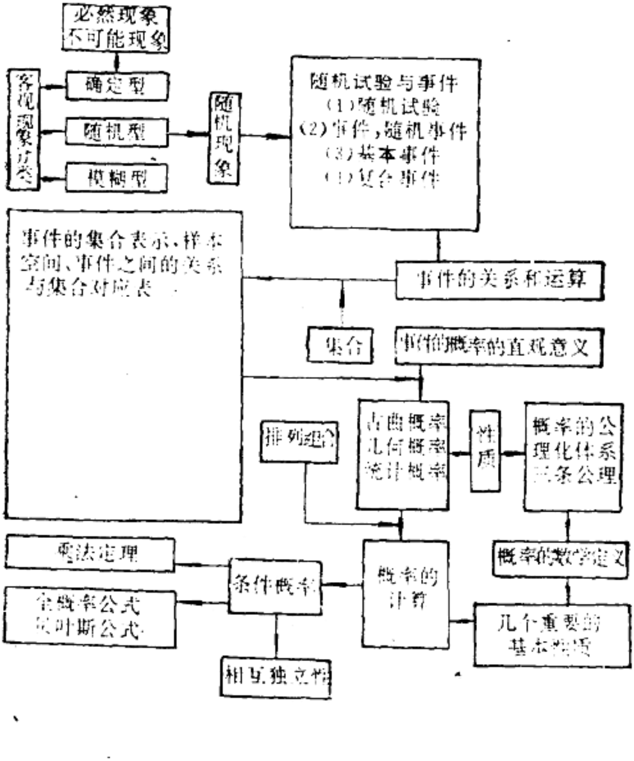
作　者

1992.12

目 录

第一章　随机事件与概率

第一章　内容总框图



概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。由于随机现象在客观世界中广泛存在，所以概率论在数学科学、自然科学及社会科学中得到广泛的应用。

§1.1 随机事件及其运算

一、客观现象的分类及其直观意义

在自然科学和社会科学的研究中，随着人们认识的不断深入，将观察到的大量客观现象，一般分为三种类型。

1． 确定型 在客观现象中，有一类现象是具有确定性的。所谓确定性现象，是指在一定条件下，就能完全确定其结果的现象。确定型又分为两种：

必然现象：在一定条件下，必然要发生的现象。

不可能现象：在一定条件下，必然不发生的现象。

例如纯水在标准大气压力下升温到100℃时，必然要沸腾，冷却到0℃时就会结冰；电荷同性相斥，异性相吸等都是必然现象。而纯水在标准大气压力下升温到100℃不沸腾，冷却到0℃不结冰；电荷同性相吸，异性相斥，这都是不可能现象。

因此在确定型中，必然现象和不可能现象是对某一过程，用两种对立的方式进行描述的。早期的科学仅限于研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具如几何、代数、数学分析和微分方程等，就是“确定性模型”的数学。但随着生产的发展人们逐渐发现，有大量现象是有别于确定型的。

2． 随机型 随机现象：在一定条件下，可能发生也可能不发生的现象，但事前却不能肯定。或说在个别观察中其

结果呈现出不确定性。

例1.1.1　在平地上抛掷一枚对称均匀的硬币，可能出现正面，也可能出现反面，事前不能唯一确定。

例1.1.2　某电话交换台，在某单位时间内接到的呼唤次数可能是0，1，2，…次。

例1.1.3　对目标进行射击，直到命中为止，则可能要射击1次，2次，3次，…。

例1.1.4　将一颗骰子投掷一次可能出现1，2，…，6点共六种可能结果，事前不能肯定会出现哪种结果。

例1.1.5　有一合格的圆轴，规定其直径公差在$[-0.05, 0.05]$(单位：dmm)内，今测量其直径，则在$[-0.05, 0.05]$内的数均有可能发生。

这类都是在偶然因素的影响下发生的现象叫偶然现象——随机现象。此外，在客观世界中还有一类被人们忽视的现象——模糊现象。

3．模糊型　模糊现象：在一定条件下即将发生的现象，介于肯定发生与必不发生之间，没有明确的界限。例如撞击一个火帽，可能起爆也可能不起爆，还可能出现“半爆”。所谓“半爆”是没有明确界限的，因此“半爆”是一种模糊现象。

研究这类问题的数学，即称为模糊数学，其创始人是美国自动控制专家理查德教授。

随机现象是在偶然因素影响下产生的，起初人们认为是不可预测和没有规律性的，事实上并非如此，人们通过长期反复观察和实践，逐渐发现那些随机现象的发生，所谓事前是不可预测，只是对一次或少数几次观察或实践而言。当进行大量观察时，随机现象将呈现某种规律性。为此，历史上

一些数学家对投掷一个对称均匀的硬币进行大量试验，观察其结果如表1.1.1。

表1.1.1

实验者	投掷次数n	正面朝上的次数r(频数)	频率$=r/n$
迪摩根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

从表中可看出，当投掷次数不断增加时，出现正面和反面的比例接近于1:1，呈现出规律性。由此可知，表面上是偶然因素起作用的地方，实际上这种偶然性始终受内在隐蔽着的规律性所支配。在相同条件下进行大量重复观察时，所得结果呈现出的某种规律性，称为随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计就是运用数学工具，研究随机现象统计规律性的一门数学学科。它是属于非确定型的数学。概率论作为一门数学学科，有其基本概念和术语，我们将按本章总框图的系统进行研究。

二、随机事件与样本空间

随机试验：在相同条件下进行重复试验，而试验的可能结果事前不能唯一确定。简称试验，记为E。

1. 随机事件　随机试验的每个可能结果，简称事件，记为A、B、C、…。如例1.1.1中出现正面与反面都是随机事件。例1.1.4中出现1，2，…，6点也都是随机事件，同样出现偶数点或奇数点，或大于3的点等都是随机事件。

基本事件：试验E的最简单的事件，记为ω。直观地说，是不能再分的事件。如例1.1.2中接到的呼唤次数1，2，…，n次都是基本事件。又如例1.1.4中出现点数为1，2，…，6点也都是基本事件。

复合事件：由若干基本事件组成的事件。如例1.1.4中的奇数点或偶数点都是复合事件，它分别由1，3，5点及2，4，6点，各由三个基本事件组成。

注意：一个事件是否是基本事件是相对于试验的目的来说的。例如：试验是测量某批电子管的电流放大系数$\mu=\{x\,|\,0\leqslant x<+\infty\}$，在$(0, +\infty)$内任一实数都是基本事件，这时基本事件就有无限多个。如果测试是为了分等级，那么基本事件就只有有限的几个了。

必然事件：在一定条件下必然发生的事件，记为Ω。

不可能事件：在一定条件下必不发生的事件，记为Φ。

必然事件与不可能事件本来没有不确定性，但是为了对事件作封闭性研究，把它们作为随机事件的特殊情形来考虑。

2. 样本空间　由试验E的所有基本事件组成的集合，称为样本空间，记为Ω。样本空间的容量（即Ω中基本事件的总数），记为V_Ω。

由于任一试验E，其样本空间必定出现其全部基本事件中的一个。因此，如果把样本空间作为事件，它是一个必然事件，样本空间的元素称为样本点，记为ω。

在概率论中，样本空间和样本点都是没有精确定义的，这同集合没有精确定义一样，但当有了样本空间的概念以后，却给研究试验E带来很多优越之处。

例1.1.6　一个随机试验E，其对应的样本空间为

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$，则下属的随机试验均属于这个数学模型：

(1) 在一批含有不合格产品的产品中抽取一个，可为“合格品”或“不合格品”；

(2) 对靶射击一次，可能“命中”或“不命中”；

(3) 投掷一枚对称均匀的硬币，可能出现“正面”或“反面”；

(4) 继电器在正确指令下的工作中，“接通”或“非接通”等等。

为了熟悉样本空间和样本点的概念，下面分别写出例1.1.2～例1.1.5的样本空间Ω。

E_2:　$\Omega=\{\omega_\kappa \mid \kappa=0, 1, 2, \cdots\}$

其样本点有可列无限多个，且具有数量性质。

E_3:　$\Omega=\{+, -+, --+, \cdots, -\cdots-+, \cdots\}$

其中“+”表示命中，“-”表示不命中。其样本点有无限多个，且不具有数量性质

E_4:　$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

其样本点只有有限多个，其容量$V_\Omega=6$，且具有数量性质。

E_5:　$\Omega=\{\xi \mid -0.05\leqslant\xi\leqslant0.05\}$

ξ表示直径误差，其样本点对应着区间$[-0.05, 0.05]$上的全体实数。

三、事件的关系和运算

在相同条件下进行试验，会出现各种可能结果，这些结果虽然彼此不同，但它们仍具有一定的关系。例如验收一批圆轴，其合格的标准是：“长度合格”与“直径合格”才算合格。而“产品不合格”的事件将是“长度不合格”或“直径不合格”。为此，我们引进事件之间的关系与运算，以便