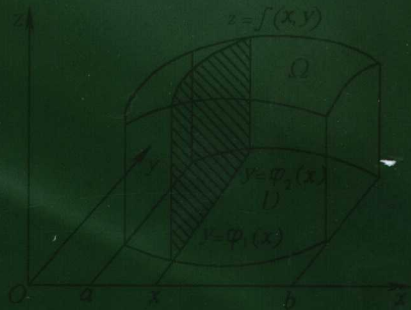
大学数学系列丛书

微积分（下）

Calculus

龚漫奇　缪克英　吴灵敏　编著

赵达夫　主审



北京交通大学出版社
BJTUP
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

微 积 分

（下）

龚漫奇 缪克英 吴灵敏 编著

赵达夫 主审

北京交通大学出版社

·北京·

内容简介

《微积分》是大学理工科各专业的公共基础课教材，分为上、下两册。本书为下册，主要内容有：多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程。书中各章配有适量的例题和习题，书后给出习题答案与提示。为了帮助学生学习，本书还配有相应的辅导书。

本书与过去的微积分教材的不同之处是：在保证理论体系简洁、科学完整的前提下，加入了牛顿和莱布尼茨创立微积分时所使用的朴素的哲学思想。目的是介绍微积分的历史背景，加强教材的直观性和启发性，使理解不了严格数学语言的学生，掌握一种直观理解微积分的方法。

本书可作为高等院校理工科各专业的教材，也可供各类成人教育和自学考试人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

微积分. 下 / 龚漫奇，缪克英，吴灵敏编著. —北京：北京交通大学出版社，2004.2
（大学数学系列丛书）
ISBN 7-81082-240-3

Ⅰ. 微…　Ⅱ. ①龚…　②缪…　③吴…　Ⅲ. 微积分-高等学校-教材　Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 117854 号

责任编辑：郭　洁
印 刷 者：北京东光印刷厂
出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686045，62237564
北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编：100044
经　　销：各地新华书店
开　　本：787×960　1/16　印张：21.75　　字数：487 千字
版　　次：2004 年 2 月第 1 版　　2004 年 2 月第 1 次印刷
印　　数：1～5 000 册　　定价：29.00 元

"大学数学系列丛书"
编写委员会成员名单

总序

随着人类进入21世纪,科学技术的发展日益迅猛。在当今这个信息时代中,各种竞争的关键就是科学技术的竞争,科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上,而人才的竞争其实就是教育的竞争。当前的知识经济时代,将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活,引发新的、深刻的变化。在知识经济时代,国家的竞争能力和综合国力的强弱,不仅取决于其拥有的自然资源,更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平,尤其是知识创新与技术创新的能力。知识经济的第一资源是智力资源,拥有智力资源的是人才,人才来自教育。要提高民族的创新能力,归根到底要提高全体民众的教育水平,培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才。

在我国的高等教育中,数学教育可以说起着举足轻重的作用。许多专家指出,数学教育在人类的精神营养中,确实有"精神钙质"的作用,因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用。很难想像,一个数学知识贫乏的人,会在科学上有所建树。因此,全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平,将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力,关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力,是国家百年树人基业中的重要一环。

正是基于以上的考虑,我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革,特别是数学教学改革的经验,借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法,组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师,在精心筹划、多方面研讨的基础上,编写了这一套"大学数学系列丛书"。

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的功夫。我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章内容,而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验;同时注意编写了与主教材配套的辅导教材,这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法。在辅导教材的编写上,我们注重对主教材内容知识的扩展,同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法。但是,我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法。我们认为,这种做法是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀。另外,为了适应目前大学数学教学改

革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材。我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础。同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革。另外，为了配合我校的“高等数学方法”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法。

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持。在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助。在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢。

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材。

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善。

“大学数学系列丛书”编写委员会

2003 年 9 月

前言

微积分是大学理工类专业最重要也是最基础的数学课程。

为了说明本教材的编写思想，先回顾一下微积分的发展历史。17世纪中叶，在前人研究成果的启发下，Newton（牛顿）、Leibniz（莱布尼茨）利用朴素的哲学思想，如以直代曲、无穷小等，创立了微积分。但是由于这种思想（以下称其为“微积分思想”）不是严格的数学理论，因而在理论上受到严厉的攻击。直到19世纪末，才由Cauchy（柯西）、Weierstrass（魏尔斯特拉斯）等人建立了微积分的完整的理论体系（以下称其为“微积分理论”）。

对于“微积分思想”和“微积分理论”，前者直观、易懂，但经不起推敲和深究；后者科学、完整，但流于繁复、艰涩而不易学懂。

过去，受前苏联（俄罗斯）的影响，我国大学的数学教育过于注重理论形式的完美，忽视了理论的实际背景和实际应用。因此，微积分的教学都是偏重于“微积分理论”，而忽略了“微积分思想”。但是我们认为，这样做是不太妥当的。首先从对微积分的贡献上讲，“微积分思想”是高于“微积分理论”的；其次，因为“理论”是根据“思想”创造出来的，所以只有理解了“思想”，才能够更容易且更深刻地理解“理论”。

因此，我们在编写本教材时，力图在介绍“微积分理论”的同时，引入“微积分思想”。例如，在介绍极限的严格定义时，也从直观的角度介绍极限的概念；在介绍了微分的理论之后，又介绍了由 dx, dy, ds 组成的“微观三角形”，说明微观中曲线变成了直线，微分是微观中函数值的差；在定积分应用中，利用“微积分思想”介绍了“微元法”，并在微分方程中介绍了用“微元法”列微分方程、解应用题的方法；在多元微分学中，介绍了“多元函数可微分就是多元函数可以在微观中看成线性函数”的思想，以此去理解隐函数求导定理和切平面方程等问题。

我们这样做有三个目的：一是为了介绍Newton、Leibniz的“微积分思想”，使学生能够从更多的侧面理解微积分。二是为了改变数学教育的方法，让教学更富有启发性、趣味性、更贴近实际，也是为了让微积分更加鲜活、更加引人入胜。三是为了加强教育的个性化。现在大学都在扩招，学生的入学水平与以前相比，更加参差不齐。采用新方法教学，可以让一些学不会“微积分理论”的学生，也能从直观的“思想”中了解微积分，并能够在实际中加以应用。

也许我们的目标过于理想化，也许我们所做的与我们所想的相差

甚远,但是我们确实是在向这个方向努力,并希望能够有所突破。我们尤其希望水平更高的同行能够在这方面做一些工作,使本书起到抛砖引玉的作用。

另外,为了配合课程结构的改革,有关向量代数和空间解析几何的内容放到了线性代数的课程中。

虽然本教材加强了“微积分思想”的内容,但对于“微积分理论”的内容,不但没有减轻,反而有所加深。其中对于较难理解的部分标以“*”号,供对数学要求较高的专业选用。而且我们在写这部分内容时,尽量地选取一些富有启发性的例子以增加学生的学习兴趣和学习动力。

近来,微积分在经济上的应用越来越广泛。为了满足需要学习这部分内容的学生的需要,也是为了加强本书的应用性,我们选编了这部分内容,并标以“***”以示说明。

本书由龚漫奇主编,负责全书的统一协调、编纂和定稿。全书由龚漫奇、缪克英、吴灵敏共同编写,其中第7章由龚漫奇执笔,第8、9章由吴灵敏执笔,第10、11章由缪克英执笔。

由于本书的编写时间较为仓促,加上作者水平有限,内容上的不足及错误在所难免,还望得到专家、同仁与广大读者的批评指正。

作　者

2004年1月

目录

第7章 多元函数微分学

7.1 多元函数的极限与连续 …… 1
7.1.1 平面 R^2 与 n 维空间 R^n 的几种点集 …… 1
7.1.2 多元函数的概念 …… 3
7.1.3 多元函数的极限 …… 5
7.1.4 多元函数的连续性 …… 6
习题 7-1 …… 7
7.2 偏导数 …… 8
7.2.1 偏导数 …… 8
7.2.2 高阶偏导数 …… 11
习题 7-2 …… 13
7.3 全微分 …… 13
7.3.1 全微分的理论 …… 13
*7.3.2 全微分的应用 …… 16
习题 7-3 …… 18
7.4 多元复合函数的求导法则 …… 19
7.4.1 复合求导法则 …… 19
7.4.2 高阶复合求导法则 …… 21
7.4.3 一阶全微分的形式不变性 …… 23
*7.4.4 多元函数的高阶全微分 …… 24
习题 7-4 …… 25
*7.5 向量值函数的导数 …… 25
7.5.1 向量值函数及其导数 …… 25
7.5.2 向量值函数的其他运算 …… 27
*习题 7-5 …… 29
7.6 隐函数的求导法则 …… 29
7.6.1 一个方程的情形 …… 29
7.6.2 方程组的情形 …… 32
习题 7-6 …… 37
7.7 多元函数微分学的几何应用 …… 38
7.7.1 空间曲线的切线与法平面 …… 38
7.7.2 曲面的切平面与法线 …… 39
*7.7.3 曲面的参数曲线网和三维作图技术 …… 42

习题 7-7 …… 43
7.8 **方向导数与梯度** …… 43
7.8.1 方向导数的概念 …… 43
7.8.2 梯度的定义和方向导数的计算 …… 45
7.8.3 梯度的性质 …… 46
7.8.4 数量场与向量场的概念 …… 48
习题 7-8 …… 50
7.9 **多元函数的极值与最值** …… 50
7.9.1 多元函数的极值 …… 50
7.9.2 多元函数的条件极值 …… 52
7.9.3 Lagrange 乘数法 …… 53
7.9.4 多元函数的最值及其应用 …… 55
习题 7-9 …… 58
*7.10 **多元函数的 Taylor 公式** …… 59
7.10.1 Taylor 公式 …… 59
7.10.2 Taylor 公式的简写形式 …… 61
7.10.3 极值充分条件的证明 …… 62
习题 7-10 …… 64
*7.11 **最小二乘法** …… 64
*习题 7-11 …… 66
复习题 7 …… 66

第 8 章 重积分

8.1 **二重积分的概念及性质** …… 68
8.1.1 二重积分的概念 …… 68
8.1.2 二重积分的性质 …… 71
习题 8-1 …… 73
8.2 **二重积分的计算法** …… 74
8.2.1 利用直角坐标计算二重积分 …… 74
习题 8-2(1) …… 81
8.2.2 利用极坐标计算二重积分 …… 82
习题 8-2(2) …… 87
*8.2.3 二重积分的换元法 …… 87
习题 8-2(3) …… 92
8.3 **三重积分** …… 92
8.3.1 三重积分的概念 …… 92

8.3.2 三重积分的计算 …… 94
习题 8-3 …… 105
8.4 **重积分的应用** …… 107
8.4.1 曲面的面积 …… 107
8.4.2 重心 …… 111
8.4.3 转动惯量 …… 113
8.4.4 引力 …… 115
习题 8-4 …… 116
*8.5 **含参变量的积分** …… 117
习题 8-5 …… 123
复习题 8 …… 123

第 9 章 曲线积分与曲面积分

9.1 **数量值函数的曲线积分(第一类曲线积分)** …… 126
9.1.1 第一类曲线积分的概念 …… 126
9.1.2 第一类曲线积分的计算 …… 128
习题 9-1 …… 133
9.2 **数量值函数的曲面积分(第一类曲面积分)** …… 134
9.2.1 第一类曲面积分的概念 …… 134
9.2.2 第一类曲面积分的计算法 …… 135
习题 9-2 …… 139
9.3 **向量值函数在定向曲线上的积分(第二类曲线积分)** …… 140
9.3.1 第二类曲线积分的概念 …… 140
9.3.2 第二类曲线积分的计算 …… 144
习题 9-3 …… 147
9.4 **Green 公式及其应用** …… 148
9.4.1 Green 公式 …… 148
9.4.2 平面曲线积分与路径无关的条件 …… 154
习题 9-4 …… 162
9.5 **向量值函数在定向曲面上的积分(第二类曲面积分)** …… 163
9.5.1 第二类曲面积分的概念 …… 163
9.5.2 第二类曲面积分的计算 …… 167
习题 9-5 …… 172
9.6 **Gauss 公式与散度** …… 172
9.6.1 Gauss 公式 …… 172
*9.6.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件 …… 175

9.6.3 散度 …… 175
习题 9-6 …… 177
9.7 Stokes 公式及旋度 …… 178
9.7.1 Stokes 公式 …… 178
*9.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件 …… 182
9.7.3 旋度 …… 183
习题 9-7 …… 185
复习题 9 …… 186

第 10 章 无穷级数

10.1 常数项级数的概念和性质 …… 189
10.1.1 无穷级数的概念 …… 189
10.1.2 级数的基本性质 …… 191
习题 10-1 …… 194
10.2 常数项级数敛散性的判别 …… 195
10.2.1 正项级数敛散性的判别 …… 195
10.2.2 交错级数敛散性的判别 …… 201
10.2.3 任意项级数敛散性的判别 …… 202
*10.2.4 绝对收敛级数的性质 …… 204
习题 10-2 …… 207
10.3 函数项级数 …… 208
10.3.1 函数项级数的基本概念 …… 208
*10.3.2 函数项级数的一致收敛 …… 209
*10.3.3 一致收敛级数的性质 …… 212
习题 10-3 …… 215
10.4 幂级数 …… 216
10.4.1 幂级数及其收敛半径 …… 216
10.4.2 幂级数的运算性质 …… 219
习题 10-4 …… 223
10.5 函数展成幂级数 …… 224
10.5.1 Taylor 级数 …… 224
10.5.2 函数展成幂级数的方法 …… 226
习题 10-5 …… 230
10.6 幂级数的应用 …… 231
10.6.1 近似计算函数值 …… 231
10.6.2 近似计算定积分 …… 232

10.6.3 Euler 公式 …… 233
**10.6.4 其他应用 …… 234
习题 10-6 …… 235
10.7 Fourier 级数 …… 235
10.7.1 三角函数系的正交性 …… 236
10.7.2 Fourier 系数 …… 236
10.7.3 Fourier 级数的收敛定理 …… 237
10.7.4 定义在有限区间上的函数展成 Fourier 级数 …… 240
10.7.5 以 $2l$ 为周期的函数的 Fourier 级数 …… 243
*10.7.6 Fourier 级数的复数形式 …… 245
习题 10-7 …… 248
复习题 10 …… 249

第 11 章 微分方程

11.1 **一阶微分方程** …… 254
11.1.1 可化为可分离变量的微分方程 …… 254
11.1.2 一阶线性微分方程 …… 256
11.1.3 全微分方程 …… 259
11.1.4 应用举例 …… 260
*11.1.5 一阶微分方程的近似解及其解的几何解释 …… 262
习题 11-1 …… 263
11.2 **可降阶的高阶微分方程** …… 265
11.2.1 $y^{(n)}=f(x)$型的微分方程 …… 265
11.2.2 $y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 265
11.2.3 $y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 266
11.2.4 应用举例 …… 267
习题 11-2 …… 268
11.3 **高阶线性微分方程** …… 268
11.3.1 线性微分方程解的结构 …… 269
*11.3.2 常数变易法 …… 272
习题 11-3 …… 274
11.4 **常系数线性微分方程** …… 275
11.4.1 常系数齐次线性微分方程 …… 275
11.4.2 常系数非齐次线性微分方程 …… 278
11.4.3 应用举例 …… 283
*11.4.4 Euler 方程 …… 287
习题 11-4 …… 289

11.5 **微分方程的幂级数解法与常系数线性微分方程组** …… 290
11.5.1 微分方程的幂级数解法 …… 290
*11.5.2 常系数线性微分方程组 …… 292
习题 11-5 …… 295
11.6 **微分方程在经济中的应用 …… 295
**习题 11-6 …… 297
11.7 **差分方程 …… 298
11.7.1 差分概念 …… 298
11.7.2 差分方程的概念 …… 299
11.7.3 线性差分方程解的结构 …… 300
11.7.4 常系数齐次线性差分方程 …… 301
11.7.5 常系数非齐次线性差分方程 …… 304
11.7.6 应用举例 …… 308
**习题 11-7 …… 310
复习题 11 …… 311

习题答案与提示

第 7 章 …… 314
第 8 章 …… 319
第 9 章 …… 323
第 10 章 …… 325
第 11 章 …… 329

第7章 多元函数微分学

《微积分》上册研究的变量都是依赖于一个变量而变动的，然而在实际问题中，却有很多变量是依赖于多个变量而变动的. 前者称为一元函数的问题，后者称为多元函数的问题. 本章将讨论多元函数的微分问题.

在学习多元微积分时，以下三点值得注意．一是温故而知新．一元微积分与多元微积分的许多概念、思想、方法都是相通的，利用借鉴来帮助理解，一定会有很大的收益．二是注意区别．在某些方面，如 $\mathbf{R}^n$ 中的 $P\to P_0$ 方式的多样性、多元极值的充分条件、多元换元（或变换），这些多元问题与相应的一元问题都有本质的区别. 三是一元化思想. 在研究多元问题时，经常以某种方式把多元问题化为一元问题，最典型的两种方式为：①只让一个变量变化，把其他变量看做常数，如偏导数；②让 $\mathbf{R}^n$ 中的点沿着某条曲线变化，如方向导数.

7.1 多元函数的极限与连续

7.1.1 平面 $\mathbf{R}^2$ 与 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的几种点集

1. 平面 $\mathbf{R}^2$ 的几种点集

在平面解析几何中，平面用 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 表示，平面中两个点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离用

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

表示．有了距离的概念，对比 $\mathbf{R}$ 中的邻域可以定义 $\mathbf{R}^2$ 中的邻域.

定义 7-1 设 $P_0\in\mathbf{R}^2$，$r>0$，则

$$U(P_0,r)=\{P\mid P\in\mathbf{R}^2 \text{ 且 } |PP_0|<r\}$$

称为点 P_0 的 r 邻域，而 $\mathring{U}(P_0,r)=U(P_0,r)\setminus\{P_0\}$ 称为点 P_0 的去心 r 邻域.

当不需要强调邻域的半径 r 时，$U(P_0,r)$，$\mathring{U}(P_0,r)$ 可简写为 $U(P_0)$，$\mathring{U}(P_0)$.

利用邻域可以定义点与点集的关系.

定义 7-2 设 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的任意一点，E 是 $\mathbf{R}^2$ 的任意一个子集.

(1) 如果存在 P 的一个邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.

(2) 如果存在 P 的一个邻域 $U(P)$，使 $U(P)$ 的每一个点都不在 E 中，即 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点.

(3) 如果在点 P 的任一邻域中,总是既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 P 为 E 的边界点.

E 的全部边界点组成的集合,称为 E 的边界,记为∂E.

(4) 如果点 P 的任一去心邻域 $\mathring{U}(P)$内总含有属于 E 的点,则称 P 为 E 的聚点.

如图 7-1 所示,E 是平面的一个点集,P_1 是 E 的内点,P_2 是 E 的外点,P_3 是 E 的边界点.

又设 $E_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$E_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,则$\partial E_1=\partial E_2=E_3=\partial E_3$. E_1(或 E_2)的全部聚点组成 E_2.

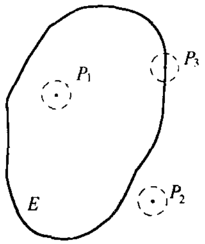


图 7-1

下面介绍多元微分中常用的几种点集.

定义 7-3　设下列所论的集合都在 $\mathbf{R}^2$ 中,即全集 $I=\mathbf{R}^2$,$E^c=I\backslash E$.

(1) 如果点集 E 的点都是 E 的内点,则称 E 为开集.

(2) 如果点集 E 的余集 E^c 是开集,则称 E 为闭集.

(3) 如果点集 E 内任何两点都可用折线连结起来,且该折线上的点都属于 E,则称 E 为连通集.

(4) 连通的开集称为开区域,开区域与其边界的并集称为闭区域.

(5) 设 $O(0,0)$,E 是一个点集,如果存在 $r>0$,使 $E\subset U(O,r)$,则称 E 为有界集,否则称 E 为无界集.

本定义前谈到的点集 E_1 是开集,E_2,E_3 是闭集. E_1,E_2 是连通集,E_3 不是连通集. E_1 是开区域,E_2 是闭区域,E_3 不是区域,E_1,E_2,E_3 都是有界集. 再看 $E_4=\{(x,y)\mid x\geqslant 0\}$,它是一个无界的闭区域.

2. n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的几种点集

定义 7-4　集合 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}\}$称为$n$ 维空间,$\mathbf{R}^n$ 中的元素也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

由于 $\mathbf{R}^n$ 中的点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与从原点 $O(0,0,\cdots,0)$到 P 点的向量$\overrightarrow{OP}$一一对应,所以 $\mathbf{R}^n$ 中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也称为n 维向量,x_i 称为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的第 i 个分量$(i=1,2,\cdots,n)$. 为便于书写,常用一个字母表示 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 n 维向量,如$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可记为 $\boldsymbol{x}$. 下面定义 $\mathbf{R}^n$ 中的运算. 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,$k\in\mathbf{R}$.

(1) 相等:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_1=y_1,x_2=y_2,\cdots,x_n=y_n$.

(2) 加法:$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$.

(3) 数乘:$k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$.

(4) 点 $\boldsymbol{x}$ 到点 $\boldsymbol{y}$ 的距离:$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

当 $\boldsymbol{y}=(0,0,\cdots,0)$(称为零向量,记为 $\mathbf{0}$)时,$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\|\boldsymbol{x}-\mathbf{0}\|=\|\boldsymbol{x}\|$,且

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

可以证明 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{0}$ 的距离 $\|\boldsymbol{x}\|$ 满足 $\|k\boldsymbol{x}\|=|k|\,\|\boldsymbol{x}\|$，$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

有了 $\mathbf{R}^n$ 中距离的定义，只要将定义7-1～7-3中的 $\mathbf{R}^2$ 换为 $\mathbf{R}^n$，就可得到 $\mathbf{R}^n$ 中的下述概念：邻域、内点、外点、边界点、边界、聚点、开集、闭集、连通集、开区域、闭区域、有界集、无界集.

7.1.2　多元函数的概念

1. 二元函数的定义

定义 7-5　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为一个二元函数. 通常记二元函数为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D;\qquad 或\ z=f(P),P\in D.$$

另外称 x,y 为 f 的自变量，z 为 f 的因变量，D 为 f 的定义域. 又

$$f(D)=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为 f 的值域；

$$T(f)=\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为 f 的图像（或图形）.

与一元函数类似，两个二元函数相同，当且仅当它们的定义域 D 与对应法则 f 相同.

对于由一个算式 $z=f(x,y)$ 表示的二元函数，规定使算式 $f(x,y)$ 有意义的所有点 (x,y) 组成的集合为 f 的定义域，如 $z=\sqrt{y-x}$ 的定义域 $D=\{(x,y)\,|\,y-x\geqslant0\}$.

注意，二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的图像是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子集，通常是一张曲面. 如图 7-2 所示，$z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的图像 $T(f)$ 在 xOy 面的投影为 D，过 D 中任意一点 (x,y) 作垂线，该垂线与 $T(f)$ 交且仅交一点.

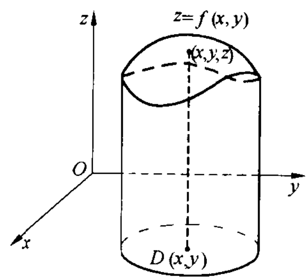


图 7-2

例如，$z=ax+by+c$ 是一张平面，$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 是中心在原点、半径为 1 的球面的上半部分.

2. 二元函数的等高线

前面已经讲过，二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的图像通常是一张曲面. 基于人类对平面媒体的依赖性，人们总是希望用平面图形来了解曲面的形状. 下面介绍的等高线法就是为了这一目的而创造的，它最早应用在地形图中.

在 $z=f(x,y)$ 中，令 $z=C$，则方程

$$L_C:\ f(x,y)=C.$$

在 xOy 面内通常表示一条曲线，它是函数 $z=f(x,y)$ 的图形与平面 $z=C$ 的交线在 xOy 面的投影曲线. 由于在曲线 L_C 上，$f(x,y)$ 的高度 z 都是相等的（都等于 C），所以称 L_C 为 f 的