亚纯函数论

YACHUN HANSHULUN

莫 叶 编

山东大学出版社

亚纯函数论

莫　叶　编

山东大学出版社

亚纯函数论
莫 叶 编

责任编辑：张秉尧
特约编辑：方永宏
内版设计：赵 岩

山东大学出版社出版
地址：山东省济南市山大南路 27 号
邮政编码：250100
山东省新华书店经销
山东泰安第三印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开
10.25 印张 266 千字
1997 年 12 月 第 1 版
1997 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—500 册
ISBN7－5607－1873－6/O・121

定价：9.80 元

内容提要

本书叙述亚纯函数的基础理论,内容有尼奉里那第一、二基本定理,因子分解定理与亏量定理,函数征量与其导数征量的界面关系,米老克斯理论,赫门不等式,亚纯函数本身与其各阶导数均无零点的表达式,亏量级数的敛散性,椭圆定理,毕卡大小定理,正规族理论,球征量性质,茹利亚方向,波勒耳方向等.本书可作为大学本科高年级学生以及研究生学习亚纯函数理论的的教材或参考书.

序

亚纯函数理论在著名数学家毕卡、波勒耳、波鲁亚、蒙特尔、肖特克、尼奉里那、茹利亚、范礼隆、亚历富斯、米老克斯、赫门、富克斯、卡当等人的研究下奠定了雄厚基础，中国著名教授熊庆莱、庄圻泰、杨乐、张广厚、杨重骏、顾永兴、仪洪勋等人在20世纪中也作出了卓越深刻的结果，庄、杨、张、杨、顾、仪各有专著出版，受到了数学界的重视．作者参阅国内外名著翻译改编成此书，叙述清晰，力求易懂，以便读者具有复变函数论基础知识，即可自学．

本书的出版得到山东大学出版基金的资助并承蒙杨连中、扈培础、李玉华、张庆彩等同志校阅，作者深表感谢．

莫　叶

济南山东大学

1997.5

目 录

第一章　尼氏基本定理

§1　第一基本定理

1.1　定义

本书将采用作者所编《复变函数论》第一、二、三册(文献[8])的符记及定理，设 $f(z)$在开域中除去极点外为解析，则称 $f(z)$在 G 中欠纯，在 z 面中的欠纯函数简称亚(或逊)纯函数. 对一闭域 D 来说，如果存在开域 G 包围 D 在其中而且 $f(z)$在 G 中欠纯，则称 $f(z)$在 D 中欠纯，如果 $f(z)$在点 z_0 的一邻域 $U(z_0)$中欠纯，则称 $f(z)$在点 z_0 处欠纯.

设 $R>0$，a 为常数，设 $f(z)$在 $|z|<R$ 中欠纯且 $0\leqslant r<R$. 我们把 $f(z)-a$ 在 $|z|\leqslant r$ 中的零点个数(计算重数)，称为 $f(z)-a$ 的零点的计量并记作 $n(r,a)$. 如果不计算重数，只计算不同零点的个数，则称为简计量并记作 $\overline{n}(r,a)$. 设 l 为正整数，我们还用 $n_{l)}(r,a)$与 $n_{(l+1}(r,a)$分别表示 $f(z)-a$ 的在 $|z|\leqslant r$ 中的阶不超过 l 与阶大于 l 零点个数(要计算重数)，如果不计算重数，则分别用 $\overline{n}_{l)}(r,a)$与 $\overline{n}_{(l+1}(r,a)$表示. 定义 $f(z)-a$ 的零点的密量为

$$N(r,a)=\int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\mathrm{d}t+n(0,a)\log r. \qquad (1)$$

把(1)右端计量换成简计量即得简密量 $\overline{N}(r,a)$的定义，完全类似

可以定义 $N_{l)}(r,a)$ 与 $N_{(l+1}(r,a)$ 以及 $\overline{N}_{l)}(r,a)$ 与 $\overline{N}_{(l+1}(r,a)$. 如果 $a=0$,则 $n(r,0)$, $N(r,0)$ 可以记作 $n(r,\frac{1}{f})$, $N(r,\frac{1}{f})$. 如果 $a=\infty$, 则 $n(r,\infty)$, $N(r,\infty)$ 可以记作 $n(r,f)$, $N(r,f)$. 对其他计量与密量有类似符记.

我们知道正对数的定义为

$$\log^+ x=\begin{cases}\log x & (x\geqslant 1),\\ 0 & (0\leqslant x<1),\end{cases}$$

并具有性质

$$\log x=\log^+ x-\log^+\frac{1}{x}; \qquad (x>0),$$

$$\log^+\left|\prod_{k=1}^{p} a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|;$$

$$\log^+\left|\sum_{k=1}^{p} a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{p}\log^+|a_k|+\log p.$$

定义 $f(z)$ 的均量为

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

对指定 $f(z)$ 来说,设 a 为常数,通常用 $m(r,a)$ 表示 $m(r,\frac{1}{f-a})$, 显然, $m(0,f)=\log^+|f(0)|$. 当 $f_k(z)$ $(k=1,2,\cdots,p)$ 均在 $|z|<R$ 中欠纯时,从正对数的性质即得

$$m(r,\prod_{k=1}^{p} f_k)\leqslant\sum_{k=1}^{p} m(r,f_k);$$

$$m(r,\sum_{k=1}^{p} f_k)\leqslant\sum_{k=1}^{p} m(r,f_k)+\log p.$$

{参阅[8], §13—5}定义 $f(z)$ 的征量为

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

如果 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 中解析,则 $N(r,f)=0$, $T(r,f)=m(r,f)$.

1.2 钱笙公式

设 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 中欠纯，如果 $f(0)\neq 0,\infty$，在[8]，§10—3 中曾经得出钱笙(Jensen)公式并在[8]，13—6.2 节引理 3 中把它写作如下形式

$$\log|f(0)|=N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta,\quad(2)$$

这里 $0\leqslant r<R$，因 $\log|f(re^{i\theta})|=\log^+|f(re^{i\theta})|-\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}$，故(2)可改写作

$$\log|f(0)|=N(r,f)+m(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)-m\left(r,\frac{1}{f}\right),$$

从此即得钱笙公式的简化形式为

$$T(r,f)=T\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log|f(0)|.$$

如果 $f(0)=0$. 设 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 p 阶零点，且 r 暂时固定，$0<r<R$，令 $\psi(z)=\frac{r^p}{z^p}f(z)\quad(0<|z|<R)$,

$$\psi(0)=r^p\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^p}=cr^p\neq 0.$$

于是从(2)即得

$$\log|\psi(0)|=N(r,\psi)-N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|\psi(re^{i\theta})|d\theta,$$

显然 $N(r,\psi)=N(r,f)$，$N\left(r,\frac{1}{\psi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\frac{n\left(t,\frac{1}{\psi}\right)}{t}dt=$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^r\frac{n\left(r,\frac{1}{f}\right)-n\left(0,\frac{1}{f}\right)}{t}dt=N\left(r,\frac{1}{f}\right)-p\log r$,

$|\psi(re^{i\theta})|=|f(re^{i\theta})|$，因此

$$\log|c|+p\log r=N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+p\log r+$$