

亚纯函数论

YACHUN HANSHULUN

莫 叶 编

山东大学出版社

亚纯函数论

莫 叶 编

山东大学出版社

亚纯函数论

莫 叶 编

责任编辑：张秉尧

特约编辑：方永宏

内版设计：赵 岩

山东大学出版社出版

地址：山东省济南市山大南路 27 号

邮政编码：250100

山东省新华书店经销

山东泰安第三印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开

10.25 印张 266 千字

1997 年 12 月 第 1 版

1997 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—500 册

ISBN7-5607-1873-6/O·121

定价：9.80 元

内容提要

本书叙述亚纯函数的基础理论,内容有尼奉里那第一、二基本定理,因子分解定理与亏量定理,函数征量与其导数征量的界面关系,米老克斯理论,赫门不等式,亚纯函数本身与其各阶导数均无零点的表达式,亏量级数的敛散性,椭圆定理,毕卡大小定理,正规族理论,球征量性质,茹利亚方向,波勒耳方向等.本书可作为大学本科高年级学生以及研究生学习亚纯函数理论的教材或参考书.

序

亚纯函数理论在著名数学家毕卡、波勒耳、波鲁亚、蒙特尔、肖特克、尼奉里那、茹利亚、范礼隆、亚历富斯、米老克斯、赫门、富克斯、卡当等人的研究下奠定了雄厚基础,中国著名教授熊庆莱、庄圻泰、杨乐、张广厚、杨重骏、顾永兴、仪洪勋等人在 20 世纪中也作出了卓越深刻的结果,庄、杨、张、杨、顾、仪各有专著出版,受到了数学界的重视.作者参阅国内外名著翻译改编成此书,叙述清晰,力求易懂,以便读者具有复变函数论基础知识,即可自学.

本书的出版得到山东大学出版基金的资助并承蒙杨连中、扈培础、李玉华、张庆彩等同志校阅,作者深表感谢.

莫 叶

济南山东大学

1997.5

目 录

第一章 尼氏基本定理.....	(1)
§ 1 第一基本定理	(1)
1.1 定义	(1)
1.2 钱笙公式	(3)
1.3 征量的不等式	(4)
1.4 第一基本定理	(5)
§ 2 亚纯函数的征量	(7)
2.1 均量性质	(7)
2.2 密量与征量.....	(10)
2.3 线性变换.....	(11)
2.4 有理函数.....	(12)
2.5 整函数 e^z	(12)
§ 3 尼氏因子分解定理.....	(17)
3.1 亚纯函数的阶.....	(17)
3.2 对数导数.....	(19)
3.3 因子分解.....	(21)
§ 4 $m(r, \frac{f'}{f})$ 的估计	(30)
4.1 叙述.....	(30)
4.2 线性函数的均量.....	(31)
4.3 $\log n$ 的估计	(33)

4.4	定理 7 的证明	(34)
§ 5	第二基本定理	(36)
5.1	三密量不等式	(36)
5.2	一般形式	(38)
§ 6	余项 $\Lambda(r, f)$	(41)
6.1	波勒耳引理	(41)
6.2	$\Lambda(r, f)$ 的估计	(46)
6.3	小项	(46)
§ 7	亏量	(48)
7.1	定义	(48)
7.2	亏量定理	(49)
7.3	重值	(52)
7.4	有理函数	(53)
§ 8	小函数	(54)
8.1	定义	(54)
8.2	三密量不等式的推广	(54)
8.3	亏函数	(55)
	习题	(57)
第二章	导数	(59)
§ 1	两个不等式	(59)
1.1	消去 $\log^+ \log^+ \frac{1}{x}$	(59)
1.2	消去 $\log^+ U(s)$	(60)
§ 2	界围关系	(62)
2.1	用 $T(r, f)$ 界围 $T(r, f^{(v)})$	(62)
2.2	用 $T(r, f')$ 界围 $T(r, f)$	(65)
2.3	阶与下阶	(71)
§ 3	米老克斯理论	(72)

3.1	微分多项式	(72)
3.2	米老克斯不等式	(73)
3.3	导数的简亏量	(77)
§ 4	赫门不等式	(78)
4.1	叙述	(78)
4.2	$N_{11}(r, f)$ 的上界	(79)
4.3	定理 8 的证明	(81)
4.4	$f(z)$ 与 $f^{(k)}(z)$ 的取值	(83)
§ 5	波鲁亚理论	(84)
5.1	导数性质	(84)
5.2	定理 9(1) 的证明	(84)
5.3	根的存在	(86)
5.4	定理 9(2) 的证明	(88)
5.5	至少两个极点	(92)
5.6	无零点的亚纯函数	(93)
	习题	(95)
第三章	亏量理论	(96)
§ 1	亏量级数	(96)
1.1	叙述	(96)
1.2	振幅	(97)
1.3	两个不等式	(99)
1.4	征量的一个不等式	(101)
1.5	最小值	(102)
1.6	$U(\theta_0, I_p, \psi_1)$	(104)
1.7	$U(\theta_0, I_p, \psi_2)$	(106)
1.8	$\sum_p m_p I_p ^{1-\beta}$	(108)
1.9	函数 $Kf(z)$	(109)

1.10	点集 E_n	(110)
1.11	定理 1 的证明	(112)
1.12	$0 < \alpha < \frac{1}{3}$	(114)
§ 2	$K(f)$	(118)
2.1	叙述	(118)
2.2	波鲁亚峰	(119)
2.3	征量的上界	(120)
2.4	定理 3 的证明	(122)
2.5	整函数	(124)
§ 3	哥德培克理论	(126)
3.1	叙述	(126)
3.2	凸函数的性质	(126)
3.3	定理 6 的证明	(129)
3.4	正零点与负极点	(130)
§ 4	椭圆定理	(133)
4.1	叙述	(133)
4.2	简化	(136)
4.3	函数 $\hat{f}(z)$	(137)
4.4	$\log f(z)$ 的积分表示	(139)
4.5	$T(r, f)$ 的积分表示	(140)
4.6	定积分的估计	(143)
4.7	(4) 的证明	(144)
4.8	(5) 的证明	(146)
4.9	推论	(147)
4.10	精确性	(151)
§ 5	亏量与极限	(158)
5.1	叙述	(158)

5.2	函数 $g(z, b)$	(160)
5.3	函数 $\chi(x)$	(162)
5.4	函数 $G(z)$	(163)
5.5	$\log f(z) $ 的上界	(165)
5.6	$T(r, f)$ 的上界	(167)
5.7	无穷积分的估计	(168)
5.8	定理 9 的证明	(171)
	习题	(171)
第四章 例外值		(173)
§ 1	肖特克定理	(173)
1.1	叙述	(173)
1.2	界限定理	(173)
1.3	定理 1 的证明	(177)
1.4	其他形式	(180)
1.5	朗道定理	(182)
§ 2	毕卡定理	(183)
2.1	有理函数	(183)
2.2	整函数	(183)
2.3	亚纯函数	(184)
2.4	B 值	(185)
2.5	关系	(186)
2.6	孤立本性奇点	(187)
§ 3	路线	(191)
3.1	渐近值与 P 值	(191)
3.2	相邻路线	(193)
3.3	渐近值与 B 值	(196)
	习题	(198)
第五章 正规族理论		(199)

§ 1 匀趋	(199)
1.1 覆盖定理	(199)
1.2 匀向 ∞	(200)
1.3 局部匀敛	(201)
§ 2 正倒匀敛	(202)
2.1 定义	(202)
2.2 极限函数	(202)
2.3 解析函数项序列	(205)
§ 3 正规族	(207)
3.1 定义	(207)
3.2 等价性	(207)
3.3 解析函数族	(209)
§ 4 正规定则	(210)
4.1 覆盖域	(210)
4.2 线性运算	(211)
4.3 有界定则	(213)
4.4 两值定则	(213)
4.5 三值定则	(215)
4.6 充要定则	(216)
习题	(219)
第六章 球征量	(220)
§ 1 球距	(220)
1.1 测地投影	(220)
1.2 定义与性质	(221)
1.3 球距圆	(224)
1.4 球距卡当定理	(226)
§ 2 球面	(226)
2.1 面积元素	(226)

2.2 旋转	(228)
§ 3 格林公式	(230)
3.1 单连域	(230)
3.2 多连域	(231)
3.3 关键等式	(232)
§ 4 亚历富斯征量	(234)
4.1 定义	(234)
4.2 关系	(237)
4.3 尼氏第一基本定理	(237)
4.4 $T_0(r, f)$ 的性质	(240)
§ 5 几何方法	(242)
5.1 几何意义	(242)
5.2 几何证明	(243)
§ 6 比较	(244)
6.1 $n(r, a)$ 与 $A(r)$	(244)
6.2 赫门定理	(246)
习题	(250)
第七章 茹利亚方向	(252)
§ 1 定义	(252)
1.1 与 P 值的联系	(252)
1.2 充圆	(253)
1.3 关系	(254)
§ 2 存在定理	(256)
2.1 叙述	(256)
2.2 均匀有界	(256)
2.3 不正规	(258)
2.4 定理 1 的证明	(259)
§ 3 标量正值区间的端点	(260)

3.1	叙述	(260)
3.2	充圆的存在性	(261)
3.3	定理 2 的证明	(262)
3.4	公共 J 线	(263)
§ 4	角域	(264)
4.1	角域 $\tilde{S}(\frac{\pi}{2})$	(264)
4.2	部分和的上界	(264)
4.3	定积分的上界	(265)
4.4	关键引理	(266)
4.5	充圆存在	(270)
4.6	定理 3 的证明	(271)
4.7	超整函数	(272)
§ 5	J 线的条数	(274)
5.1	$\rho > \frac{1}{2}$	(274)
5.2	$\rho = \frac{1}{2}$	(275)
	习题	(276)
第八章 波勒耳方向		(277)
§ 1	范礼隆定理	(277)
1.1	叙述	(277)
1.2	定理 2 的证明	(278)
1.3	定理 1 的证明	(285)
§ 2	征量与密量	(288)
2.1	球距三密量不等式	(288)
2.2	定理 3 的证明	(289)
2.3	密量的下界	(293)
§ 3	m 幂充圆	(295)

3.1	定义	(295)
3.2	存在定理	(296)
3.3	覆盖圆域	(296)
3.4	$n(\bar{\Theta}, a)$ 的上界	(299)
3.5	$n(\bar{\Theta}, a)$ 的下界	(300)
3.6	定理 5 的证明	(302)
§ 4	ρ 阶 B 线	(303)
4.1	定义	(303)
4.2	ρ 阶充圆序列	(304)
4.3	ρ 阶 B 线的存在性	(305)
4.4	J 线	(306)
	习题	(308)
	参考文献	(309)

第一章 尼氏基本定理

§ 1 第一基本定理

1.1 定义

本书将采用作者所编《复变函数论》第一、二、三册(文献[8])的符记及定理,设 $f(z)$ 在开域中除去极点外为解析,则称 $f(z)$ 在 G 中欠纯,在 z 面中的欠纯函数简称亚(或逊)纯函数. 对一闭域 D 来说,如果存在开域 G 包围 D 在其中而且 $f(z)$ 在 G 中欠纯,则称 $f(z)$ 在 D 中欠纯,如果 $f(z)$ 在点 z_0 的一邻域 $U(z_0)$ 中欠纯,则称 $f(z)$ 在点 z_0 处欠纯.

设 $R > 0, a$ 为常数,设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 中欠纯且 $0 \leq r < R$. 我们把 $f(z) - a$ 在 $|z| \leq r$ 中的零点个数(计算重数),称为 $f(z) - a$ 的零点的计量并记作 $n(r, a)$. 如果不计算重数,只计算不同零点的个数,则称为简计量并记作 $\bar{n}(r, a)$. 设 l 为正整数,我们还用 $n_l(r, a)$ 与 $n_{l+1}(r, a)$ 分别表示 $f(z) - a$ 的在 $|z| \leq r$ 中的阶不超过 l 与阶大于 l 零点个数(要计算重数),如果不计算重数,则分别用 $\bar{n}_l(r, a)$ 与 $\bar{n}_{l+1}(r, a)$ 表示. 定义 $f(z) - a$ 的零点的密度为

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r. \quad (1)$$

把(1)右端计量换成简计量即得简密度 $\bar{N}(r, a)$ 的定义,完全类似

可以定义 $N_D(r, a)$ 与 $N_{D+1}(r, a)$ 以及 $\bar{N}_D(r, a)$ 与 $\bar{N}_{D+1}(r, a)$. 如果 $a=0$, 则 $n(r, 0), N(r, 0)$ 可以记作 $n(r, \frac{1}{f}), N(r, \frac{1}{f})$. 如果 $a=\infty$, 则 $n(r, \infty), N(r, \infty)$ 可以记作 $n(r, f), N(r, f)$. 对其他计量与密量有类似符记.

我们知道正对数的定义为

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x & (x \geq 1), \\ 0 & (0 \leq x < 1), \end{cases}$$

并具有性质

$$\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}; \quad (x > 0),$$

$$\log^+ \left| \prod_{k=1}^p a_k \right| \leq \sum_{k=1}^p \log^+ |a_k|;$$

$$\log^+ \left| \sum_{k=1}^p a_k \right| \leq \sum_{k=1}^p \log^+ |a_k| + \log p.$$

定义 $f(z)$ 的均量为

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

对指定 $f(z)$ 来说, 设 a 为常数, 通常用 $m(r, a)$ 表示 $m(r, \frac{1}{f-a})$, 显然, $m(0, f) = \log^+ |f(0)|$. 当 $f_k(z) (k=1, 2, \dots, p)$ 均在 $|z| < R$ 中欠纯时, 从正对数的性质即得

$$m(r, \prod_{k=1}^p f_k) \leq \sum_{k=1}^p m(r, f_k);$$

$$m(r, \sum_{k=1}^p f_k) \leq \sum_{k=1}^p m(r, f_k) + \log p.$$

{参阅[8], § 13-5) 定义 $f(z)$ 的征量为

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

如果 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 中解析, 则 $N(r, f) = 0, T(r, f) = m(r, f)$.

1.2 钱茺公式

设 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 中欠纯, 如果 $f(0) \neq 0, \infty$, 在 [8], § 10-3 中曾经得出钱茺(Jensen)公式并在 [8], 13-6.2 节引理 3 中把它写作如下形式

$$\log |f(0)| = N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad (2)$$

这里 $0 \leq r < R$, 因 $\log |f(re^{i\theta})| = \log^+ |f(re^{i\theta})| - \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|}$, 故 (2) 可改写作

$$\log |f(0)| = N(r, f) + m(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) - m(r, \frac{1}{f}),$$

从此即得钱茺公式的简化形式为

$$T(r, f) = T(r, \frac{1}{f}) + \log |f(0)|.$$

如果 $f(0) = 0$. 设 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的 p 阶零点, 且 r 暂时固定,

$0 < r < R$, 令 $\psi(z) = \frac{r^p}{z^p} f(z) \quad (0 < |z| < R)$,

$$\psi(0) = r^p \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z^p} = cr^p \neq 0.$$

于是从 (2) 即得

$$\log |\psi(0)| = N(r, \psi) - N(r, \frac{1}{\psi}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta,$$

显然 $N(r, \psi) = N(r, f)$, $N(r, \frac{1}{\psi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{n(t, \frac{1}{\psi})}{t} dt =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{n(r, \frac{1}{f}) - n(0, \frac{1}{f})}{t} dt = N(r, \frac{1}{f}) - p \log r,$$

$|\psi(re^{i\theta})| = |f(re^{i\theta})|$, 因此

$$\log |c| + p \log r = N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) + p \log r +$$