21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

离散数学

典型例题与解法

邹阿金　等编著

- 归纳要点
- 精选例题
- 典型解法
- 模拟应试
- 考研训练

国防科技大学出版社

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

离散数学典型例题与解法

邹阿金　吴柏森　龚红仿　编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容简介

离散数学典型例题与解法内容包括数理逻辑、集合论、二元关系、代数系统、图论共五章。每章分基本要求、内容提要、典型例题与方法、综合应用与提高(例题)、同类练习与综合练习。本书力求:对大纲要求有适合性,例题解法有典型性,练习题有代表性,对本科生练习和应试有有效性。本科生、考研生分别使用同步、综合练习。本书适合于理工科学生学习与考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学典型例题与解法/邹阿金等编著.—长沙:国防科技大学出版社,2003.9
ISBN 7-81024-945-2

Ⅰ.离… Ⅱ.①邹… Ⅲ.离散数学—高等学校—解题 Ⅳ.0158-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 033315 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:罗青 责任校对:黄煌
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:13.25 字数:306 千
2003 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1-4000 册
*
定价:19.50 元

21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

编审委员会

序

数学有科学皇后之称。在现代社会,自然科学、技术科学与社会科学快速发展,数学在各科学领域的应用愈来愈广泛,而数学本身的分支增多,其理论也愈加深入。数学的发展和数学的应用紧密相关,相互促进。高等数学与现代数学已成为科学家、技术人员和管理人员用来分析和解决现代科技和社会问题的强有力的利器,不仅为解决问题提供了定量分析工具,而且提供了科学的思维方法。

大学教育为适应现代科学发展和人才培养的需要,都把数学教学摆在基础和核心的地位。培养大学生和研究生学习高等数学的浓厚兴趣和理解、应用高等数学的思想、方法的实际能力,是大学生、研究生未来从事现代化工作的必需,是大学数学教师的重任。本丛书编委和国防科技大学出版社为服务大学数学的教与学工作,试图为学生提供一套符合学习规律、适用有效的辅导教材。在编审委员会指导下,参编教师广泛参考国内流行教材和辅导教材,多次研讨写作的目的、要求和方案,定稿前又多次讨论、修改和优化。丛书凝结着作者的心血和创造性劳动。该丛书有如下特点:

1. 满足教学大纲要求,例题习题有典型性、代表性和系列性。作者参照有关学科的本科教学大纲要求,及硕士生入学考试要求而编写,限定内容范围和要求层次。广泛收集国内比较优秀的教材和习题集,反复比较,选择出有典型性、代表性的题目,继而进行分析和解答,使同学们能触类旁通。

2. 作者教学经验丰富,力图适合学生的学习规律。作者都是长期在教学第一线工作,积累了教授与导学的经验,在编写时融合了作者教学经验与教法。根据高等数学的高度抽象性、较强的逻辑性、应用广泛性的特点,掌握其思想和方法必须认真过“应用”关(解题)。而过好“应用”关,除了靠读者数学天赋、悟性,主要还是应“引导”有方。引导的方法主要是,遵循认识规律,例题习题的编排,由浅到深,由简单到复杂,由单一到综合,且提供解题的一般思路,使读者能举一反三。

3. 适合读者自学。大学生学习应有很强的独立性、主动性,况且辅导教

师不可能“招之即来”，然而优秀的“学习辅导书”也就是一位好的老师。该书安排的例题提供了分析思路，典型的同步习题和综合习题提供简答过程，全部习题提供了参考答案，十分有利于同学们自学指导。

本丛书的出版值得庆祝，它必将成为大学生、研究生愉快地进行数学训练，完成学业的益友良师。本书适合于广大的在校大学生、研究生学习，也适合于广大自学青年和在职人员自学之用。

丛书的出版是作者和编辑辛勤劳动的结晶，在此感谢他们的劳动，并向同学们和自学青年郑重推荐此书。

侯振挺

2003 年 8 月

前　言

“离散数学”是计算机学科的核心专业基础课程之一，其内容一直随着计算机科学的发展而不断地扩充与更新。到目前为止，其主要内容包括：数理逻辑、集合论、代数系统、图论、形式语言与自动机理论、可计算性理论、组合论和离散概率等。考虑到考试大纲的要求，本书仅涉及了如下内容：1. 数理逻辑；2. 集合论；3. 代数系统；4. 图论。

“离散数学”是研究离散数量关系和离散结构的数学分支，其概念、理论和方法与计算机科学中的编译原理、操作系统、数据结构、数据库理论、算法分析、人工智能等课程联系紧密，并有利于概括抽象、逻辑思维和归纳构造等能力的培养，是从事计算机设计、研究和应用的专业技术人员必须掌握的基础知识。

“离散数学”的一个显著特点是：内容抽象，逻辑性强，概念、定理和公式多。这给学生的学习带来了很大的困难：面对习题，往往不知从何下手，没有一点解题思路，或者是大致知道解题思路，但又不明了解题规范和要求，其解答常常不合逻辑，漏洞百出。有基于此，我们编写了本书，以期对学习“离散数学”的同学、青年教师和科技人员有所帮助。本书可作为理工科院校计算机和信息等相近专业的学生学习“离散数学”的辅导资料和考研指导，也可供从事计算机工作的科技人员参考。

全书共分六章，其中第一章由吴柏森编写，第二、三章由龚红仿编写，第四、五、六章由邹阿金编写。每章主要包含以下内容：

(1)教学要求。紧扣考试大纲，提出具体要求。

(2)内容提要。将本章主要概念和定理按知识体系进行总结，起到温故而知新的作用。

(3)典型例题与方法。基于各知识点，选择一些基础性的经典例题进行分析解答。

(4)综合应用与提高。基于各知识点的前后贯通，选择一些难度较大、综合性较强(包含一些知名院校的历届考研题)的例题进行分析解答。

(5)习题。全部习题均给出了解答，其中(A)为基础题，(B)为综合题。

本书虽经努力编著而成，但限于时间紧迫，书中难免有错漏，敬请指正。

编　者

2003 年 8 月

目　录

第三章 二元关系

第四章 代数系统

第五章 图 论

第六章 应试实战模拟及参考答案

第一章　数理逻辑

一、教学要求

1. 命题逻辑

理解什么是命题，了解命题的表示方法，灵活运用命题公式，会用真假值与等价公式进行证明。能熟练地用直接证明法、间接证明法和 cp 方法进行推理。

2. 谓词逻辑

掌握谓词概念与表示方法，能正确地使用量词，了解什么是约束变元与自由变元，能灵活地运用谓词演算的等价式与蕴含式、量词的全称指(规)定规则、全称推广原则、存在指(规)定原则、存在推广规则等进行谓词演算的推理。

二、内容提要

(一)命题逻辑

1. 命题及其表示法

命题　能表达判断的语句，并具有确定真值的陈述句。一般用 $P,Q,R\cdots$ 表示。

真值　一个命题总具有一个"值"，称为真值。真值只有真和假两种，分别记为 T 和 F。

原子命题　不能分解为更简单的陈述句，称为原子命题。

复合命题　由联结词、圆括号和原子命题复合构成的命题称为复合命题。

命题变元　以 $\{T,F\}$ 为其变域的变元称为命题变元。

2. 命题联结词

否定　设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。

合取　两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P\wedge Q$。当且仅当 P,Q 同时为 T 时，$P\wedge Q$ 为 T。在其他情况下，$P\wedge Q$ 的真值为 F。

析取　两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P\vee Q$。当且仅当 P,Q 同时为 F 时，$P\vee Q$ 为 F，否则 $P\vee Q$ 的真值为 T。

蕴含　给定两个命题 P 和 Q，则"P 蕴含 Q"是一个复合命题，记作 $P\rightarrow Q$，当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T。

等价　给定两个命题 P 和 Q，则"P 等价 Q"是一个复合命题，记作 $P\leftrightarrow Q$，当 P 和 Q

的真值相同时,$P \leftrightarrow Q$ 的真值为 T,否则 $P \leftrightarrow Q$ 的真值为 F。

3. 命题公式

合式公式　命题演算的合式公式规定为:

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式;

(2) 如果 A 是合式公式,那么$\neg A$ 是合式公式;

(3) 如果 A 和 B 是合式公式,那么$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \to B)$,$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式;

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1),(2),(3)所得到的包含命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。

规定联结词运算的优先次序为:$\neg$,$\wedge$,$\vee$,$\to$,$\leftrightarrow$。

4. 真值表与等价公式

真值表　在命题公式中,对于分量指派真值的各种可能组合,就确定了这个命题公式的各种真值情况,把它汇列成表,就是命题公式的真值表。

逻辑相等　给定两个命题公式 A 和 B,设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元,若给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 任一组真值指派,A 和 B 的真值都相同,则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等。记作 $A \Leftrightarrow B$。

子公式　如果 X 是合式公式 A 的一部分,且 X 本身也是一个合式公式,则称 X 为公式 A 的子公式。

定理 1-1　设 X 是合式公式 A 的子公式,若 $X \Leftrightarrow Y$,如果将 A 中的 X 用 Y 来置换,所得公式 B 与公式 A 等价,即 $A \Leftrightarrow B$。

5. 重言式与矛盾式

重言式　给定一个命题公式,若无论对分量作怎样的指派,其对应的真值永为 T,则称命题公式为重言式或永真公式。

矛盾式　给定一个命题公式,若无论对分量作怎样的指派,其对应的真值永为 F,则称该命题为矛盾式或永假公式。

蕴含重言式　当 $P \to Q$ 是重言式时,称为蕴含重言式,记作 $P \Rightarrow Q$。

定理 1-2　任何两个重言式的合取或析取,仍然是一个重言式。

定理 1-3　一个重言式,对同一个分量都用任何合式公式置换,其结果仍为一重言式。

定理 1-4　设 A,B 为两个命题公式,$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为一个重言式。

定理 1-5　设 P,Q 为任意两个命题公式,$P \Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$。

6. 其他联结词

不可兼析取　设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P \overline{\vee} Q$ 称作 P 和 Q 的不可兼析取。当且仅当 P 和 Q 的真值相异时,$P \overline{\vee} Q$ 为 T。

蕴含否定　设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P \nrightarrow Q$ 称作命题 P 和 Q 的蕴含否定。当且仅当 P 的真值为 T,Q 的真值为 F 时,$P \nrightarrow Q$ 的真值为 T,否则 $P \nrightarrow Q$ 的真值为 F。

与非　设 P 和 Q 是两个命题公式,复合命题 $P \uparrow Q$ 称作 P 和 Q 的与非。当且仅当 P

和 Q 的真值都是T时,$P\uparrow Q$ 的真值为F,否则 $P\uparrow Q$ 的真值为T。

或非　设P和Q是两个命题公式,复合命题 $P\downarrow Q$ 称作P和Q的或非。当且仅当P和 Q 的真值都是F时,$P\downarrow Q$ 的真值为T,否则 $P\downarrow Q$ 的真值为F。

7. 对偶与范式

对偶式　在给定的命题 A 中,使联结词$\vee$变换成$\wedge$,将$\wedge$换成$\vee$,若有特殊变元 F 和 T 亦相互取代,所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。

合取范式　一个命题公式称为合取范式,当且仅当它具有形式 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n(n\geqslant1)$,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的析取式。

析取范式　一个命题公式称为析取范式,当且仅当它具有形式 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n(n\geqslant1)$,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

小项　n 个命题变元的合取式称作小项或布尔合取,其中每个变元与它的否定不能同时存在,但两者必须出现且仅出现一次。

大项　n 个命题变元的析取式称作大项或布尔析取,其中每个变元与它的否定不能同时存在,但两者必须出现且仅出现一次。

主析取范式　对于给定的命题公式,如果有一个等价公式仅由小项的析取所组成,则该等价式称作原式的主析取范式。

主合取范式　对于给定的命题公式,如果有一个等价公式仅由大项的合取所组成,则该等价式称作原式的主合取范式。

定理 1-6　设 A 和A^*是对偶式,$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在A和A^*中的原子变元,则

$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$;

$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\Leftrightarrow A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。

定理 1-7　设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在公式A 和 B 中的所有原子变元,如果 $A\Leftrightarrow B$,则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

定理 1-8　在真值表中,一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取,即为此公式的主析取范式。

定理 1-9　在真值表中,一个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取,即为此公式的主合取范式。

8. 命题演算推理理论

有效结论　设 A 和C是两个命题公式,当且仅当 $A\rightarrow C$ 为一重言式,即 $A\Rightarrow C$,称 C 是 A 的有效结论,或 C 可由 A 逻辑地推出,这里 A 可以有 n 个前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$。

P 规则　前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

T 规则　在推导中,如果有一个或多个公式重言蕴含着公式 S,则公式 S 可以引入推导之中。

相容　假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$;对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的一些真值指派,如果能使 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值为 T,则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的。

不相容　假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_n$；如果对于 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的每一组真值指派，使得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$ 的真值均为 F，则称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的。

直接证法　由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论。

间接证法：

(1) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow C$，只要证明 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 与 $\neg C$ 不相容。

(2) 要证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow(R\rightarrow C)$，如能证明 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\wedge R\Rightarrow C$，即证得 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n\Rightarrow(R\rightarrow C)$。这个证明称为 CP 规则。

主要公式：

E_1	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$
E_3	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$
E_4	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$
E_5	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$
E_6	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
E_7	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$
E_8	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
E_9	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
E_{10}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$
E_{11}	$P\vee P\Leftrightarrow P$
E_{12}	$R\vee(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{13}	$R\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{14}	$R\vee(P\vee\neg P)\Leftrightarrow T$
E_{15}	$R\wedge(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow F$
E_{16}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
E_{17}	$\neg(P\rightarrow Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$
E_{18}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$
E_{19}	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\rightarrow R$
E_{20}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$
E_{21}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
E_{22}	$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\leftrightarrow\neg Q$
I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$

I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$
I_{16}	$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$

(二)谓词逻辑

1. 谓词的概念与表示

谓词　在反映判断的句子中,用以刻画客体的性质或关系的词即是谓词。

n 元谓词　由 n 个客体插入到固定位置上的谓词填式,例如 $A(b)$称作一元谓词,$B(a,b)$称作二元谓词,$L(a,b,c)$称作三元谓词,依此类推。

2. 命题函数与量词

命题函数　由一个谓词、一些客体变元组成的表达式称为简单命题函数。

个体域　在命题函数中,命题变元的论述范围称作个体域。

全总个体域　个体域可以是有限的,也可以是无限的,把各种个体域综合在一起,作为论述范围的域,称作全总个体域。

全称量词　符号“$\forall$”称为全称量词,用来表达“对所有的”、“每一个”、“对任一个”、“凡”、“一切”等词。

存在量词　符号“$\exists$”称为存在量词,用以表达“某个”、“存在一些”、“至少有一个”、“对于一些”等词。

特性谓词　在讨论带有量词的函数命题时,必须确定其个体域,为了方便,可以使用全总个体域。限定客体变元变化范围的谓词,称作特性谓词。

3. 谓词公式、变元的约束

原子公式　把形如 $A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的公式称作谓词演算的原子公式,其中:$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是客体变元。

合式公式　谓词演算的合式公式,由如下各条组成:

(1) 原子谓词公式是合式公式。

(2) 若 A 是合式公式,则$\neg A$ 是一个合式公式。

(3) 若 A 和 B 都是合式公式,则$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\leftrightarrow B)$是合式公式。

(4) 如果 A 是合式公式,x 是 A 中出现的任何变元,则 $\forall xA$,$\exists xA$ 都是合式公式。

(5) 只有经过有限次的应用(1),(2),(3)、(4)所得到的公式是合式公式。

辖域　给定谓词公式中,形式为 $\forall xP(x)$,$\exists xP(x)$中的 $P(x)$称为相应量词的作用域或辖域。

约束变元　在辖域中,x 的一切出现称为 x 在公式中的约束出现,所有约束出现的变元叫做约束变元。

自由变元　在谓词公式中,除去约束变元以外所出现的变元称作自由变元。

换名　对公式中的约束变元,遵照一定的规则更改名称符号称为约束变元的换名。

代入　是对自由变元代以式子,要求代入后的结果式是原式的特例(代入式子的值域与被代入变元的变域相同)。

4. 谓词演算的等价式与蕴含式

赋值　在谓词公式中常包含命题变元和客体变元,当客体变元由确定的客体所取代,命题变元用确定的命题所取代时,就称作对谓词公式赋值。一个谓词公式经过赋值以后,就成为具有确定真值的命题。

等价　给定任何两个谓词公式 A 和 B,设它们有共同的个体域 E,若对 A 和 B 的任一组变元进行赋值所得命题的真值相同,则称谓词公式 A 和 B 在 E 上是等价的,并记作 $A\Leftrightarrow B$。

有效　给定任意谓词公式 A,其个体域为 E,对于 A 的所有赋值,A 都为真,则称 A 在 E 上是有效的(或永真的)。

不可满足　一个谓词公式 A,如果在所有赋值下都为假,则称该公式为不可满足的(或永假的)。

可满足　一个公式 A,如果至少在一种赋值下为真,则称该公式为可满足的。

谓词演算中的等价式和蕴含式　命题演算中的等价公式表和蕴含公式表都可推广到谓词演算中使用。此外,还有如下一些谓词的等价公式和蕴含公式。

I_{17}　$\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\vee Q(x))$

I_{18}　$\exists x(P(x)\wedge Q(x))\Rightarrow\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$

I_{19}　$\exists xP(x)\rightarrow\forall xQ(x)\Rightarrow\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$

I_{20}　$\forall xP(x)\Rightarrow\exists xP(x)$

I_{21}　$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall xP(x)\rightarrow\forall xQ(x))$

I_{22}　$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\exists xP(x)\rightarrow\exists xQ(x))$

E_{23}　$\exists x(P(x)\vee Q(x))\Leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$

E_{24}　$\forall x(P(x)\wedge Q(x))\Leftrightarrow\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$

E_{25}　$\neg\exists xP(x)\Leftrightarrow\forall x\neg P(x)$

E_{26}　$\neg\forall xP(x)\Leftrightarrow\exists x\neg P(x)$

E_{27} $\forall x(P \vee Q(x)) \Leftrightarrow P \vee \forall xQ(x)$

E_{28} $\exists x(P \wedge Q(x)) \Leftrightarrow P \wedge \exists xQ(x)$

E_{29} $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$

E_{30} $\forall xP(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x(P(x) \rightarrow Q)$

E_{31} $\exists xP(x) \rightarrow Q \Leftrightarrow \forall x(P(x) \rightarrow Q)$

E_{32} $P \rightarrow \forall xQ(x) \Leftrightarrow \forall x(P \rightarrow Q(x))$

E_{33} $P \rightarrow \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x(P \rightarrow Q(x))$

5. 前束范式

前束范式　一个公式如果量词均包含在全式的开头,它们的作用域延伸到整个公式的末尾,则该公式叫做前束范式。其形式为$(\square v_1)(\square v_2)\cdots(\square v_n)A$,其中$\square$是量词$\forall$或$\exists$,$v_i(i=1,\cdots,n)$是客体变元,$A$是没有量词的谓词公式。

定理1-10　任意一个谓词公式均和一个前束范式等价。

6. 谓词演算的推理理论

全称指定规则　如果对论域中所有客体x,$P(x)$成立,则对论域中某个任意客体c,$P(c)$成立。这个规则可表示为:$\forall xP(x) \Rightarrow P(c)$,它简记为$US$。

全称推广规则　如果能够证明对论域中每一个客体c,断言$P(c)$都成立,则可得到结论$\forall xP(x)$成立。这个规则可表示为:$P(x) \Rightarrow \forall xP(x)$,它简记为$UG$。

存在指定规则　如果对于论域中某些客体,$P(x)$成立,则必有某个特定客体x,使$P(x)$成立。这个规则可表示为:$\exists xP(x) \Rightarrow P(c)$,它简记为$ES$。

存在推广规则　如果对论域中某个特定客体c,有$P(c)$成立,则在论域中,必存在x,使得$P(x)$成立。这个规则可表示为:$P(c) \Rightarrow \exists xP(x)$,它简记为$EG$。

三、典型例题与方法

(一)命题逻辑

1. 命题及其表示法

例1-1　判断下列语句是否为命题。

(1) 北京是中国的首都;

(2) 所有的树木都是植物;

(3) 雪是黑色的;

(4) 请勿吸烟;

(5) 明天开会吗?

(6) 这朵花多好看呀!

解　(1)~(3)是命题,其中(1),(2)是真命题,(3)是假命题,(4)是祈使句,(5)是疑问句,(6)是感叹句,它们都无真假可言,因此,它们都不是命题。