中学金牌奥赛精典题一题多解

（初中数学）

主　编	项昭义	屠新民	陈　斌
编　委	尹建堂	王建设	叶正道
	陈友文	袁有霞	张恩宏
	刘德存	李素寅	武文潢
编　者	项昭义	屠新民	陈　斌
	尹建堂	王建设	叶正道
	陈友文	袁有霞	张恩宏
	刘德存	李素寅	武文潢
	李锦萍	栗加顺	丁连义

京 华 出 版 社

伽利略(意大利)

一、数与式

1-1. 若 $m^2=m+1,n^2=n+1$,且 $m\neq n$,则 $m^5+n^5=$ ______.

(1990 年江苏省初中数学竞赛题)

【分析一】 利用条件反复把 m^5+n^5 降次,从而可解.

【解法一】 把已知两式相减,得

$m^2-n^2=m-n$

$\because\quad m\neq n,$

$\therefore\quad m-n\neq 0$

于是 $\quad m+n=1$

$\because\quad m^5=m(m^2)^2=m(m+1)^2$

$=m(m^2+2m+1)=m(3m+2)$

$=3m^2+2m$

$=5m+3$

同理 $\quad n^5=5n+3$

$\therefore\quad m^5+n^5=5(m+n)+6$

$=5+6=11.$

【解法二】 (递推法) $\because\quad (a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})=a^n+b^n+ab(a^{n-2}+b^{n-2})$, $\quad\therefore\quad a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}+b^{n-1})-ab(a^{n-2}+b^{n-2})$.

设 $S_n=a^n+b^n$,得递推公式

$$S_n=(a+b)S_{n-1}-abS_{n-2}.\qquad(n=2,3,\cdots)$$

由已知得 m、n 是 $x^2-x-1=0$ 的不等实根.

$\therefore\quad S_1=m+n=1,mn=-1,S_2=m^2+n^2=3$

结合递推公式,得

$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$

从而 $S_3 = S_2 + S_1 = 3 + 1 = 4$

$S_4 = S_3 + S_2 = 4 + 3 = 7$

$S_5 = S_4 + S_3 = 7 + 4 = 11$

即 $m^5 + n^5 = 11$.

【分析三】 由条件可先求出 $m+n, mn, m^2+n^2$，然后将所要求的式子变形成由这三个式子表达的代数式即可求.

【解法三】 由已知可得.

m、n 是方程 $t^2 - t - 1 = 0$ 的两根.

$\therefore$ $m + n = 1, mn = -1, m^2 + n^2 = 3$

$\therefore$ $m^5 + n^5 = (m^3 + n^3)(m^2 + n^2) - m^3n^2 - m^2n^3$

$= (m+n)(m^2 - mn + n^2)(m^2 + n^2) - m^2n^2(m+n)$

$= (3+1) \times 3 - 1$

$= 11$.

【评注】 降次、整体代入，以及利用对称性是求具有对称性的高次代数式值的常用手段和方法.集中体现了整体观点，降维思想，对称意识等思想观点方法；解法二是递推法，独特，新颖.

1-2. 已知 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$，求 $\frac{x^3 + x + 1}{x^5}$ 的值.

（1990 年“五羊杯”初三数学竞赛题）

【分析一】 从条件入手，可得 $x^2 = x + 1$，整体代入可解.

【解法一】 $\because$ $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$

$\therefore$ $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ①

①平方，整理得.

$x + 1 = x^2$

$\therefore$ $x^3 + x + 1 = x^3 + x^2$

$= x^2(x + 1) = x^4$

$$\therefore \quad \frac{x^3+x+1}{x^5}=\frac{x^4}{x^5}=\frac{1}{x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【分析二】 若配上 x 的有理化因式 $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,则利用 x 与 y 的配对关系来解.

【解法二】 设 $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,则

$$x+y=1,xy=-1$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+x+1}{x^5}=\frac{x^3+(x+y)x-xy}{x^5}$$

$$=\frac{x^3+x^2}{x^5}=\frac{x+1}{x^3}$$

$$=\frac{x-xy}{x^3}=\frac{1-y}{x^2}$$

$$=\frac{x+y-y}{x^2}=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+x+1}{x^5}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

另解:设 $y'=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,则

$$xy'=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=1;x=\frac{1}{y'}$$

$$\therefore \quad 1+x=\frac{x}{y'},1+y'=x$$

$$\therefore \quad \frac{x^3+x+1}{x^5}=y'^5(x^3+x+1)=y'^5\left(x^3+\frac{x}{y'}\right)$$

$$=y'^2+y'^3=y'^2(1+y')=y'^2\cdot x=y'=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

【解法三】（用倒数解）

$$\because \quad \frac{1}{x}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore \quad 1+\frac{1}{x}=x$$

于是 $\dfrac{x^3+x+1}{x^5}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\cdot x$$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot x=\frac{1}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【评注】 解法一和三都是整体代入法，解法一是一般方法，解法三则巧妙地利用了 x 与它倒数的特殊关系.解法二既有配对的方法.又是常值换元法（如把 1 换成 $x+y$），这种“欲进先退”策略，有化繁为简的功效.

1－3. 计算：$(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)-(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)$.　　（1991 年天津市初中数学竞赛题）

【解法一】 原式 $=-[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\cdots+(100^2-99^2)]$

$=-[(2+1)(2-1)+(4+3)(4-3)+(6+5)(6-5)+\cdots+(100+99)(100-99)]$


哥白尼(波兰)

$$= -(3+7+11+\cdots+199)$$

$$= -\frac{50(3+199)}{2} = -5050.$$

【解法二】 利用公式：

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{4n^3-n}{3} \qquad ①$$

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2 = \frac{2}{3}n(2n+1)(n+1) \qquad ②$$

来解：

①－②，得：

$$[1^2+3^2+5^2+(2n-1)^2]-[2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2]$$

$$= \frac{4n^3-n}{3} - \frac{2}{3}n(2n+1)(n+1)$$

$$= \frac{4n^3-n}{3} - \frac{2}{3}(2n^3+3n^2+n)$$

$$= -2n^2-n$$

结合本题知，$n=50$.

$\therefore$ 原式 $=(1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2)-(2^2+4^2+6^2+\cdots+100^2)$

$$= -2\cdot 50^2-50 = -5050.$$

【评注】 解法一初中同学容易接受，适当分组利用平方差公式获解；解法二利用了两个数列求和公式获解.

1－4. 利用或不利用(※)式：

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}} = \left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right| \qquad (※)$$

计算：

$$\sqrt{1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}} - \frac{1}{1991}.$$

(1991 年第四届初中"祖冲之杯"数学邀请赛题)

【解法一】 因$\sqrt{1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}}=\sqrt{1990^2+\frac{1}{1^2}+\frac{1990^2}{(1990\cdot1+1)^2}}$，利用(※)式,它应等于

$$1990+1-\frac{1990}{1991}=1991-\frac{1990}{1991}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}}-\frac{1}{1991}$$

$$=\left(1991-\frac{1990}{1991}\right)-\frac{1}{1991}=1990.$$

【解法二】

$$\because\quad 1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}$$

$$=(1+1990)^2-2\times1990+\frac{1990^2}{1991^2}$$

$$=1991^2-2\times1991\times\frac{1990}{1991}+\left(\frac{1990}{1991}\right)^2$$

$$=\left(1991-\frac{1990}{1991}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{1+1990^2+\frac{1990^2}{1991^2}}-\frac{1}{1991}$$

$$=\left(1991-\frac{1990}{1991}\right)-\frac{1}{1991}=1990.$$

【评注】 (1)解法一运用(※)式;解法二运用配方法,两法繁简相宜.但解法一的运用(※)式,揭示了知识的内在联系;解法二属于通法.

(2)关于(※)式的证明如下:

证明:把(※)式右边平方: $\left(a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right)^2$

$$=a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}+2\left[\frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{b(ab+1)}\right].$$

$$\because \quad \frac{a}{b}-\frac{a^2}{ab+1}-\frac{a}{b(ab+1)}=\frac{a(ab+1)-a^2b-a}{b(ab+1)}=0,$$

$$\therefore \quad a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}=\left(a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right)^2,$$

两边开方即得(※)式,证毕.

1－5. 已知$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$,试求分式$\frac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值.

【解法一】 原式$=\frac{2x-4xy-2y+4xy+3xy}{x-2xy-y}$

$$=\frac{2(x-2xy-y)+7xy}{x-2xy-y}$$

$$=2+\frac{7xy}{x-2xy-y}$$

$$=2+\frac{7}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}$$

$$=2-\frac{7}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)+2}$$

当$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$时,

原式$=2-\frac{7}{3+2}=2-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$

【解法二】 $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3,$

$\therefore \frac{y-x}{xy}=3,$

即 $x-y=-3xy$

$\therefore$原式$=\frac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}=\frac{-6xy+3xy}{-3xy-2xy}$

$$=\frac{-3xy}{-5xy}=\frac{3}{5}$$

【解法三】 原式 $=\dfrac{(2x+3xy-2y)\div xy}{(x-2xy-y)\div xy}$

$$=\frac{\dfrac{2}{y}+3-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{y}-2-\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{-2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)+3}{-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)-2},$$

$\therefore$ 当 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$ 时

原式 $=\dfrac{-2\times3+3}{-3-2}=\dfrac{3}{5}$

【评注】 上述三种解法各有千秋，解法一和解法三均从所求式入手，但其思路稍有不同，解法一运用添减项的方法，而解法三直接把分子、分母同除以 xy；解法二从已知条件式入手，直接代入，比较三种解法，解法二较为简洁。

1－6. 若 $x\neq0$，则 $\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$ 的最大值是____.

（1992 年全国初中联赛试题）

【解法一】 $\dfrac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+x^4}+\sqrt{1+x^4}}$$

$$=\frac{x}{1\times x\left(\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\right)}$$

$$=\frac{x}{1\times x\left(\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}\right)}.$$

故当 $x=\frac{1}{x}>0$,即 $x=1$ 时,原式取最大值$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

【解法二】 当 $x>0$ 时,$\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}-\sqrt{1+x^4}}{x}$

$$=\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}-0\right)^2+(0-\sqrt{3})^2}-\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}-0\right)^2+(0-\sqrt{2})^2}.$$

令 $t=x-\frac{1}{x}$,则

原式 $=\sqrt{(t-0)^2+(0-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(t-0)^2+(0-\sqrt{2})^2}$. (※)

由两点间的距离公式可知,(※)式的几何意义是:动点 $P(t,0)$到两定点 $A(0,\sqrt{3})$,$B(0,\sqrt{2})$距离之差(如图 1-1).

因 $AB\geqslant PA-PB$,且 $AB=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.故点 P 在原点,即 $t=0$ 时,$PA-PB$ 取最大值$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

而当 $t=0$ 时,$x-\frac{1}{x}=0$ 得 $x=1$,即当 $x=1$ 时,原式取最大值$\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

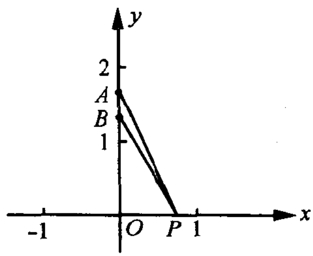

图 1-1

【评注】 解法一是代数法,解法二是数形结合法,两法均佳.而运用数形结合法求函数最值的关键是想办法把数的关系转化为形的表示,即把所给函数表达式化为具有一定几何意义的代数表达式.

1-7. 当 x 变化时,分式 $\frac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$ 的最小值是______.

(1993 年全国初中数学联赛题)

【分析一】 $\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}=6-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$. 只须求出 x^2+2x+2 的最小值即可.

【解法一】 $\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}=6-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$.

令 $y=x^2+2x+2$，则 y 具有最小值.

$$\frac{4\times1\times2-2^2}{4}=1$$

$\therefore$ $\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ 有最大值 2，$-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ 有最小值 -2，从而 $6-\dfrac{2}{x^2+2x+2}$ 有最小值 4.

即 $\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}$ 的最小值是 4.

【分析二】 用“判别式法”来解.

【解法二】 设 $y=\dfrac{3x^2+6x+5}{\frac{1}{2}x^2+x+1}=\dfrac{6x^2+12x+10}{x^2+2x+2}$.

将它变形，整理为 x 为主元的方程，得：

$$(y-6)x^2+(2y-12)x+2y-10=0 \qquad ①$$

方程①必有实数根.

当 $y=6$ 时，方程①无解. 于是，必有 $y\neq6$.

当 $y\neq6$ 时，方程①是二次方程，此时

$$\Delta=4(y-6)^2-4(y-6)(2y-10)$$
$$=4(y-6)(-y+4)\geqslant0$$

解之，得 $4\leqslant y\leqslant6$

而 $y\neq6$

$\therefore$ $4\leqslant y<6$.

而当 $y=4$ 时，代入方程①，得，$x=-1$，此时 $\frac{1}{2}x^2+x+1\neq 0$.

故 y 的最小值是 4，即原分式的最小值是 4.

【评注】 对于分子分母是二次三项式的分式求最值的题型，判别式法是常用方法.由于此题分式较特殊，故有解法一的简便方法.

1－8. 请你找出 6 个互异的自然数，使它们同时满足：

(1)6 个数中任两个都互质；

(2)6 个数中任取 2 个，3 个，4 个，5 个，6 个数之和都是合数.

并简述你选择的数适合于条件的理由.

（1993 年北京市数学竞赛初二复赛题）

【分析一】 构造六个互异的自然数.

$$a_i=i\times 60+1 \qquad (i=1,2,3,4,5,6).$$

先证其满足条件(1)，再证其满足条件(2).

【解法一】 我们考虑到 1,2,3,4,5,6 这 6 个数的最小公倍数是 60，因而这样来选择六个互异的自然数.

设 $a_i=i\times 60+1 \qquad (i=1,2,3,4,5,6)$.

先证，任两个 a_i、a_j 都互质(其中 $1\leqslant i<j\leqslant 6$)

用反证法.假设 $(a_i,a_j)=d>1$，则 $d\mid a_i$，$d\mid a_j$.所以 $d\mid(a_j-a_i)$，即 $d\mid(j-i)\times 60$.

而 $j-i=1,2,3,4,5$，则 d 是 $3\times4\times5\times(j-i)$ 的因子中的一个，且 $d>1$.

但从 $a_i=i\times 60+1$ 可知 $d\nmid a_i$，这与 $(a_i,a_j)=d$ 矛盾，故 $(a_i,a_j)=1$.

由 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5、a_6 的构成可知，其中任两个数之和被 2 整除，任三个数之和被 3 整除，任四个数之和被 4 整除，任五个数之和被 5 整除，任六个数之和被 6 整除.

所以从 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5、a_6 这六个数中任取 2 个,3 个,4 个,5 个,6 个数之和都是合数.

【分析二】 显然,六个互异的质数必满足条件(1),再从中挑选满足条件(2)的六个质数.

【解法二】 显然,当这六个数均为质数时,必满足条件(1).又因为当这六个数奇偶数性相同时,则必满足从中任取 2 个,4 个或 6 个数之和为合数.所以这六个数可以为六个奇质数.下面我们考虑怎样才能使从中任取 3 个或 5 个数之和均为合数:

①若这六个数被 3 除同余时,从中任取 3 个数之和必为 3 的倍数,且大于 3,即为合数.

②若这六个数被 5 除同余时,从中任取 5 个数之和必为 5 的倍数,且大于 5,即为合数.

综合①、②所述,即当这六个数被 15 除同余时,满足从中任取 3 个或 5 个数之和为合数.

综上所述,当这六个数为 6 个被 15 除同余的奇质数时满足原命题的条件,例如取 31,61,151,181,211,241 这六个奇质数.

【评注】 本题是一个构造性的命题,必须熟练地掌握整数的有关知识,找出满足条件(1),(2)的 6 个互异的自然数来.两种解法构思均较巧妙.

1-9. 已知 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个实数根,则 $\alpha^4+3\beta=$________. (1993 年江苏省初中数学竞赛题)

【解法一】 $\because$ α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根,由根的意义和根与系数关系得:

$$\alpha+\beta=1,\alpha^2-\alpha-1=0.$$

$$\because\quad \alpha^2=\alpha+1,$$

$$\alpha^4=(\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1=3\alpha+2.$$

$$\therefore\quad \alpha^4+3\beta=3\alpha+2+3\beta=3(\alpha+\beta)+2=5.$$

【解法二】 由解法一可知

$\alpha+\beta=1, \alpha^2-\alpha-1=0.$

$\therefore \quad \beta=1-\alpha.$

$\alpha^4+3\beta=\alpha^4+3(1-\alpha)=\alpha^4-3\alpha+3$

$=(\alpha+1)^2-3\alpha+3$

$=\alpha^2+2\alpha-3\alpha+4$

$=(\alpha^2-\alpha-1)+5=5.$

【解法三】 由解法一可知

$\alpha+\beta=1, \alpha^2-\alpha-1=0.$

$\therefore \quad \beta=1-\alpha$

$\alpha^4+3\beta=\alpha^4-3\alpha+3$

$=(\alpha^2+\alpha+2)(\alpha^2-\alpha-1)+5=5.$

【评注】 上述三种解法的共同点是:由一元二次方程根的意义和根与系数关系,得:$\alpha+\beta=1, \alpha^2-\alpha-1=0$.在此前提下变换不同角度,得到不同方法:解法一是先用 α 的代数式表示 α^4,再利用 $\alpha+\beta=1$ 获解;解法二直接利用 $\alpha^2-\alpha-1=0$;解法三利用因式分解法.

1-10. 如果 $a=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}-\frac{1}{8}\sqrt{2}$,求表达式 $a^2+\sqrt{a^4+a+1}$的值.

(1993 年第四届"希望杯"数学邀请赛题)

【解法一】 由已知得

$$a+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}},$$

两边平方,得

$$a^2+\frac{1}{4}\sqrt{2}a+\frac{1}{32}=\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{32}.$$

即 $\quad a^2=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a) \qquad ①$

黎曼(德国)

$$a^4=\frac{1}{8}(1-a)^2 \qquad ②$$

$\therefore \quad a^2+\sqrt{a^4+a+1}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\sqrt{\frac{(1-a)^2}{8}+a+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\sqrt{\frac{1}{8}(1-2a+a^2+8a+8)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(a+3)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a+a+3) \qquad (\because \quad a>0)$$

$$=\sqrt{2}.$$

【解法二】 由已知得

$$a+\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}},$$

平方,得 $\quad a^2+\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{1}{32}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{32},$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{4}a=-a^2+\frac{\sqrt{2}}{4}.$

两边乘以 $2\sqrt{2}$,得 $\quad a=-2\sqrt{2}a^2+1,$

两边加上 a^4+1,得 $\quad a^4+a+1=a^4-2\sqrt{2}a^2+2.$

即 $\quad a^4+a+1=(\sqrt{2}-a^2)^2.$ 显然 $\quad 0<a<1, 0<a^2<1.$

$\therefore \quad \sqrt{2}-a^2>0, \sqrt{a^4+a+1}=\sqrt{2}-a^2.$

$\therefore \quad a^2+\sqrt{a^4+a+1}=\sqrt{2}.$

【评注】 解法一的关键是运用降次的方法,把 a^2 表示成 a 的一次式,把 a^4 表示成 a 的二次式,从而使运算过程简洁;解法二是巧妙运用配方法.两法均为妙法.

1－11． 设 a_1,a_2,b_1,b_2 都是实数，$a_1\neq a_2$，且有

$$(a_1+b_1)(a_1+b_2)=(a_2+b_1)(a_2+b_2)=1,$$

证明：$(a_1+b_1)(a_2+b_1)=(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1$.

（1993 年第 6 届“祖冲之杯”数学邀请赛题）

【证法一】 已知条件意味着二次方程 $(x+b_1)\cdot(x+b_2)=1$ 有两个实根，这两个实根是 $x=a_1,x=a_2$.

显然上述方程与 $(x-a_1)(x-a_2)=0$ 是同一个方程，因此有

$$(x+b_1)(x+b_2)-1=(x-a_1)(x-a_2). \qquad (※)$$

令 $x=-b_1$，代入(※)得 $(a_1+b_1)(a_2+b_1)=-1$.

令 $x=-b_2$，代入(※)得 $(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1$.

从而 $(a_1+b_1)(a_2+b_1)=(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1$.

【证法二】 把已知条件 $(a_1+b_1)(a_1+b_2)=(a_2+b_1)(a_2+b_2)$ 展开后，得

$$a_1^2+a_1b_2+a_1b_1+b_1b_2=a_2^2+a_2b_2+a_2b_1+b_1b_2$$

整理后，得

$$(a_1-a_2)(a_1+a_2+b_1+b_2)=0.$$

$\because \quad a_1\neq a_2,\ \therefore \quad a_1+a_2+b_1+b_2=0.$

于是 $(a_1+b_1)(a_2+b_1)+1$

$$=(a_1+b_1)(a_2+b_1)+(a_1+b_1)(a_1+b_2)$$

$$=(a_1+b_1)(a_1+a_2+b_1+b_2)=0.$$

即 $(a_1+b_1)(a_2+b_1)=-1$,

同理 $(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1$.

【评注】 证法一运用方程思想得到(※)式，再运用赋值法令 $x=-b_1,x=-b_2$，构思精妙，整个思路和解题过程恰如一首优美的小诗，韵味隽永；解法二运用因式分解法获得解答，亦自然简洁.

1-12. 证明恒等式：

$$\operatorname{ctg}10° - 4\cos 10° = \sqrt{3} \qquad (※)$$

（1993 年俄国圣彼得堡数学奥林匹克试题）

【证法一】 把(※)式两边乘以 $\sin 10°$，并注意$\sqrt{3} = 2\cos 30°$，得

$$\cos 10° - 2\sin 20° = 2\cos 30° \cdot \sin 10°$$
$$= \sin 40° - \sin 20°.$$

即原恒等式(※)等价于恒等式

$$\sin 40° + \sin 20° = \cos 10° \qquad ①$$

我们只要证明①式成立就可以了.

$$\sin 40° + \sin 20° = 2\sin\frac{40° + 20°}{2} \cdot \cos\frac{40° - 20°}{2}$$
$$= 2\sin 30° \cdot \cos 10°$$
$$= \cos 10°.$$

$\therefore$ ①式成立.故原命题成立.

【证法二】 作直角$\triangle ABC$，使$\angle A = 30°$，$\angle C = 90°$，$BC = 1$，则易知 $AC = \sqrt{3}$，$AB = 2$，如图 1-2，

现以 AC 为一边，做出一个 $10°$的角，设另一边交 BC 于 D，再过 B 作 AC 的平行线交 AD 的延长线于 E，

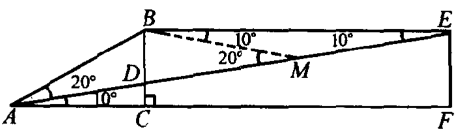

图 1-2

并自 E 作 $EF \perp AC$ 的延长线于 F，则又知 $EF = 1$，$\angle AEB = 10°$，

$$\therefore \quad AF = \operatorname{ctg}10° \qquad ①$$

另一方面，在 $Rt\triangle BDE$ 中，有

$$BE = DE \cdot \cos 10° \qquad ②$$

为计算 DE，再在 $Rt\triangle BDE$ 中，取斜边 DE 的中点 M，则有 $DE = 2BM$，且$\angle BMD = 20° = \angle BAD$，

$\therefore \quad BM = BA = 2$， $\qquad \therefore \quad DE = 4$.