# 帮你学习高中代数

李毓佩

河北人民出版社

# 帮你学习高中代数

李 毓 佩

河 北 人 民 出 版 社

一九八三年·石家庄

**帮你学习高中代数**

李毓佩

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 7 3/8印张 149,000字 印数：1—64,660 1983年11月第1版
1983年11月第1次印刷　统一书号：7086·1133　定价：0.63元

# 前　　言

本书是根据中学数学教学大纲，为高中学生编写的。通过数学故事、数学家轶事、数学游戏、历史名题等，以生动活泼的语言引入数学概念，以求达到启发学生的思维、开扩眼界、培养学习兴趣、热爱科学的目的。

全书共分六章：集合和函数、三角函数和反三角函数、数列、极限和数学归纳法、行列式及线性方程组、不等式和复数、排列、组合和二项式定理。各章均包括基础知识、例题和自我检查。

为了帮助青年自学高中代数，对每章的重要概念都进行了细致的分析，指明要点。例题的安排注意了由浅入深，同时对每章典型例题都做了详尽的解答，并指出易犯的错误。各章后面留有一定数量的自我检查题，书末附有答案，便于检查学习效果。

本书可供高中数学教师参考。

由于编者水平所限，错误在所难免，请广大读者批评指正。

编者

一九八三年

# 目　　录

# 一、集合和函数

## 从找帽子的游戏谈起

现在来做一次找帽子的游戏：

我在纸上先画出 14 个黑点（图 1），这 14 个黑点代表了 3 只兔子、1 只松鼠、3 只蝉、3 只猫、1 只狗、还有一位老大爷、一位小朋友和他的帽子。我们要找出来哪个点代表帽子？

如果单凭这 14 个黑点是无法找到帽子的，还需要画几个圈。

那末先画一个红圈、红圈里的黑点都代表四条腿的动物（图 2）。

显然，兔子、松鼠、猫、狗都在红圈里面，而蝉、老大

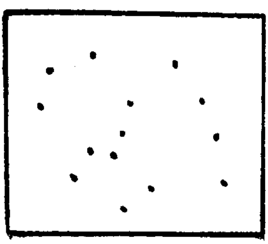


图 1

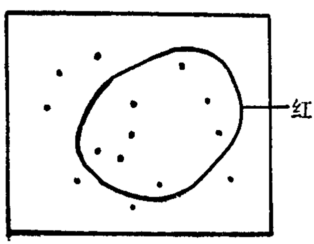



图 2

爷、小朋友以及小朋友的帽子在红圈的外面。

再画一个蓝圈（图 3)，蓝圈里面的点子都代表会爬树的。

在蓝圈里都应该是什么呢？有松鼠、猫、蝉和小朋友。现在留在红圈和蓝圈外面的只有两个点子了，一个代表老大爷，一个代表帽子。

要想确定哪个点子代表帽子，就必须再画一个绿圈（图 4)，绿圈里的点代表食肉的。

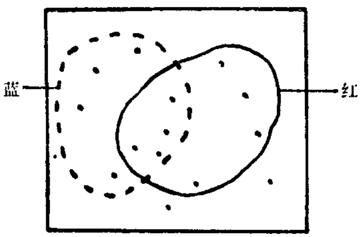


图 3

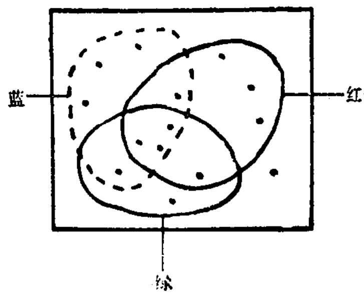


图 4

在绿圈里的有狗、猫、小朋友和老大爷。这时就可以知道，剩在红、蓝、绿三个圈外面的那个点就代表帽子了。这个找帽子的游戏，如果从数学角度来讲，是在找一个一个的集合。

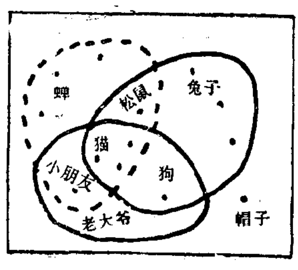


图 5

什么是集合呢？把具有一定共同特征的一类事物的全体叫做集合。把组成集合的每一

个个体叫做集合的元素．习惯上，用大写的 $A$、$B$、$C$……表示集合；用小写的 $a$、$b$、$c$……表示集合的元素．

如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，写成 $a \in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，写成 $a \notin A$ 或 $a \overline{\in} A$．

上面找帽子游戏实际就是在找集合，开始画了14个黑点子让你找帽子，你是找不到的．可是画出三个圈以后，很快就找到了代表帽子的点．其奥秘就在这三个圈上．

红圈里的点都代表四条腿的动物．“四条腿的动物”是红圈里的点的共同特征，这样红圈里的点就构成了一个集合 $A$．在集合 $A$ 里有8个点子，也就是说有8个元素．同样蓝圈里的8个点子也构成一个集合 $B$，集合 $B$ 中元素的特征是“会爬树的”．绿圈里的6个黑点子构成了集合 $C$，集合 $C$ 中元素的特征是“爱吃肉”．

在数学和日常生活中见到的集合是很多的．比如1，2，3，4就构成一个集合，这个集合中的元素是有限的，只有四个；全体自然数1，2，3……也构成了一个集合，叫自然数集合．自然数集合中的元素有无穷多个．一个村的所有居民也构成一个集合．一户养的鸡也构成一个集合．

表示集合的方法，常见的有两种：

（1）列表法．就是把集合中的元素一一列举出来．比如由1，2，3，4构成的集合，可以表示为

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

王家养了三只鸡：花鸡、白鸡、黑鸡．它们也构成一个集合，可以表示为

{（王家的）花鸡、白鸡、黑鸡}；

(2) 描述法．就是用描述出集合元素公共特征的方法来表示这个集合．比如，自然数集合可以表示为

{自然数}．

大辛村的所有居民构成一个集合，这个集合可以表示为

{大辛村的居民}

集合与集合也会有一定的关系．如果仔细观察最后画的一个图，三个圈互相连在一起的．有三个点仅仅属于红圈，有四个点既属于红圈又属于蓝圈，还有三个点同时属于三个圈，最后有一个点在所有圈的外面．

那么这些点具有的性质显然不能一样．仅属于红圈的三个点，它们只具备"四条腿动物"这个特征，不具备"会爬树"和"爱吃肉"的特征，因此，这三个点表示了三只兔子．既属于蓝圈又属于红圈的四个点，它们具备"四条腿"和"会爬树"这样双重特性，这四个点又构成一个新集合 $D$

$D=${松鼠，三只猫}．

同时属于三个圈的点有三个，这三个点具备有"四条腿"、"爱吃肉"和"会爬树"这三个特征．这三个点也构成了一个新集合 $E$

$E=${三只猫}．

前面曾用 $A$、$B$、$C$ 表示属于红圈、蓝圈、绿圈里的点．集合 $D$ 是由集合 $A$ 的一部分元素构成的，把集合 $D$ 叫做集合 $A$ 的子集，记作 $D\subset A$．同样集合 $D$ 也是集合 $B$ 的子集，$D\subset B$．

数学上，把由同时属于集合 $A$ 和集合 $B$ 的一切元素组成的集合 $D$，叫做集合 $A$ 和集合 $B$ 的交集，记作 $D=A\cap B$，

把属于集合 $A$ 或者集合 $B$ 的一切元素组成的集合 $F$，叫做集合 $A$ 和集合 $B$ 的并集，记作 $F=A\cup B$。

在找帽子游戏中

$$D=A\cap B,$$

也就是

{松鼠、三只猫}={四条腿动物}∩{会爬树}。

$$E=(A\cap B)\cap C,$$

也就是

{三只猫}={四条腿动物}∩{会爬树}∩{爱吃肉}。

数学中还常用到补集的概念。什么是补集呢？

在以上研究的几个集合中，可以看成是某一个给定集合的子集。比如表示红圈、蓝圈、绿圈内点的集合 $A$、$B$、$C$，都是由 14 个黑点所构成集合的子集。把这个给定集合叫做全集，用符号 $I$ 表示。在找帽子游戏中 $I$={14 个黑点}。集合 $A$ 是全集 $I$ 的一个子集，$A\subset I$。把 $I$ 中不属于 $A$ 的元素组成的集合，叫做集合 $A$ 的补集，记作 $\bar{A}$。

可以用补集的概念表示帽子：

$$\{\text{小朋友的帽子}\}=\overline{(A\cup B)\cup C}.$$

也就是说小朋友的帽子是集合 $A$、$B$、$C$ 并集的补集。

# 集合与韦恩图

集合是具有一定共同特征的一类事物全体。学习集合要注意两点：

1．集合是指这一类事物的全体，而不是指其中的个别

事物。比如$A=\{a:a$是小于5的正整数$\}$，集合$A$是指由1，2，3，4这四个数组成的全体，而不是1或3这个别的数；

2．集合中包含的元素是确定的，可以判断一个事物属于还是不属于这个集合。比如集合$A$, $A=\{x:x^2-5x+4=0\}$表示二次方程$x^2-5x+4=0$所有的根组成的集合。给一个数1，判断它是不是属于集合$A$？可以把1代入二次方程的左端$1^2-5\times1+4=0$，满足原方程，因此，1是属于集合$A$的。再找一个数2，由于$2^2-5\times2+4\neq0$，2不属于集合$A$。

以上两个特性可以叫做集合的整体性和可判断性。

为了使用方便，把不含任何元素的集合叫做空集，用符号$\phi$表示．空集$\phi$与数$O$相似，比如$0\times5=0$，$\phi\cap A=\phi$；$0+5=5$，$\phi\cup A=A$。

0、$\{0\}$、$\phi$三个符号的含意是不一样的．0是一个数，可以做为某个集合的一个元素，比如$A=\{0, 1, 2, 3\}$中就有一个元素0；符号$\{0\}$指的是只含有一个元素0的集合；符号$\phi$指的是不含任何元素的集合，比如$B=\{$内角和大于180°的三角形$\}$，由于在我们学习的平面几何中是不存在这样的三角形，所以集合$B$是空集$\phi$。

交集和并集（$\cap$、$\cup$）与平时我们使用的乘和加相似．早在三百年前，就有数学家用符号$\cap$表示相乘，用符号$\cup$表示相加．后来转用到集合中作为交集和并集的专用符号．学会求交集，并集是本章的一个重点。

【例1】

1．设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，

求 $A\cup B$，$A\cap B$。

**解**：$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$；

$A\cap B=\{4, 5\}$。

2．设 $A=\{x: -3<x<2\}$，$B=\{x: 1<x<3\}$，

求 $A\cup B$，$A\cap B$。

**解**：$A\cup B=\{x: -3<x<3\}$；

$A\cap B=\{x: 1<x<2\}$。

3．写出不等式 $x^2+2x-3<0$ 的解的集合 $A$。

**解**：由 $x^2+2x-3<0$ 得 $(x+3)(x-1)<0$。

$$\begin{cases}x+3>0,\\ x-1<0.\end{cases}\qquad \begin{cases}x>-3,\\ x<1.\end{cases}\qquad \text{即} -3<x<1;$$

$$\begin{cases}x+3<0,\\ x-1>0.\end{cases}\qquad \begin{cases}x<-3,\\ x>1.\end{cases}\qquad \text{无解.}$$

$$A=\{x: -3<x<1\}.$$

4．设 $I=\{$小于10的正整数$\}$，$A=\{1, 2, 3, 4\}$，

$B=\{3, 4, 5, 6, 7\}$。

求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A\cap B}$。

**解**：$\overline{A}=\{5, 6, 7, 8, 9\}$；

$\overline{B}=\{1, 2, 8, 9\}$；

$A\cap B=\{3, 4\}$；

$\overline{A\cap B}=\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

5．设 $A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$。

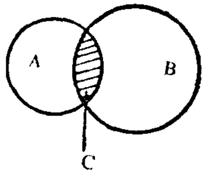
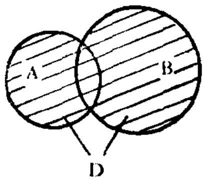
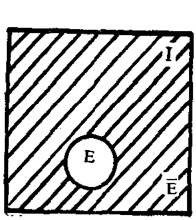
求　$A\cup B$，$A\cap B$。

**解**：$A\cup B=\{实数\}$；

$A\cap B=\phi$。

以上所举集合的运算是十分重要的，为了直观了解这些运算，可以把它们表示成一种专门的直观图，叫做韦恩图.

用圆圈表示集合，两个集合的交集与并集可以用斜线表示出来。比如：

| 集合 | 韦恩图 |
| --- | --- |
| 交集　$C=A\cap B$。 |   图 6 |
| 并集　$D=A\cup B$。 |   图 7 |
| 余集　$\overline{E}$。 |   图 8 |

下面画几个韦恩图．用集合 $A$ 和 $B$，以及它俩的交、并、余的符号来表示图中画有直网格的部分：

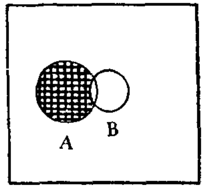



图 9

如果一时看不出该图如何表示，可以采用如下的办法．先找两张同样大小的纸，在一张纸上画出用竖线表示的集合 $A$，在另一张纸上画用横线表示的集合 $\overline{B}$．然后把两张纸合在一起放在灯光下一照，有直网格的部分就是题目给的部分，它恰好是集合 $A$ 与集合 $\overline{B}$ 的交集．由此可知，有直网格的部分是 $A\cap\overline{B}$。

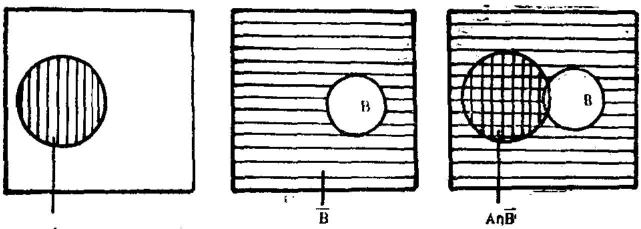



图 10

除了用 $A\cap\overline{B}$ 表示外，直网格部分还可以表示为 $A\cap\overline{(A\cap B)}$．可看下面重叠过程：

1.

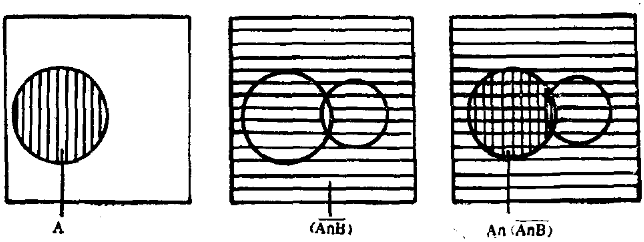



图 11

2.

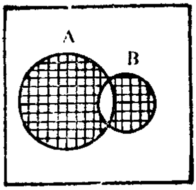



图 12

$(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$

或 $(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$。

3.

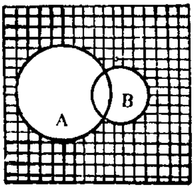



图 13

$\overline{A\cup B}$

或$\overline{A}\cap\overline{B}$。

## 函数概念的由来

最早提出函数概念的是十七世纪德国数学家莱布尼兹，莱布尼兹最初用函数一词表示幂，比如 $x$，$x^2$，$x^3$ 都叫函数。后来，他又用函数一词表示在直角坐标系中曲线上一点的横坐标、纵坐标等等。

把函数理解为幂的同义词，可以看成是函数的代数起源；用函数表示与几何有关的量，可以看作函数的几何起源。

进入十八世纪，数学家把函数概念进行了扩张：

1718 年瑞士数学家贝努利把函数定义为“由某个变量及