



附：高等数学（工专）自学考试大纲

# 高等数学（工专）下册

组编 / 全国高等教育自学考试指导委员会  
主编 / 陆庆乐 马知恩

全国高等教育自学考试指定教材（公共课程）

月出版社

全国高等教育自学考试指定教材

公共课程

# 高等数学

(下册)

(附：高等数学自学考试大纲)

全国高等教育自学考试指导委员会 组编

陆床夔 马 恩

高等教育出版社

## (京) 112 号

本书系全国高等教育自学考试指导委员会委托机械类专业委员会组编的自学考试的教材。

本书针对自学考试缺少教师进行系统传授的特点，下册在内容阐述上注意启发引导，揭示概念的实质。书中例题较多，注意了解题方法的训练。每节后配有思考题与运算题，每章有综合性练习题，并拟就一份自我检查题，以测试自学的效果。

本书每章后有小结，起学习指导作用。

本书分上下两册出版，下册分成两篇五章，内容是空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程和无穷级数。

本书除供自学考试使用外，函授大学、职工大学，以及高等学校专科班的学生也可使用。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 下 / 陆庆乐, 马知恩编. —北京: 高等教育出版社, 1998 重印

ISBN 7-04-002657-0

I. 高… II. ①陆… ②马… III. 高等数学—高等学校—自学考试—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (95) 第 23111 号

高等数学 (下)

陆庆乐 马知恩 编

---

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

印 刷 北京市鑫鑫印刷厂

开 本 880×1230 1/32

印 张 9

版 次 2000年7月第2版

字 数 200 000

印 次 2000年7月第1次印刷

印 数 001-20100

定 价 10.60元

---

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请在当地教材供应部门调换。

**版权所有 侵权必究**

## 组编前言

当您开始阅读本书时,人类已经迈入了二十一世纪。

这是一个变幻难测的世纪,这是一个催人奋进的时代。科学技术飞速发展,知识更替日新月异。希望、困惑、机遇、挑战,随时随地都有可能出现在每一个社会成员的生活之中。抓住机遇,寻求发展,迎接挑战,适应变化的制胜法宝就是学习——依靠自己学习、终生学习。

作为我国高等教育组成部分的自学考试,其职责就是在高等教育这个水平上倡导自学、鼓励自学、帮助自学、推动自学,为每一个自学者铺就成才之路。组织编写供读者学习的教材就是履行这个职责的重要环节。毫无疑问,这种教材应当适合自学,应当有利于学习者掌握、了解新知识、新信息,有利于学习者增强创新意识、培养实践能力、形成自学能力,也有利于学习者学以致用、解决实际工作中所遇到的问题。具有如此特点的书,我们虽然沿用了“教材”这个概念,但它与那种仅供教师讲、学生听,教师不讲、学生不懂,以“教”为中心的教科书相比,已经在内容安排、形式体例、行文风格等方面都大不相同了。希望读者对此有所了解,以便从一开始就树立起依靠自己学习的坚定信念,不断探索适合自己的学习方法,充分利用已有的知识基础和实际工作经验,最大限度地发挥自己的潜能达到学习的目标。

欢迎读者提出意见和建议。

祝每一位读者自学成功。

全国高等教育自学考试指导委员会

1999年10月

# 目 录

## 第四篇 多元函数微积分学简介

第七章 空间解析几何	1
7—1 空间直角坐标系	1
1. 空间直角坐标系	1
2. 空间点与数组的一一对应	2
3. 两点间的距离公式	3
7—2 方向余弦与方向数	5
1. 方向角与方向余弦	5
2. 方向数	6
3. 两直线的夹角	8
4. 两直线平行、垂直的条件	9
7—3 平面与空间直线	11
1. 平面及其方程	11
2. 直线及其方程	14
3. 平面、直线间的平行垂直关系	17
7—4 曲面与空间曲线	21
1. 曲面的方程	21
2. 空间曲线的方程	22
3. 柱面	23
4. 旋转面	24
5. 空间曲线在坐标面上的投影	27
7—5 二次曲面举例	29
结束语	35
自我检查题	38
总习题	39
习题答案	41
第八章 多元函数微分学	46
8—1 多元函数的极限与连续	46

1.	多元函数的概念	46
2.	二元函数的极限	48
3.	二元函数的连续性	50
8—2	偏导数及其几何意义	52
1.	偏导数的定义	52
2.	偏导数的求法	54
3.	高阶偏导数·求导次序的无关性	56
8—3	全微分	58
1.	全微分定义	60
2.	全微分在误差估计中的应用	62
8—4	多元复合函数的求导法	63
1.	链导公式	63
2.	全导数	68
3.	* 隐函数的求导公式	72
8—5	多元函数的极值	74
1.	二元函数极值判定的充分条件	76
2.	多元函数的最大、最小值问题	77
	结束语	81
	自我检查题	86
	总习题	87
	习题答案	89
<b>第九章</b>	<b>多元函数积分学</b>	<b>95</b>
9—1	二重积分的概念及性质	95
1.	曲顶柱体的体积	95
2.	二重积分的定义	96
3.	二重积分的性质	97
9—2	二重积分的计算法	99
1.	直角坐标系中的计算法	99
2.	极坐标系中的计算法	109
9—3	三重积分及其计算法	115
1.	直角坐标系中三重积分的计算法	116
2.	柱面坐标系中三重积分的计算法	120

* 9—4 重积分在力学中的应用 .....	125
1. 平面与空间物体的质心 .....	125
2. 平面与空间物体的惯性矩 .....	128
结束语 .....	132
自我检查题 .....	137
总习题 .....	139
习题答案 .....	141

## 第五篇 常微分方程与无穷级数

<b>第十章 常微分方程</b> .....	146
10—1 基本概念 .....	146
10—2 可分离变量的一阶方程与齐次方程 .....	151
1. 可分离变量的一阶方程 .....	151
2. 齐次方程 .....	153
10—3 一阶线性方程 .....	156
10—4 一阶方程应用举例 .....	161
10—5 可降阶的高阶方程 .....	168
10—6 线性微分方程解的结构 .....	173
1. 线性相关与线性独立 .....	173
2. 线性非齐次方程 .....	175
10—7 二阶常系数齐次线性方程的解法 .....	177
10—8 二阶常系数非齐次线性方程的解法 .....	181
结束语 .....	187
自我检查题 .....	192
总习题 .....	193
习题答案 .....	195
<b>第十一章 无穷级数</b> .....	201
11—1 常数项级数的基本概念及其主要性质 .....	201
1. 基本概念 .....	201
2. 主要性质 .....	203
11—2 正项级数及其审敛准则 .....	207

11—3 任意项级数的收敛问题 .....	215
1. 莱布尼兹准则 .....	215
2. 绝对收敛与条件收敛 .....	217
11—4 幂级数及其性质 .....	220
1. 幂级数的收敛问题 .....	221
2. 幂级数的审敛准则 .....	222
3. 幂级数的性质 .....	225
11—5 函数的幂级数展开式 .....	228
1. 泰勒级数 .....	229
2. 几个初等函数的麦克劳林展开式 .....	231
3. 函数展开成幂级数举例 .....	234
<b>结束语</b> .....	237
<b>自我检查题</b> .....	240
<b>总习题</b> .....	242
<b>习题答案</b> .....	243
<b>高等数学自学考试大纲 (下)</b> .....	247



## 第四篇 多元函数微积分学简介

### 第七章 空间解析几何

正像平面解析几何对一元函数微积分学的学习是不可缺少的一样,空间解析几何对多元函数微积分学的学习也是必不可少的,这就是我们把这一章放在本篇之首的原因.在这一章中,我们将首先建立空间直角坐标系概念,在此基础上,阐明空间曲面与曲线的一般概念.本章着重讨论空间平面与直线的各种方程以及空间直线与平面之间的相互关系.最后介绍一些空间的特殊曲面.

#### 7—1 空间直角坐标系

平面解析几何是我们已经熟悉的,所谓解析几何就是用解析的、或者说代数的方法来研究几何问题.代数与几何本来是互不相关的,促成它们相互结合的是坐标法.代数运算的基本对象是数,几何图形的基本元素是点.正像我们在平面解析几何学中所见到的那样,通过平面直角坐标系,使平面上的点与一对有序实数之间建立了密切的一一对应关系.在此基础上,引入运动的观点,使平面曲线和方程对应,从而使我们运用代数方法去研究几何问题有了可能.

同样,要运用代数的方法去研究空间的图形——曲线与曲面,就必须首先建立空间内点与数组之间的对应关系.

**1. 空间直角坐标系** 在空间作三条相互垂直且相交于  $O$  点的数轴  $Ox$ ,  $Oy$  和  $Oz$ , 它们有相同的长度单位, 它们的交点  $O$  称为坐标原点(图 7.1).  $Ox$  称为横轴或  $x$  轴, 通常取从后到前的

方向作为正向； $Oy$  称为纵轴或  $y$  轴，通常取从左到右的方向作为正向； $Oz$  称为竖轴或  $z$  轴，通常取从下到上的方向作为正向。 $Ox$ ， $Oy$ ， $Oz$  统称为坐标轴。三个坐标轴两两分别决定了三个互相垂直的平面： $xOy$ ， $yOz$ ， $zOx$ ，称为坐标平面。这三个平面把空间分成了八个部分，称为八个卦限。各卦限逐一编号以资区别：我们把在  $xOy$  坐标平面之上、 $yOz$  坐标平面之前、 $zOx$  坐标平面之右的卦限称为第一卦限；在  $xOy$  坐标平面之上的其余三个卦限，按逆时针方向依次称为第二、第三、第四卦限；在  $xOy$  坐标平面的下方，在第一卦限下面的卦限称为第五卦限，其余在第二、三、四卦限下面的分别称为第六、七、八卦限。

**2. 空间点与数组的一一对应** 设  $P$  为空间的任一点(图 7.2)，过  $P$  点作三个平面分别与  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴垂直，它们与三个坐标轴的交点分别是  $Q$ ， $R$ ， $S$ ，与其相对应的实数分别为  $x$ ， $y$ ， $z$ 。于是，对于空间的每一点  $P$ ，通过上述方法必有唯一的一组有次序的实数  $x$ ， $y$ ， $z$  与之对应。

反之，任给一组有序实数  $x$ ， $y$ ， $z$ 。我们可以先分别在  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴上找到对应的点  $Q$ ， $R$ ， $S$ ；再过  $Q$ ， $R$ ， $S$  分别作  $x$  轴， $y$  轴， $z$  轴的垂直平面，这三个垂直平面必相交于唯一的一点  $P$ 。

这样，通过直角坐标系，我们在空间的点的集合与有序的实数组  $x$ ， $y$ ， $z$  的集合之间建立了一一对应的关系。实数  $x$ ， $y$ ， $z$  称为  $P$  点的坐标，记作  $(x, y, z)$ 。 $x$ ， $y$ ， $z$  分别称为  $P$  点的

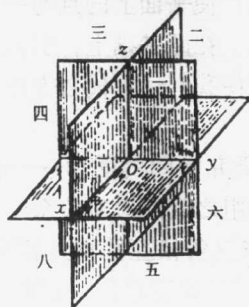


图 7.1

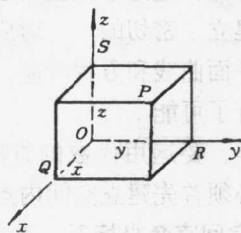


图 7.2

横坐标, 纵坐标和竖坐标, 也分别称为  $P$  点的  $x$  坐标,  $y$  坐标和  $z$  坐标.

**例1** 分别写出点  $(1, 2, 3)$  与  $xOy$  坐标平面,  $Oz$  轴, 坐标原点的对称点的坐标.

**【解】** 点  $(1, 2, 3)$  与  $xOy$  平面对称点的坐标是  $(1, 2, -3)$ ; 与  $Oz$  轴对称点的坐标是  $(-1, -2, 3)$ ; 与坐标原点对称点的坐标是  $(-1, -2, -3)$ .

空间直角坐标系按坐标轴的指向可区分为两种. 图 7.3 所示的空间直角坐标系称为右手坐标系, 因为如果用右手的拇指指向  $x$  轴正向, 食指指向  $y$  轴正向, 那末中指指向就是  $z$  轴正向. 如果把右手系的  $x$  轴和  $y$  轴对调, 那末所得到的坐标系可用左手来表示指向, 称为左手坐标系. 本书始终采用右手坐标系.

有了空间直角坐标系, 我们就可以着手用代数的方法来研究几何问题. 最简单而且最基本的问题是确定空间两点之间的距离.

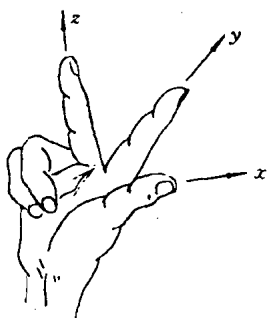


图 7.3

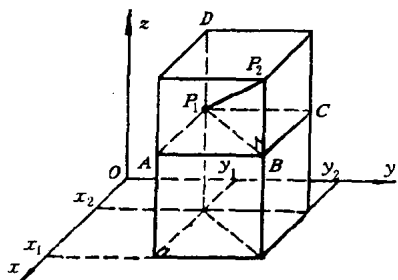


图 7.4

**3. 两点间的距离公式** 设有空间两点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ , 欲将这两点间的距离  $|P_1P_2|$  用它们的坐标表示出来. 为此, 过  $P_1$  点作三个互相垂直的平面分别平行于三个坐标平面. 再过  $P_2$  点也作这样的三个平面(图 7.4). 这六个平面围成一长方体, 而  $P_1P_2$  就是它的一条对角线, 由图 7.4 可见,

这一长方体的三条边分别等于  $|x_2 - x_1|$ ,  $|y_2 - y_1|$ ,  $|z_2 - z_1|$ .

在三角形  $\triangle P_1BP_2$  中,  $\angle P_1BP_2$  为直角, 所以

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2.$$

又在  $\triangle P_1AB$  中,  $\angle P_1AB$  为直角, 所以

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2.$$

于是

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \end{aligned}$$

从而

$$\boxed{|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad (7-1)$$

**例2** 证明以  $A(4, 3, 1)$ ,  $B(7, 1, 2)$ ,  $C(5, 2, 3)$  为顶点的三角形  $\triangle ABC$  是一等腰三角形.

**[证]** 由 (7-1) 式得  $|AB|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$ ,

$$|BC|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|CA|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6.$$

由于  $|BC| = |CA| = \sqrt{6}$ , 所以  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

### 习 题 7-1

1. 当  $P$  点处于以下位置时, 指出它的坐标所具有的特点:

- (1)  $P$  点在  $xOx$  坐标平面上;
- (2)  $P$  点在  $Ox$  轴上;
- (3)  $P$  点在与  $yOz$  平面平行且相互距离为 2 的平面上;
- (4)  $P$  点在与  $Oz$  轴垂直且与原点相距为 5 的平面上.

2. 写出  $P(1, -2, -1)$  的下列对称点的坐标:

- (1) 与三个坐标平面分别对称;
- (2) 与三个坐标轴分别对称;
- (3) 与坐标原点对称.

3. 设一立方体的一个顶点在原点, 三条棱分别在三条正半坐标轴上, 如果棱长为  $a$ , 求八个顶点的坐标.

4. 证明  $P_1(1, 2, 3)$ ,  $P_2(2, 3, 1)$ ,  $P_3(3, 1, 2)$  三点的连线构成

一个正三角形.

## 7—2 方向余弦与方向数

解析几何中除两点间的距离外, 另一个最基本的问题, 就是如何确定有向线段或有向直线的方向.

1. 方向角与方向余弦 设有空间两点  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2, z_2)$ . 例如以  $P_1$  为始点, 另一点  $P_2$  为终点的线段称为有向线段. 记作  $\overrightarrow{P_1P_2}$ . 通过坐标原点作一与  $\overrightarrow{P_1P_2}$  平行且同向的有向线段  $\overrightarrow{OP}$  (图 7.5). 将  $\overrightarrow{OP}$  与  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  三个坐标轴正向的夹角分别记作  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . 这三个角  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  称为有向线段  $\overrightarrow{P_1P_2}$  的方向角, 其中  $0 \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ , 且角的度量均以坐标轴正向为始边, 以  $\overrightarrow{OP}$  的正向为终边. 显然, 对于由  $\overrightarrow{P_1P_2}$  确定的方向, 方向角  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  是唯一确定的, 因此, 我们也把  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  称为与  $\overrightarrow{P_1P_2}$  平行同向的任一有向直线<sup>①</sup> 的方向角. 方向角的余弦  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$  称为有向线段  $\overrightarrow{P_1P_2}$  或相应的有向直线的方向余弦. 它唯一确定着这一有向线段的方向.

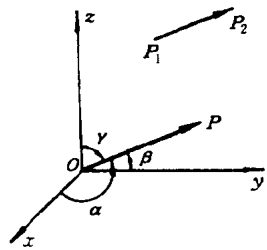


图 7.5

既然有向线段  $\overrightarrow{P_1P_2}$  由点  $P_1$  和  $P_2$  完全确定,  $\overrightarrow{P_1P_2}$  的方向当然应该可以通过  $P_1$ ,  $P_2$  两点的坐标表示出来. 为此目的, 过  $P_1$  点作三个互相垂直的平面分别平行于坐标平面 (图 7.4) 容易看出,

$$\angle AP_1P_2 = \alpha, \quad \angle CP_1P_2 = \beta, \quad \angle DP_1P_2 = \gamma,$$

注意到在  $\triangle P_1AP_2$  中,  $\angle P_1AP_2$  为直角.

所以

<sup>①</sup> 确定了方向的直线称为有向直线.

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{P_1A}{|P_1P_2|} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos\beta &= \frac{P_1C}{|P_1P_2|} = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{P_1D}{|P_1P_2|} = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\end{aligned}$$

(7-2)

由(7-2)式立即可得方向余弦之间的一个基本关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (7-3)$$

**例1** 求由点 $P_1(1, 2, 3)$ 到点 $P_2(2, 1, 3 + \sqrt{2})$ 的有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦和方向角。

**[解]**  $|P_1P_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (3+\sqrt{2}-3)^2} = 2.$

由(7-2)式知 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2-1}{|P_1P_2|} = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{1-2}{|P_1P_2|} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

注意到,  $\alpha, \beta, \gamma$ 均在 $[0, \pi]$ 内取值, 所以方向角为

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \beta = \frac{2\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

**2. 方向数** 方向余弦可以用来确定空间有向直线的方向, 但是, 如果只需要确定一条空间直线的方位(一条直线的两个方向均确定着同一方位), 那末并不一定需要方向余弦, 而只要知道与方向余弦成比例的三个数就可以了. 这三个与方向余弦成比例且不全为零的数 $A, B, C$ 称为空间直线的方向数, 记作 $\{A, B, C\}$ .

即

$$\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\cos\beta} = \frac{C}{\cos\gamma}. \quad (7-4)$$

现在, 我们来说明如何由直线的方向数来求此直线的方向余弦. 由(7-4)式, 设比例常数为  $k$ , ( $k \neq 0$ ) 则

$$A = k \cos \alpha, \quad B = k \cos \beta, \quad C = k \cos \gamma,$$

将它们两边平方后相加得

$$A^2 + B^2 + C^2 = k^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

由公式(7-3)得

$$A^2 + B^2 + C^2 = k^2.$$

所以

$$k = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

从而

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(7-5)

(7-5)式中根式取正号和负号分别得到两组方向余弦, 它们代表两个相反的方向. 由此可见, 方向数不能确定直线的方向, 只能确定直线的方位.

**例2** 已知有向直线  $L$  的一组方向数为  $\{1, \sqrt{2}, -1\}$ , 且  $L$  与  $z$  轴的夹角为锐角, 求  $L$  的方向余弦.

**[解]** 由公式(7-5)可知

$$\cos \gamma = \frac{-1}{\pm \sqrt{1+2+1}} = \frac{-1}{\pm 2}.$$

由于  $\gamma$  为锐角,  $\cos \gamma > 0$ , 从而分母应取负号. 于是  $L$  的方向余弦为:

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

**例3** 设以坐标原点为起点的有向线段  $\overrightarrow{OP}$  的长度为 1,  $P$  点的坐标为  $(x, y, z)$ , 求  $\overrightarrow{OP}$  的方向余弦和方向数.

[解] 由公式(7-2)知 $\overrightarrow{OP}$ 的方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{x-0}{|\overrightarrow{OP}|} = x, \quad \cos\beta = \frac{y-0}{|\overrightarrow{OP}|} = y,$$

$$\cos\gamma = \frac{z-0}{|\overrightarrow{OP}|} = z.$$

对于任意常数  $k \neq 0$ ,  $kx$ ,  $ky$ ,  $kz$  就是 $\overrightarrow{OP}$ 的方向数.

由例3可见, 从原点出发的任一单位有向线段的方向余弦就是其端点的坐标.

此外, 由公式(7-2),

$$x_2 - x_1 = |P_1P_2| \cos\alpha, \quad y_2 - y_1 = |P_1P_2| \cos\beta,$$

$$z_2 - z_1 = |P_1P_2| \cos\gamma.$$

其中  $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  是一不为零的常数, 所以, 空间任意两点坐标之差就是联结此两点直线的一组方向数.

3. 两直线的夹角 设  $L_1$  与  $L_2$  是空间的两条任意直线(图 7.6), 它们可能相交, 也可能不相交. 通过坐标原点  $O$  作平行于  $L_1$  的线段  $\overrightarrow{OP_1}$  和平行于  $L_2$  的线段  $\overrightarrow{OP_2}$ . 则线段  $\overrightarrow{OP_1}$  与  $\overrightarrow{OP_2}$  的夹角称为此两直线  $L_1$  与  $L_2$  的夹角.

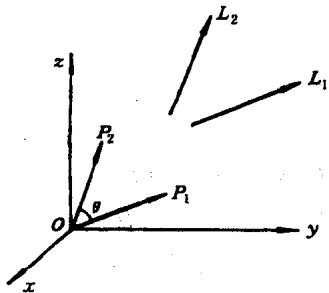


图 7.6

任意选定  $L_1$ ,  $L_2$  的正向, 设这两条有向直线的方向余弦为

$$L_1: \cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1;$$

$$L_2: \cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2.$$

分别作与有向直线  $L_1$ ,  $L_2$  平行且同向的单位有向线段  $\overrightarrow{OP_1}$ ,  $\overrightarrow{OP_2}$ . 由例3可知  $P_1$  点的坐标为  $(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$ ,  $P_2$  点的坐标为  $(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ , 将  $\overrightarrow{OP_1}$  与  $\overrightarrow{OP_2}$  的夹角记为  $\theta$ .

在  $\triangle P_1OP_2$  中, 应用三角形的余弦定理知



$$|P_1P_2|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2|OP_1| \cdot |OP_2| \cos\theta. \quad (7-6)$$

由距离公式(7-1)知

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_2 - \cos\beta_1)^2 \\ &\quad + (\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)^2 \\ &= \cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 \\ &\quad + \cos^2\gamma_1 - 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 \\ &\quad + \cos\gamma_1\cos\gamma_2). \end{aligned}$$

应用恒等式(7-3)得

$$|P_1P_2|^2 = 2 - 2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2).$$

由于 $|OP_1| = |OP_2| = 1$ , 代入(7-6)式, 化简得

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 \quad (7-7)$$

(7-7)就是两条有向直线(或有向线段)正向之间夹角的计算公式, 其中 $0 \leq \theta \leq \pi$ .

如果已知两直线的方向数:

$$L_1: \{l_1, m_1, n_1\}; L_2: \{l_2, m_2, n_2\}$$

由公式(7-5)分别求出 $L_1$ 和 $L_2$ 的方向余弦后代入(7-7)式便得到 $L_1$ 与 $L_2$ 夹角的计算公式

$$\cos\theta = \pm \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (7-8)$$

限制 $0 \leq \theta \leq \pi$ , 从(7-8)取正、负号分别求得两个角, 其中一个是另一个的补角.

**4. 两直线平行、垂直的条件** 如果直线 $L_1$ 与直线 $L_2$ 垂直, 那末它们的夹角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 从而 $\cos\theta = 0$ . 由(7-8)式可见, 此时必有

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \quad (7-9)$$

反之, 若(7-9)式成立, 由(7-8)式可知 $L_1$ 必与 $L_2$ 垂直. 因