报考硕士研究生

高等数学函授教材

第二册　　级数·多元微积分

张　明　尧

安徽大学数学系函授部

一九八六年三月

目　录

第一章　多元函数微分法及其应用

一　多元函数微分法

1　设$f(x+y, y/x)=x^2-y^2$，求$f(x, y)$。

〔由$x^2-y^2=(x+y)^2(1-y/x)/(1+y/x)$得$f(x,y)=$
$=x^2(1-y)/(1+y)$。

2　求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$。

〔由$|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x^3+y^3|\leqslant(|x|+|y|)(x^2+y^2)$得极根为0

3　证明或举例推翻下列结论；

（1）若二重极限存在，则两个两次极限都存在。（2）若在(a,b)，f的二重极限存在为A，当x取任何与a邻近的值时，$\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=\varphi(x)$存在，则$\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x,y)=A$。（3）若$f$在点$(a,b)$只有一个二次极限,则二重极限不存在。（4）若$f$在点$(a,b)$有两个不等的二次极限，则二重极限不存在。（5）若两个二次极限存在且相等，则二重极限必存在

【（1）一般不成立。例：$f(x,y)=(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$在(0，0)点二重极限为0,但两个二次极限都不存在。（2）结论成立。因二重极限存在，对任给$\varepsilon>0$，有$\delta(\varepsilon)>0$对一切适合$|x-a|<\delta$，$|y-b|<\delta$的定义域中的点(x, y)，有$|\varphi(x)-A|<\varepsilon$，令$x\to a$得证。(3)一般不成立。例$f(x,y)=x\sin(1/y)$在(0，0)点。（4）结论成立。因若不然将

与（2）的结论矛盾。（5）一般不成立，例$f(x,y)=(x^2+y^2)/[x^2y^2+(x-y)^2]$在（0，0）两个二次极限为0，但二重极限不存在（令$y=kx$，$x\to 0$，当k取不同的值时极限也改变）。

4 证明：若可微函数$u=f(x,y,z)$满足方程(欧拉公式)

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$，即f为n次齐次函数。

【固定定义域中任一点(x_0,y_0,z_0)，对$F(t)=f(tx_0,ty_0,tz_0)/t^n$ $(t>0)$关于t求导易得$F'(t)=0$，故对$t>0$，$F(t)=C$（C为常数，令$t=1$定出$C=f(x_0,y_0,z_0)$），对$t<0$可仿上证之。

5 设$f(x,y,z)$是可微的n次齐次函数，则其偏导函数f'_x，f'_y，f'_z均为$n-1$次齐次函数。

【由$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$两边对x求偏导数并消去t得$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z)$，$f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$表示对第一个变量求导，这证明$f'_x$是$n-1$次齐次函数，同理可证其余。

6 设 $u=f(x,y,z)$为二次可微的n次齐次函数，证明

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2u=n(n-1)u\text{。}$$

【先由$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ $(t>0)$对t求导并取$t=1$证出欧拉公式$f'_x(x,y,z)x+f'_y(x,y,z)y+f'_z(x,y,z)z=nf(x,y,z)$。然后将对$n-1$次齐次函数$\partial u/\partial x$，$\partial u/\partial y$，$\partial u/\partial z$分别应用欧拉公式所得三式分别乘以$x$，$y$，$z$后再相加即得证。

7　证明：若 f''_{xy} 与 f''_{yx} 都在点（x，y）连续，则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$。

【记 $\varphi(x,y)=f(x+\triangle x,y)-f(x,y)$，在 $\Phi=\varphi(x,y+\triangle y)-\varphi(x,y)$ 中先对 y 再对 x 用中值定理得 $\Phi=f''_{yx}(x+\theta_2\triangle x,y+\theta_1\triangle y)\triangle x\triangle y\ (0<\theta_1,\theta_2<1)$，类似可证 $\Phi=f''_{xy}(x+\theta_3\triangle x,y+\theta_4\triangle y)\triangle x\triangle y\quad(0<\theta_3,\theta_4<1)$，令 $\triangle x\to0$，$\triangle y\to0$ 由偏导函数连续性即得证。

8　若 $u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$ 二次可微，证明：

$$\triangle u=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2+\partial^2u/\partial z^2$$

仅是 r 的函数，并求出这函数来。

【$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{r}\dfrac{du}{dr}$，$\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}-\dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{du}{dr}+\left(\dfrac{x}{r}\right)^2\dfrac{d^2u}{dr^2}$，同理可求出 $\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$，最后 $\triangle u=\dfrac{2du}{rdr}+\dfrac{d^2u}{dr^2}$。

9　设 u、v 均为 x，y 之函数，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，将

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y,\quad \partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$$

化成极座标形式。

【$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=arctg(y/x)$，$\partial u/\partial x=x/r\cdot\partial u/\partial r-y/r^2\cdot\partial u/\partial\theta$，类似可得 $\partial u/\partial y$，$\partial v/\partial x$，$\partial v/\partial y$ 之表达式。代入所给方程组，分别消去 $\partial u/\partial r$ 与 $\partial u/\partial\theta$ 得极坐标形式：$\partial u/\partial r=\partial v/\partial\theta$，$\partial u/\partial\theta=-r\partial v/\partial r$。

10　设 u、v 均二次可微，$\triangle$ 为拉普拉斯算子，证明

$$\triangle(u,v)=u\triangle v+v\triangle u+2\triangle(u,v),$$

这里$\triangle(u,v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$。

【由△定义及求导法则即得。

11 设$u_1=u_1(x,y,z)$与$u_2=u_2(x,y,z)$ 均满足$\triangle u=0$，证明$v=u_1+(x^2+y^2+z^2)u_2$满足二重调和方程$\triangle(\triangle v)=0$

【直接计算并应用上题结果即可。

12 设$f(x,y,z)$为可微分m次的n次齐次函数。证

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

【对$f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$两边关于t求m阶导数，由归纳法可证，左方的m阶导数为

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m}\frac{m!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\frac{\partial^m f(tx,ty,tz)}{\partial(xt)^{\alpha_1}\partial(yt)^{\alpha_2}\partial(zt)^{\alpha_3}}\cdot$$

$$\cdot x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}=t^{n-m}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z),$$

而右方的m阶导数为$n(n-1)\cdots(n-m+1)t^{n-m}f(x,y,z)$。
取$t=1$即得证。
证法二，$m=1$是欧拉公式，$m=2$见第6题，设对$m=k-1$结论成立，由第5题及归纳假设可得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{K-1}f'_x=[(n-1)!/(n-k)!]f'_x,$$

同理可对f'_y,f'_z得相应等式，三式各乘以x，y，z并相加即得证

13 求在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处函数$u=ax^2+by^2+cz^2$及$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$（$a$，b，$c,m,n$，$p$为常数且$a^2+b^2+c^2\neq0$二者梯度之间夹角$\theta$当$M_0$移至无穷远时之极限。

【$gradv=\{2ax_0+2m,\ 2by_0+2n,\ 2cz_0+2p\}$，$gradu=\{2ax_0,\ 2by_0,\ 2cz_0\}$。记$ax_0=\alpha$，$by_0=\beta$，$cz_0=\gamma$，$ax_0+m=\alpha_1$，$by_0+n=\beta_1$，$cz_0+p=\gamma_1$，则$\cos\theta=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)/[\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma^2}]$，于是$\sin^2\theta=[(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2]/[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2)]$。令$\delta=max(|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|)$，则$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta$，当$M_0$移向无穷远时有$\delta\to+\infty$。记$q=max(|m|,\ |n|,\ |p|)$，就有$0\leqslant\sin^2\theta\leqslant[(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2]/[\delta^2\cdot(\delta^2-6q\delta-3q^2)]\to0$，故$\theta\to0$。

14 设$u=f(x,\ y,\ z)$二次可微，l_1，l_2，l_3为三个互相垂直的方向，方向角各α_i，β_i，γ_i，$(i=1,2,3)$。证明（记号见第8、10题）

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial l_j}\right)^2=\triangle(u,u)$，　　(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2u}{\partial l_j{}^2}=\triangle u$。

【由方向导数定义可得

$$\frac{\partial^2u}{\partial l_j{}^2}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cos^2\alpha_j+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\cos^2\beta_j+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+$$

$$+2\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cos\alpha_j\cos\beta_j+\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\cos\beta_j\cos\gamma_j+\frac{\partial^2u}{\partial z\partial x}\cos\gamma_j\cos\alpha_j\right)$$

再利用$\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\cos^2\alpha_j=\sum_{j=1}^{3}\cos^2\beta_j=\sum_{j=1}^{3}\cos^2\gamma_j=1$以及

$$\sum_{j=1}^{3}\cos\alpha_j\cos\beta_j=\sum_{j=1}^{3}\cos\beta_j\cos\gamma_j=\sum_{j=1}^{3}\cos\gamma_j\cos\alpha_j=0$$

即得（2）式。（1）式可仿此证之。

15 设$z=f(x,\ y)$为二元函数，$M(a,\ b)$为定点，证

明或举例推翻以下结论：（1）若在M点 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ 都存在，则f在M点连续。（2）若在M点 f 连续且 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ 都存在，则$\partial z/\partial x$与$\partial z/\partial y$在M的邻域内有界。（3）若在M点 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$都存在，则f在该点可微。（4）若$\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ 在M点存在且在M点的邻域中有界，则f在该点可微。（5）若 $\partial z/\partial x$与 $\partial z/\partial y$在M点连接，则f在M点可微。（6）若f在点M可微，则$\partial z/\partial x$与$\partial z/\partial y$存在且连续。

【（1）不一定，例：$f(x)=xy^2/(x^2+y^4)$（$x^2+y^2\neq 0$时）及$=0$（$x=y=0$时），易有$f_x'(0,0)=0=f_y'(0,0)$，但当$x=y^2$，$y\to 0$时有$f\to\frac{1}{2}\neq f(0,0)$。

（2）不一定，例：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在$(0,0)$的两个偏导数均为0，且f在（0，0）连续，但$f_x'(x,y)=\sqrt{|xy|}/2x$ （$x\neq 0$），$=0(x=y=0)$且对（0，y）（$y\neq 0$）无意义，对f_y'亦有类似结论。故它们在（0，0）的任何邻域内均无界。

（3）不一定，例1：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在（0，0）不可微，因令$y=kx$，则当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时有$[f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y]/\rho\to\sqrt{|k|/(1+k^2)}\not\to 0$当（$k\neq 0$时）。例2：$f(x,y)=0$（$xy=0$时）或1（$xy\neq 0$），它在（0，0）也必不可微，因不然$f$必在（0，0）连续，但当点（$x$，$y$）沿$x$轴或$y$轴分别趋于（0，0）时，$f$有极限值0，而当点（$x$，$y$）沿任何不与数轴相交的路经趋于（0，0）时$f$有极限1。

（4）不一定，例：$f(x,y)=xy/\sqrt{x^2+y^2}$（$x^2+y^2\neq 0$时）及$=0$（$x=y=0$时），$f_x'(x,y)=y^3/(x^2+y^2)^{3/2}$ （$x^2+y^2\neq 0$时）或$=0$（$x=y=0$时），故$|f_x'|\leqslant 1$，同理可证$|f_y'|$有界。但$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$时$\lim[f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,$

$0)\cdot y]/\rho=\lim xy/(x^2+y^2)$不存在。

(5)结论成立，证明详见同济大学数学教研室编《高等数学》下册(第二版)P. 22.

(6)不一定，例：$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$（$x^2+y^2\neq0$时）或$=0$（$x=y=0$时）。$f_x'(0,0)=f'_y(0,0)=0$，$f_x'(1/\sqrt{2n\pi},0)=-2\sqrt{2n\pi}\to-\infty(n\to\infty)$，故$f_x'$在（0，0）不连续，类似地$f_y'$在（0，0）也不连续。但当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0$时，$\lim[f(x,y)-f(0,0)-xf_x'(0,0)-yf_y'(0,0)]/\rho=0$，故在（0，0）可微。

16 设$f(x,y,z)$为n次齐次多项式，证明$d^n f(x,y,z)=n!\,f(dx,dy,dz)$。

【任一n次齐次多项式可表为$Ax^py^qz^r$（$p\geqslant0,q\geqslant0,r\geqslant0$，$p+q+r=n$型项的和，而$d(Ax^py^qz^r)=C_n^{p+q}d^{p+q}(x^py^q)\cdot d^r(z)^r=C_n^{p+q}[C_{p+q}^p\cdot d^p(x^p)d^q(y^q)d^r(z^r)]=n!\,dx^pdy^qdz^r$，故得证。

17 设$x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，$f(x,y,z)=xy^2z^3$。在以下两情形中分别计算$f_x'(1,1,1)$：（1）$z=z(x,y)$是由题给方程定义的隐函数，（2）$y=y(x,z)$是由同一方程定义的隐函数。

【记$F=x^2+y^2+z^2-3xyz$，则在（1）中有

$$z_x'(1,1)=-\frac{F_x'(1,1,1)}{F_z'(1,1,1)}=-\frac{F_x'(x,1,1)|_{x=1}}{F_z'(1,1,z)|_{z=1}}=-1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\Big|_{(1,1,1)}=\frac{d}{dx}f(x,1,1)\Big|_{x=1}+$$

$\frac{d}{dz}f(1,1,z)\ |_{z=1}\cdot z'_x(1,1)=-2$。在（2）中有$y'_x(1,1)$

$$=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}=-1\text{及}\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z),z)]|_{(1,1,1)}$$

$=-1$。

（注）请读者研究上述二导数值不等的原因。

18 设$x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$，$z=z(x,y)$为由$F(x,y,z)=0$定义的函数，求$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$。

【由隐函数求导公式有$\partial x/\partial y=-(\partial F/\partial y)/(\partial F/\partial x)$等等，故其值为$-1$。

19 设$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，求反函数$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$的一阶偏导函数。

【用全微分法解较简单。从一阶微分式

$$dx=\varphi'_1du+\varphi'_2dv,\qquad dy=\psi'_1du+\psi'_2dv$$

解得 $du=(\psi'_2dx-\varphi'_2dy)/K$，$dv=(\varphi'_1dy-\psi'_1dx)/K$，于是得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial v}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\psi}{\partial u}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\kappa}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$，

其中 $\kappa=\varphi'_1\psi'_2-\varphi'_2\psi'_1$。

（注）请读者续求反函数的诸二阶偏导数。

20 设是z由$z=x+y\varphi(z)$所定义的（变数x与y的）隐函数$u=f(z)$，证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\}.$$

【由 $z=x+y\varphi(z)$ 得 $dz=dx+\varphi(z)dy+y\varphi'(z)dz$,

解得 $\partial z/\partial x$，$\partial z/\partial y$ 后易证得 $\partial u/\partial y=f'(z)\partial z/\partial y=f'(z)\varphi(z)\cdot\partial z/\partial x=\varphi(z)\partial u/\partial x$，$n=1$ 得证，设 $n=k$ 结论成立，则

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}[\varphi^k(z)\partial u/\partial x]\}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\{\partial[\varphi^k(z)\cdot\partial u/\partial x]/\partial y\}$$

对任意可微函数 $g(z)$ 有（用 $n=1$ 的结论）

$\partial[g(z)\partial u/\partial x]/\partial y=g'(z)[\varphi(z)\partial z/\partial x]\partial u/\partial x+g(z)\partial[\varphi(z)\cdot u/\partial x]/\partial x=[\varphi(z)\partial u/\partial x]\partial g(z)/\partial x+g(z)\partial[\varphi(z)\cdot\partial u/\partial x]/\partial x=\partial[\varphi(z)g(z)\partial z/\partial x]/\partial x$，特别取 $g(z)=\varphi^k(z)$ 代入之，然后将所得结果代入 $\partial^{k+1}u/\partial y^{k+1}$ 即得 $n=k+1$ 的结论。

21 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，将 $\omega=\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u/\partial y^2$ 改写成极坐标形式。

【视 r、φ 为中间变量，x，y 为自变量，容易求得

$d^2r=d[(x/r)\cdot dx+(y/x)\cdot dy]=(ydx-xdy)^2/r^3$,

$d^2\varphi=d[(x/r^2)\cdot dy-(y/r^2)\cdot dx]=-2r^{-4}(xdy-ydx)(xdx+ydy)$

将它们代入 $d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial r^2}dr^2+2\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi+\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}d^2r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi$ 可将 d^2u 用自变量 x、y 的微分及相应函数表出，由此易得公式

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}-\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{y^2}{r^4}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+\frac{2xy}{r^3}\frac{\partial^2u}{\partial r\partial\varphi}+\frac{x^2}{r^4}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{2xy}{r^4}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \qquad (2)$$

相加即得 $\omega=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$。

22 设$u(x,y)$有二阶导数存在，证明$u(x,y)=f(x)g(y)$之充要条件是 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$（$u\neq 0$）

【必要性由计算即得证，为证充分性，记$v=\partial u/\partial y$,则所给方程变形为$u\partial v/\partial x=v\partial u/\partial x$,由$u\neq 0$得$(u\cdot\partial v/\partial x-v\cdot\partial u/\partial x)/u^2=0$，即$\partial(v/u)/\partial x=0$ 故$v/u=\varphi_1(y)$。即$(\partial u/\partial y)/u=\varphi_1(y)$，解得$\ln u=\int\varphi_1(y)dy+\varphi_2(x)$，于是 $u=exp\{\int\varphi_1(y)dy+\varphi_2(x)\}=f(x)g(y)$。（其中$exp(x)=e^x$）。

23 设 $F(x)=\int_0^x f(x,t)\,dt$，f 有一阶连续偏导数，求$F'(x)$。

【$F'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\int_0^x\dfrac{f(x+\Delta x,t)-f(x,t)}{\Delta x}dt+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\Delta x}\cdot$
$\cdot\int_x^{x+\Delta x}f(x+\Delta x,t)dt=\int_0^x f_1'(x,t)dt+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f_2'(x+\Delta x,x+\theta\Delta x)=\int_0^x f_1'(x,t)dt+f_2'(x,x)$，这里$f_1'$与$f_2'$分别表示对第一及第二个变元求偏导数。

24 设$f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，φ在$(0,0)$邻域内连续。问：（1）φ满足什么条件时，$f_x'(0,0)$与$f_y'(0,0)$存在？（2）φ满足什么条件时，f在$(0,0)$可微？

【$\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{|\Delta x|\varphi(\Delta x,0)}{\Delta x}$
$=\varphi(0,0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\triangle x,\ x)-f(0,\ 0)}{\triangle x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\triangle x|\varphi(\triangle x,\ 0)}{\triangle x}$$

$=-\varphi(0,\ 0)$,

故 $f'_x(0,\ 0)$存在，当且仅当$\varphi(0,\ 0)=-\varphi(0,\ 0)$即$\varphi(0,\ 0)=0$，类似可证，$f'_y(0,\ 0)$存在之充要条件仍是$\varphi(0,\ 0)=0$

为在（0，0）可微，$f'_x(0,0)$与$f'_y(0,\ 0)$也必须存在，故也需$\varphi(0,\ 0)=0$。由可微性定义，需$\triangle f=f'_x(0,\ 0)\cdot\triangle x+f'_y(0,\ 0)\triangle y+o(\rho)=o(\rho)$，即需$\triangle f/\rho\to 0(\rho\to 0)$令$\triangle x=\rho cos\theta$，$\triangle y=\rho sin\theta$，则$\triangle f/\rho=|\triangle x-\triangle y|\varphi(\triangle x,\ \triangle y)/\rho=|cos\theta-sin\theta|\varphi(\rho cos\theta,\ \rho sin\theta)$，它当$\varphi(0,0)=0$时趋于0（$\rho\to 0$）。故在（0，0）可微的充要条件仍是$\varphi(0,\ 0)=0$。

二　微分法之应用

25　求椭球面$x^2+y^2+z^2-xy=1$在各坐标面上之投影。

【先求在Oxy面上之投影，投影区域之边界系由椭球面上这种点的投影点构成：该点向Oxy面所作垂线恰在过该点的切平面内，即曲面在该点之法线与Oxy面平行，该点法向量为$\vec{n}=\{2x-y,\ 2y-x,\ 2z\}$，故这种点应满足方程组$2z=0$，$x^2+y^2+z^2-xy=1$，即向$Oxy$面投影域之边界是$Oxy$面上的圆周$x^2+y^2-xy=1$，同理，在$Oxz$及$Oyz$面上投影域之边界线分别为两平面上的椭圆$\frac{3}{4}x^2+z^2=1$及椭圆$\frac{3}{4}y^2+z^2=1$。

26　求函数 $z=(ax+by+c)/\sqrt{1+x^2+y^2}(a^2+b^2+c^2\neq$.

0）之极值。

【用极坐标变为 $z=(ar\cos\varphi+br\sin\varphi+c)\ /\ \sqrt{r^2+1}$，由 $\partial z/\partial r=0$，$\partial z/\partial\varphi=0$ 得 $a\cos\varphi+b\sin\varphi-cr=0$，$-ar\sin\varphi+br\cos\varphi=0$。

（一）若a、b不同为0，由第二方程得$r=0$或$a\sin\varphi=b\cos\varphi$，①若$r=0$，由第一个方程知必须 $a=0$，$\varphi=0$，π，2π 或必须$b=0$，$\varphi=\pi/2$，$3\pi/2$，在$a=0$时得$\partial^2 z/\partial r^2=-c$，$\partial^2 z/\partial r\partial\varphi=\pm b$，$\partial^2 z/\partial\varphi^2=0$，$(-c)\cdot 0-(\pm b)^2<0$，故在这种点无极值，同理，在$r=0$，$b=0$，$\varphi=\pi/2$，$3\pi/2$时也无极值。②若 $a\sin\varphi=b\cos\varphi$，则$\cos\varphi=\pm a/\sqrt{a^2+b^2}$，$\sin\varphi=\pm b/\sqrt{a^2+b^2}$，易见$c\neq 0$（否则将有 $a=b=0$，与题设矛盾），于是有 $r=(a\cos\varphi+b\sin\varphi)/c=\pm\sqrt{a+b^2}\ /c$，为保证$r\geqslant 0$，应取$\cos\varphi$及$\sin\varphi$与$c$同号，此时$x=a/c$，$y=b/c$，$z''_{rr}=-c(1+3r^2)/(1+r^2)^{5/2}$，$z''_{\varphi\varphi}=-cr^2/(1+r^2)^{1/2}$，$z''_{r\varphi}=0$，$z''_{rr}\ z''_{\varphi\varphi}-(z''_{r\varphi})^2>0$，故$c>0$时$z''_{rr}<0$，取极大值 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，$c<0$时 $z''_{rr}>0$，取极小值$-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

（二）若$a=b=0$，必$c\neq 0$，静止点为（0，0）易证$c>0$时$z=c$为极大值，$c<0$时$z=c$为极小值。

（注）请试用直角坐标直接解之，并作比较。

27 求变量x，y的隐函数z的极值，这里

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

【用求微分解之，微分所给方程（易见$z=2$时不可微），对$z\neq 2$得静止点为$x=1$，$y=-1$（相应有$z=6$及$z=-2$）在静止点易求得$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0$（当$dx^2+dy^2\neq 0$

且$Z=6$时），故$x=1$，$y=-1$时取极大值$z=6$，又易证 $x=1$，$y=-1$时z也取极小值-2，$z=2$是球的切平面与 OZ 轴平行之处，故在该点不取极值。

28 求函数$z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$在限制条件$x^2+y^2=1$下下的极值点。

【用拉格朗日不定乘数法解，作 $F=Ax^2+2Bxy+Cy^2-\lambda(x^2+y^2)$，由$x^2+y^2=1$知$x$与$y$不全为0，故需方程组$\partial F/\partial x=0$，$\lambda y\partial F/\partial y=0$有非零解，于是系数行列式为0：

$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}=0$。若$(A-C)^2+4B^2=0$，则$z=A(x^2+y^2)=A$为常数，不必讨论了，若$(A-C)^2+4B^2\neq 0$，则有二相异根$\lambda_1,\lambda_2$(不仿设$\lambda_1>\lambda_2$)。相应得 $x_{1,2}=\pm(\lambda_1-C)/\sqrt{B^2+(\lambda_1-C)^2}$，$y_{1,2}=\pm(\lambda_1-A)/\sqrt{B^2+(\lambda_1-A)^2}$，$x_{3,4}=\pm(\lambda_2-C)/\sqrt{B^2+(\lambda_2-C)^2}$，$y_{3,4}=\pm(\lambda_2-A)/\sqrt{B_2+(\lambda_2-A^2)}$。相应解得

$z(x_j,y_j)=(Ax_j+By_j)x_j+(Bx_j+Cy_j)y_j=(\tilde{\lambda}_jx_j)x_j+(\tilde{\lambda}_jy_j)y_j=\tilde{\lambda}_j$ ($j=1$，2，3，4，$\tilde{\lambda}_1=\tilde{\lambda}_2=\lambda_1$，$\tilde{\lambda}_3=\tilde{\lambda}_4=\lambda_2$)。因函数$z$在单位圆周上连续且不为常数，故必取到相异的最大及最小值，于是函数在(x_1, y_1)及(x_2, y_2)取最大值λ_1（也是极大值），在(x_3, y_3)及(x_4, y_4)取最小值λ_2（也是极小值）。

（**注**）请读者作$x=\cos t$，$y=\sin t$化为单变量极值问题解之，并作比较。

29 若$n\geqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，证明$(x^n+y^n)/2\geqslant[(x+y)/2]^n$。

【考虑函数$z=(x^n+y^n)/2$在条件$x+y=a$ ($a>0$，$x\geqslant 0$，

$y\geqslant0$)下的极值。易求得静止点为（$a/2$，$a/2$），将此点值与在边界点（0，a），（a，0）的值比较知结论成立。

（注）1、请将求极值函数与限制条件交换再证明之，并作比较。2、此题可用凸函数理论简单获证，详见有关论著。

30 证明或举例推翻下述结论：

（1）函数在过点M_0（x_0，y_0）的每条直线上都在M_0点取极小（大）值，则函数在该点取极小（大）值，（2）函数在域中仅有一个极值怀疑点，且在该点取极大（小）值，则必在该点取最大（小）值。

【（1）一般不成立。例：$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$，在过原点的每条直线$y=kx$及直线$x=0$上都以$f(0,0)=0$为极小值，但对$a>0$有$f(a,\sqrt{1.5a})=-0.25a^2<0$，故$f$在原点不取极小值。

（2）一般不成立。例：$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$，易证它在闭矩形域$|x|\leqslant5$，$|y|\leqslant1$内部仅有一个极值怀疑点（0，0），且在（0，0）取极大值$f(0,0)=0$，但它并不是f在该域上的最大值，例如$f(5,0)=25>0$。

（注）对一元函数结论（2）成立，这反映了多元函数与一元函数有很大的差别。

31 讨论函数极值：（1）$z=y^2+x^4$　　（2）$z=y^2+x^3$

【静止点均为（0，0），（1）因$z\geqslant0$，$z(0,0)=0$，故在（0，0）取极小值。（2）对$x=2y>0$有$z(2y,y)>0$，对$x=-(2y)^{2/3}$，$y>0$，有$z<0$，故在（0，0）不取极值。

（注）在此二例中二阶偏导数判别极值类型的方法失效。

32 证明不等式$\sqrt[4]{xyzt}\leqslant(x+y+z+t)/4$

【研究函数$u=xyzt$在条件$x+y+z+t=4c$（$c>0$）下的最大值即可。注意静止点为P_0（c，c，c，c），本题不存在最小

值，且当点（x，y，z，t）趋于讨论区域的边界（即至少有一个变元为0）时有$u=0$，故最大值在P_0达到。

（注）①也可从限制条件解出一个变元代入u中化为无条件极值问题求解。②也可考虑函数$u=x+y+z+t$在条件$xyzt=c^4$（$c>0$）下的最小值（要求x，y，z，$t>0$），对各种证法的优劣，请读者自行比较。③此题可推广到n个变元的情形，试推广这个结论。

33 求 $u=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$ $(a_i>0)$在条件$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i=a$下的最小值($a>0$，$x_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$)。

【将限制条件改为$\sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i=\ln a$计算较简单。由拉格朗日乘数法得静止点为$P_0(\sqrt[a_1]{\lambda/a_1}, \cdots, \sqrt[a_n]{\lambda/a_n})$，相应有$\lambda=(a\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[a_i]{a_i})^{1/\beta}$这里$\beta=\sum\limits_{1}^{n} a_i^{-1}$及$u(P_0)=\beta\lambda$。易见$\beta\lambda$即为所求者。

34 由直圆柱及直圆锥作顶构成一个立体。当其全表面积为Q时，求有最大体积的尺寸。

【设圆柱部分底半径为R，高为h，圆锥母线与底面夹角为α，则$\pi R^2+2\pi Rh+\pi R^2/\cos\alpha=Q$，$R>0$，$h>0$，$0\leqslant\alpha<\pi/2$，体积为$V=\pi R^2h+\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}\alpha$。由不定乘数法得$\sin\alpha=2/3$，$h=(1+1/\sqrt{5})R$，$R=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{Q/\pi}$，相应有$V_0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12}\sqrt{Q^3/\pi}$。较困难的是验证$V_0$是最大值。易见