

算学小叢書

平面几何学
比例及相似形

山地哲太郎 林鶴一著
崔朝慶譯



商务印书馆

算学小叢書

平 面 几 何 学

比 例 及 相 似 形

山地哲太郎 林鶴一著

崔 朝 慶 譯

算學小叢書
平面幾何學—比例及相似形
崔朝慶譯

★版權所有★

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 上 海 廠 印 刷

(51120)

1984年4月第1版

開本 787×1092 1/32

1956年3月第6版

印張 6 2/16

1956年3月上海第1次印刷

印數 6,501—16,500

定價(8) 0.75

目 次

第一章 關於比及比例之說明及定理	1
倍量, 約量	1
公約量	1
可通約量, 不可通約量	1
求最大公約量	1
定理 1, 量之測度	3
比	5
定理 2, 某比與反比之積等於 1	5
比例, 比例量	5
比例中項	6
定理 3, 量之比與測度	6
定理 4, 數之比例 (重要定理)	7
例題 I	9
第二章 中心角	10
定理 5, 中心角與夾弧 (基本定理)	10
例題 II	13

第三章 比例線	14
定理 6, 平行線 (基本定理)	14
內分外分	15
定理 7, 內分點, 外分點	15
調和共軛點, 調和列點	17
定理 8, 平行線	17
例題 III	19
定理 9, 內角及外角之二等分線	19
主要問題 I	20
例題 IV	21
主要問題 2	22
例題 V	23
第四章 相似多角形	25
對應角, 對應邊	25
定理 10, 相似三角形	25
定理 11, 相似三角形 (基本定理)	26
主要問題 3	27
例題 VI	28
定理 12, 相似三角形 (基本定理)	30

目	次	3
定理 13, 相似三角形 (基本定理)		31
主要問題 4		32
例題 VII		33
主要問題 5		34
雜題 I		36
主要問題 6		37
直接相似, 反對相似		42
定理 14, 相似多角形		43
例題 VIII		44
主要問題 7		46
主要問題 8		48
相似之中心		48
例題 IX... .. .		49
第五章 面積		51
第一節 面積 等積之矩形 (基本定理).....		51
定理 15, 矩形... .. .		51
例題 X		52
定理 16, 內項外項所包之矩形		55
主要問題 9		56

例題 XI... ..	57
定理 17, 圓之二弦相交互分二部分所包之矩形	60
定理 18, 切線上之正方形	62
主要問題 10	63
例題 XII	64
定理 19, 三角形之二邊所包之矩形	67
主要問題 11	68
例題 XIII	69
定理 20, 多線某之定理 (重要定理)	70
例題 XIV	73
中末比	76
例題 XV	76

第二節 關於複比及二乘比之面積..... 78

複比, 二乘比之定義	78
定理 21, 複比	78
定理 22, 矩形之比... ..	79
例題 XVI	81
定理 23, 兩箇三角形之比 (基本定理)	81
定理 24, 一角相等之兩箇三角形之比 (基本定理)	82
主要問題 12	85

目	次	5
例題 XVII		86
定理 25, 相似三角形之比		88
主要問題 13		90
例題 XVIII		90
第六章 雜定理		95
定理 26, 梅乃臘司之定理		95
例題 XIX		97
定理 27, 舍佛之定理		100
例題 XX		103
定理 28, 巴斯果之定理		105
例題 XXI		107
雜題 II		107
第七章 計算應用問題		111
定理 29, 弧之測度... ..		111
例題 XXII		112
主要問題 14		112
例題 XXIII... ..		113
定理 30, 矩形之測度		114

例題 XXIV	116
主要問題 15	116
例題 XXV	117
主要問題 16	119
例題 XXVI	120
主要問題 17	122
例題 XXVII	122
主要問題 18	124
例題 XXVIII	125
主要問題 19	127
例題 XXIX	127

附錄 問題解法指南及答	130
-------------------	-----

平面幾何學——比例及相似形

第 一 章

關於比及比例之說明及定理

說比，有須豫述之事項，述之於次：

1. 定義。某量 A 為同種類之量 B 之若干倍，則 A 為 B 之倍量， B 為 A 之約量。

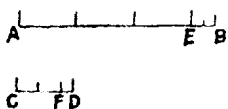
例如一丈為一尺之倍量，而一尺為一丈之約量。

2. 定義。二量 A, B ，同為量 C 之倍量，則 C 為 A 及 B 之公約量，或謂之公度量。

例如一升為一斗及一斛之公約量。

3. 定義。有公約量之二量，謂之可通約量，無公約量之二量，謂之不可通約量。

4. 求二直線 AB, CD 之最大公約量。



解。 $AB > CD$ ，以 CD 之長為度，
從 AB 之 A 端起，依 CD 之長截 AB
為若干段，生次之二種情形。

(1) AB 等於 CD 之若干倍之情形。

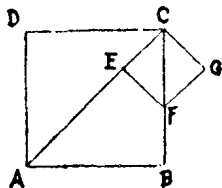
例如 $AB = 4CD$ ，則 CD 為所求之最大公約量。

(2) AB 含 CD 之若干倍與殘餘之情形。

例如 $AB = 3CD + EB$ 。又以 EB 之長為度，從 CD 之 C 端起，
截 CD ，得 $CD = 2EB + FD$ ，再以 FD 之長為度，從 EB 之 E 端
起，截 EB ，設 $EB = 2FD$ ，則 $CD = 5FD$ ， $AB = 17FD$ ，所求之最
大公約量，即 FD 也。

此方法，與算術及代數學中之求最大公約數，其理相同。

設二直線為正方形之一邊 BC 及其
對角線 AC ，用前之方法，求最大公
約量。



正方形之對角線，不能恰等於其一邊
之若干倍，故以 BC 為度，從 AC 之
 A 端起，截 AC 於 E ，殘餘為 CE ，作
垂線至 AC 上之 E 點，此垂線與 BC 相交於 F ，則 $CE = EF = BF$ ，
故從 BC 減 CE ，其殘餘為 CF ，由此知 CE ， CF 乃第二正方形
 $CEFG$ 之一邊及對角線也。

即求第一正方形 $ABCD$ 之一邊及對角線之最大公約量，變為求
第二正方形 $CEFG$ 之一邊及對角線之最大公約量，如是輾轉相求。

恆為求正方形之一邊及對角線之最大公約量，而無終局之時，故此情形不能有公約量。

5. 定義. 計算某量，須先定同種類之量為單位，而後檢定其量含此單位之若干倍，或為此單位之若干分之一之幾倍。

某量之測度乃以單位計其量所得之數也。整數及分數，通稱為有理數，或謂之盡數，奇零數謂之無理數，或謂之不盡數。

6. 定理 1. 某量能以單位通約，其測度為有理數。

證明. 以 A 表某量， U 為單位， P 為公約量。

假設 $A = mP$, $U = nP$. (m, n 為正整數.)

因 $P = \frac{1}{n}U$. $\therefore A = m\left(\frac{1}{n}U\right) = \frac{m}{n}U$.

即 A 之測度為有理數 $\frac{m}{n}$.

此定理之對偶亦真，故得次之系 1.

系 1. 量之測度，非有理數，其量與單位不能通約。

系 2. 量之測度為有理數，其量與單位能通約。

證明. 單位為 U ，量 A 之測度為 $\frac{m}{n}$. (m, n 為正整數.)

$$\text{因 } A = \frac{m}{n}U = m\left(\frac{1}{n}U\right).$$

$$\text{以 } P \text{ 代 } \frac{1}{n}U, \text{ 則 } A = m\left(\frac{1}{n}U\right) = mP, U = nP.$$

∴ P 為 A 及 U 之公約量。

由此知 A 與 U 為可通約之量。

即系 2 之對偶亦真，故得次之系 3。

系 3. 某量與其單位不可通約，則其測度非有理數，必為無理數。

以正方形之一邊為單位，其對角線與單位不可通約，（見第 4 節）故其測度為無理數，說明於次。

以 A 代正方形之一邊，P 代其對角線，知 $2A > P > A$ 。

用 A 之十分之一，則 $1.5A > P > 1.4A$ 。

又用 A 之百分之一，則 $1.52A > P > 1.51A$ 。

又用 A 之千分之一，則 $1.515A > P > 1.514A$ 。

觀前之各式，P 之測度，乃介於兩箇小數之間，即更用 A 之萬分之一，A 之十萬分之一，其結果亦同，故可決定 P 之測度，不能為分數。

換言之，即能決定 P 之測度，不能為有理數。

非有理數，則不盡數也。此不盡數，乃 2 之平方根也。

如此之不盡數，在實地計算時，無法能求得真正密合之數。

如以 1.415A 代 P，則失之稍多，而以 1.414A 代 P，則失之微少，考其誤差之略數為 0.001A，實不足 A 之千分之一也。

因不盡數無法能求得真正密合之數，故運算時，即用不盡數之近似數，失之稍多者，名曰過剩近似數，失之微少者，名曰不足近似數。1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之過剩近似數，1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 皆不盡數 $\sqrt{2}$ 之不足近似數也。

7. 定義. 量 A 對於與之同種類之量 B 之比，即乘 B 可得 A 之數也。

換言之，則 A 之對於 B 之比，即用 B 為單位計 A 時，A 之測度也。

記 A 之對於 B 之比為 $A : B$ ，或用分數式 $\frac{A}{B}$ 。

A 為比之前項，B 為比之後項。

注意. A 之對於 B 之比，通稱為 A 與 B 之比。

8. 定義. 某比與交換其前後項而成之比，謂之互為反比。

如 $A : B$ 與 $B : A$ ，即互為反比。

9. 定理 2. 某比與其反比之積，等於 1。

設 $\frac{A}{B} = m$ 則 $\frac{B}{A} = \frac{1}{m}$. $\therefore \frac{A}{B} \times \frac{B}{A} = m \times \frac{1}{m} = 1$ 。

10. 定義. 量 A 與 B 之比，等於量 C 與 D 之比，則 A, B, C, D 成比例，或謂之比例量。

記比例之法，有次之三式。

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

$$A : B = C : D$$

$$A : B :: C : D$$

A 與 D 爲比例之外項，B 與 C 爲比例之內項，D 爲 A, B, C 之第四比例項。又 A 與 C, B 與 D 爲相對應之項。

注意. A, B, C, D, 皆爲同種類之量，則比例成立。又 A, B 爲同種類之量，而 C, D 爲與 A, B 異種類者，比例亦能成立。

例如 A, B, C, D 皆爲線分，能成比例，A, B 爲線分，C, D 爲面積，亦無妨。

11. 定義. 有同種類之量 A, B, C, 若 A 與 B 之比，等於 B 與 C 之比，則此三量成比例，其 C 爲 A, B 之第三比例項，B 爲 A, C 之比例中項。

注意. 第四比例項與第三比例項之意義有區別，不可誤解。

12. 定理 3. 量 A 與 B 之比，A 及 B 能以同一之單位計之，其比等於以 B 之測度除 A 之測度之商。

證明. 假設 $A = aP$, $B = bP$.

$$\text{因 } P = \frac{1}{b}B \quad \therefore A = a\left(\frac{1}{b}B\right) = \frac{a}{b}B.$$

$$\text{故依比之定義 } \frac{A}{B} = \frac{a}{b}.$$

系. 若 A, B, C, D 為比例量, A, B 以同一之單位計之測度為 a, b . C, D 以同一之單位計之測度為 c, d , 必有次之關係.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

證明. 比例式為 $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, 因 $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, $\frac{C}{D} = \frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

此最後之式, 乃代數學中所常用之比例式也.

故量之比之研究, 得歸於測度之比 (即數之比) 之研究.

即代數學中關於數之比之事項, 亦得視為關於量之比之事項.

今以代數學中最重要之定理, 述之於次.

13. 定理 4. a, b, c, d, \dots 表任意之數, 有 I 至 IX 之九種變化如次.

I. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 為 $ad = bc$.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 bd 乘之, 即得終結之式.

II. 從 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 知 $a \cong b$ 則 $c \cong d$.

證明. $a > b$, 因 $\frac{a}{b} > 1$, 則 $\frac{c}{d} > 1$. $\therefore c > d$.

餘可依同法證明.

III. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

此名曰反轉之理.

證明. 以假設之式之兩邊各除 1, 即得終結之式.

IV. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

此名曰更迭之理.

證明. 假設之式之兩邊, 同以 $\frac{b}{c}$ 乘之, 即得終結之式.

V. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

此名曰合比之理.

VI. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$.

此名曰分比之理.

VII. 化 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 爲 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$.

上之三定理, 讀者試自證明.

VIII. 設 $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, 則 $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''} = \frac{a}{b}$.

此名曰加比之理.