普通高等教育"十五"国家级规划教材

数学分析（下册）

欧阳光中 姚允龙 周 渊 编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学分析（下册）

欧阳光中　姚允龙　周　渊　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上、下册)/欧阳光中等编著.—上海:复旦大学出版社,2003.10
普通高等教育"十五"国家级规划教材
ISBN 7-309-03570-4

Ⅰ.数… Ⅱ.欧… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 012844 号

数学分析(上、下册)

欧阳光中 姚允龙 周 渊 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 周 进
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海复旦四维印刷有限公司
开 本 787×960 1/16
印 张 50 插页 4
字 数 921 千
版 次 2003 年 10 月第一版 2003 年 10 月第一次印刷
印 数 1—5 100

书 号 ISBN 7-309-03570-4/O·305
定 价 68.00 元(上、下册)

内容提要

本书是作者在20世纪90年代初编写的同名教材的基础上，结合教学实践，进行了更为全面的探索和改革，经过了大量的教学研究，并参阅了国内外最新出版的教材后编写的.全书体系结构的安排充分考虑了教学效果的需要，而且增加了现代数学分析的一些方法和内容.为了帮助读者深入理解有关的概念和方法，行文中不时穿插了许多启发读者思考的练习，每章后还附有精选的习题.为了方便读者使用本书，在书末提供了较为详细的习题解答.本书主要内容是极限理论、实数系系基本理论、一元微积分学、级数论、多元微积分学、曲线曲面积分、含参变量积分以及Lebesgue积分初步等.

本书适用于数学、统计学、计算机科学、管理科学等专业学生作为数学分析课程的教材，可以作为相应专业学生报考研究生的辅导书或参考书，也可以作为其他科技人员自学数学分析的读本.

目　　录

第十六章 Euclid 空间上的点集拓扑

§16.1 Euclid 空间上点集拓扑的基本概念

一、集合的直积

设 A, B 是两个非空集合,我们可以用 A, B 构造一个新的集合,新集合的元素是(a, b),其中 $a \in A$, $b \in B$, 即新集合的元素是二元的,它有两个坐标,第一个坐标是 a, $a \in A$, 第二个坐标是 b, $b \in B$, 这个新的集合称为 A 和 B 的直积,记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

例如斗兽棋,所有的棋子由红蓝两种颜色组成,每种颜色又有 8 个棋子:象,狮,…,鼠. 可以用直积把一副斗兽棋写出来:设

$$A = \{\text{红}, \text{蓝}\},$$
$$B = \{\text{象}, \text{狮}, \cdots, \text{鼠}\},$$

那么

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(\text{红}, \text{象}), (\text{红}, \text{狮}), \cdots, (\text{红}, \text{鼠}), \\ &(\text{蓝}, \text{象}), (\text{蓝}, \text{狮}), \cdots, (\text{蓝}, \text{鼠})\}. \end{aligned}$$

$A \times B$ 就是一副斗兽棋.

再如设 $A = [a, b]$, $B = [c, d]$ 都是闭区间,那么

$$A \times B = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\},$$

在平面几何中, $A \times B$ 是平面上一个包含边框的矩形(图 16-1).

同样

$$(a, b) \times (c, d) = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$$

是平面上一个不包含边框的矩形.

不难将 $A\times B$ 拓广到 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$:

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k)\mid a_1\in A_1,a_2\in A_2,\cdots,a_k\in A_k\},$$

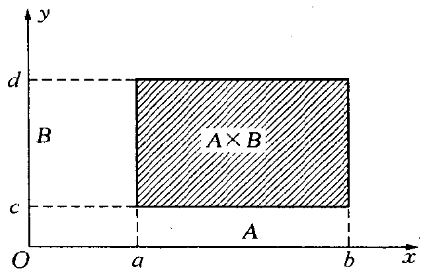

图 16-1

可见 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 中的元素是 k 元的,它的第 i 个坐标是 a_i, $a_i\in A_i(i=1,2,\cdots,k)$.

例如,设 $A=[a,b]$, $B=[c,d]$, $C=[e,f]$ 都是闭区间,那么 $A\times B\times C$ 在三维空间中是一个包含边界面的长方体.

再如,设 $\mathbf{R}$ 是所有实数组成的集合,那么

$$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

就是平面上所有的点组成的集合,其元素是(x,y),即有坐标 x 和坐标 y 两个坐标.

二、Euclid 空间

设 $\mathbf{R}$ 是所有实数组成的集合. 令

$$\mathbf{R}^n=\overbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}^{n\text{个}}$$

$$=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid-\infty<x_i<+\infty,i=1,2,\cdots,n\},$$

其元素是 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,称它是 $\mathbf{R}^n$ 中的一点,它有 n 个坐标,x_i 是它的第 i 个坐标,也可以称 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量,n 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的维数.

上面写出的 $\mathbf{R}^n$ 只是一个集合,它只是 $\mathbf{R}$ 的 n 次直积. 现在,在 $\mathbf{R}^n$ 内装备一种代数结构,也就是说在 $\mathbf{R}^n$ 内规定某些运算,并使它们服从某些规则. 在这里,我们规定两种运算:加和数乘,设

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n,\ \lambda\in\mathbf{R},$$

定义加法和数乘运算分别为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

很明显 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, $\lambda\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$. 容易验证, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, 下面的运算

成立

(1) 交换律：$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$;

(2) 结合律：$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$;

(3) $\mathbf{R}^n$ 中 $\exists$ 零向量 $\mathbf{0}$，使 $\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

(4) $\exists\,\boldsymbol{x}$ 的负向量 $-\boldsymbol{x}$：$(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(5) $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$;

(6) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$;

(7) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$;

(8) $(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$.

于是 $\mathbf{R}^n$ 成为线性空间.

为了研究 $\mathbf{R}^n$ 中的极限理论，我们还必须在 $\mathbf{R}^n$ 中定义距离. 在此之前，我们首先在 $\mathbf{R}^n$ 上定义两个向量的内积.

设

$$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbf{R}^n,$$

定义 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积

$$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n,$$

它是一个实数. 内积又可记为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 或 $\boldsymbol{xy}$. 这一定义不过是普通解析几何中两个向量内积的直接拓广. 如同在解析几何中一样，内积满足下列性质：对 $\mathbf{R}^n$ 中任何 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ 和任何实数 λ，有

(1) $\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\rangle$;

(2) $\langle\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}\rangle$;

(3) $\langle\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle=\lambda\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle$;

(4) $\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle\geqslant 0$, $\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

到这里为止，我们已经做了三件事，第一件是从集合 $\mathbf{R}$ 出发，利用集合的直积，构造出集合 $\mathbf{R}^n$，第二是在 $\mathbf{R}^n$ 上装备了一种代数结构，使它成为一个线性空间，第三是在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 的基础上装备了内积，使它成为具有内积的线性空间. 我们称这样的 $\mathbf{R}^n$ 是 **n 维 Euclid 空间**，简称欧氏空间.

三、Euclid 范数和距离

有了内积之后，就可以定义所谓 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的范数(即向量 $\boldsymbol{x}$ 的模长). 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n$，定义 $\boldsymbol{x}$ 的**范数** $|\boldsymbol{x}|$ 是

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle}$$

$$=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

很明显,它是解析几何中向量模长的直接拓广. 又称 $|\cdot|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclid 范数.

在解析几何学中,设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是两个向量,那么下列不等式成立

$$|\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|,$$

即两个向量内积的绝对值不超过两向量各自模长之乘积. 这一不等式又称为 Schwarz 不等式. 在一般的 Euclid 空间中,这个不等式也同样成立.

Schwarz 不等式 设 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, 则

$$|\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|.$$

证 对任何 $\lambda\in\mathbf{R}$, 有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\langle\lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\rangle\\&=\lambda^2\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle+2\lambda\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle+\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}\rangle.\end{aligned}$$

最后的式子是 λ 的二次三项式,而它的符号不变,所以其判别式小于或等于 0, 即

$$4\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle^2-4\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}\rangle\leqslant 0,$$

或者写成 $$\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle^2\leqslant\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\rangle\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}\rangle,$$

这就是 $$|\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\rangle|\leqslant|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|.$$

由范数立即可以引进距离. 设 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的距离是 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$. 用它们的坐标表示出来就是:设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$, 那么

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

这是解析几何中两点之间距离的直接拓广.

范数和距离有以下几个性质. 范数的性质有:

(1) $|\boldsymbol{x}|\geqslant 0$, $|\boldsymbol{x}|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$;

(2) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|\leqslant|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ (三角不等式);

(3) $|\lambda\boldsymbol{x}|=|\lambda||\boldsymbol{x}|$, λ 是任一实数.

性质(1)和(3)都是很明显的,性质(2)的证明留给读者.

由范数的性质立即得出距离的性质:

(1) $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geqslant 0$, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$;

(2) $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$（三角形不等式）；

(3) $|x-y| = |y-x|$.

四、邻域

和直线上的邻域完全相仿，可以引进 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 内的邻域概念. 设 $a \in \mathbf{R}^n$，对任意一个实数 $\delta > 0$，记

$$O_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x-a| < \delta\},$$

称 $O_\delta(a)$ 是点 a 的 δ **邻域**，或者称它是以点 a 为中心、以 δ 为半径的 n **维开球**. 从形式上看，它和直线上的邻域的表达形式是完全一样的，只不过在这里，a 和 x 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的点，$|\cdot|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclid 范数. $O_\delta(a) - \{a\}$ 称为点 a 的 δ 去心邻域.

用坐标写出来，设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则 $O_\delta(a) = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2\}$，在 $\mathbf{R}^3$ 中，它是一个通常的开球即不包含边界球面的球体；在 $\mathbf{R}^2$ 中，它是一个开圆即不包含边界圆周的圆；在直线上，它就是一个开区间. 因此，$\mathbf{R}^n$ 中的邻域（开球）不过是通常的开区间、开圆、开球的一个自然而直接的拓广.

五、收敛

有了距离或邻域的概念，就可以讨论分析学中的一个核心问题——收敛.

设点列 $\{x_k\} \subset \mathbf{R}^n$，$a \in \mathbf{R}^n$. 如果 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K$，$\forall k > K$，有

$$|x_k - a| < \varepsilon,$$

则称点列 $\{x_k\}$ **收敛**，收敛于 a，又称 a 是点列 $\{x_k\}$ 的极限，记为

$$\lim_{k \to \infty} x_k = a, \text{或 } x_k \to a \ (k \to \infty).$$

从形式上看，$\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{x_k\}$ 的收敛和直线上数列的收敛，在表达形式上两者是一样的，只不过在这里 x_k 和 a 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的点，$|\cdot|$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Euclid 范数.

点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a，还可以用邻域的语言表达如下：如果对点 a 的任何邻域 $O_\varepsilon(a)$，$\exists K$，$\forall k > K$，有 $x_k \in O_\varepsilon(a)$，则称 $\{x_k\}$ 收敛于 a.

很明显，上面用距离来表达和用邻域来表达是完全一样的.

同样，不难证明下列定理.

定理 1（极限的惟一性）　设 $\{x_k\} \subset \mathbf{R}^n$，$\{x_k\}$ 收敛，则其极限是惟一的. 即若设 $x_k \to a$，$x_k \to b$，则 $a = b$.

证　采用反证法，设 $a \neq b$，那么令 $\delta = |a-b|/3 > 0$，则

$$O_\delta(\boldsymbol{a}) \cap O_\delta(\boldsymbol{b}) = \varnothing \text{(图 16-2)},$$

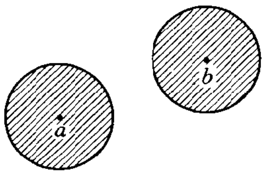

图 16-2

由于 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{b}$, 因此 $\exists K$, $\forall k > K$, 有

$$\boldsymbol{x}_k \in O_\delta(\boldsymbol{a}),\ \boldsymbol{x}_k \in O_\delta(\boldsymbol{b}),$$

这与 $O_\delta(\boldsymbol{a})$, $O_\delta(\boldsymbol{b})$不相交矛盾. 因此极限惟一.

定理 2(坐标的收敛) 设 $\boldsymbol{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$, $k = 1, 2, \cdots$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 则下列等价

(1) $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}(k \to \infty)$;

(2) $x_i^{(k)} \to a_i(k \to \infty)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

即$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛的充要条件是相应的坐标$\{x_i^{(k)}\}$收敛, $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我们把它的证明留给读者.

六、练习

1. 设 A, B 是两个集合,是否有 $A \times B = B \times A$?

2. 设 A, B, C 是三个集合,证明:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C).$$

3. 证明 Euclid 范数满足三角形不等式:

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n.$$

4. 证明:$\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$收敛的充要条件是相应的坐标$\{x_i^{(k)}\}$收敛, $i = 1, 2, \cdots, n$ (即定理 2).

5. 设 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}(k \to \infty)$, 证明: $|\boldsymbol{x}_k| \to |\boldsymbol{x}|$. 反之如何?

6. 定义 $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$,证明:它满足范数的三条性质.

七、内点、外点、边界点、极限点

内点、外点、边界点和极限点都是很形象很直观的概念,下面所做的只是用数学的语言将这些直观的概念表达出来.

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集,即 $S \subset \mathbf{R}^n$.

1. **内点**

设 $\boldsymbol{x} \in S$, 并且存在点 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S$, 则称 $\boldsymbol{x}$ 是 S 的一个**内点**(图 16-3). 换句话说,内点 $\boldsymbol{x}$ 是这样的点,它自身属于 S,并且它的近旁的一切点都属于 S,这就是名符其实的"内".

S 中所有内点的全体称为 S 的**内部**，记为 S^0. 譬如在直线上，任何区间 $\langle a, b\rangle$ 的内部是开区间 (a, b). 由 (a, b) 中有理数全体构成的集合的内部为空集.

2. **外点**

设 $\boldsymbol{y} \notin S$，并且存在 $\boldsymbol{y}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{y})$，使 $O_\delta(\boldsymbol{y}) \cap S = \varnothing$，（或者写为 $O_\delta(\boldsymbol{y}) \subset S^c$，$S^c$ 是 S 的补集，$S^c = \mathbf{R}^n - S$），则称 $\boldsymbol{y}$ 是 S 的一个**外点**（图 16-3）. 换句话说，外点 $\boldsymbol{y}$ 是这样的点，它自身不属于 S，并且它的近旁的一切点也不属于 S，这就是名符其实的“外”.

3. **边界点**

对点 $\boldsymbol{z}$（$\boldsymbol{z}$ 可能属于 S 也可能不属于 S），如果在点 $\boldsymbol{z}$ 的任何邻域 $O_\delta(\boldsymbol{z})$ 内，既有 S 中的点，又有非 S 中的点，也就是说

$$O_\delta(\boldsymbol{z}) \cap S \neq \varnothing,\ O_\delta(\boldsymbol{z}) \cap S^c \neq \varnothing,$$

则称 $\boldsymbol{z}$ 是 S 的一个**边界点**（图 16-3）. 并称 S 的所有边界点的全体是 S 的**边界**，记为 ∂S.

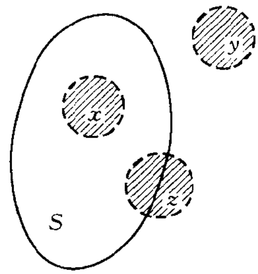

图 16-3

例如，在 $\mathbf{R}^2$ 中，设

$$S_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,\ x,\ y \text{ 都是有理数}\},$$

则

$$S_1 \text{ 的内部 } S_1^0 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\},$$

$$S_1 \text{ 的边界 } \partial S_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\},$$

$$S_2 \text{ 的内部 } S_2^0 = \varnothing,$$

$$S_2 \text{ 的边界 } \partial S_2 = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

又如在 $\mathbf{R}^3$ 中，如果仍旧设

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2,\ z = 0\},$$

那么在 $\mathbf{R}^3$ 中

$$S_1 \text{ 的内部 } S_1^0 = \varnothing,$$

$$S_1 \text{ 的边界 } \partial S_1 = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2,\ z = 0\}.$$

4. **极限点**

设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，$S \subset \mathbf{R}^n$，若 $\boldsymbol{x}$ 的任何邻域中总含有 S 中的点，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的极

限点. 若 $\boldsymbol{x}$ 的任何去心邻域中都有 S 中的点,则称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的聚点.

不难证明,S 中的点必为 S 的极限点. 若 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的极限点,则必有 S 中的一列 $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$,所以称 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的极限点. 注意极限点未必是 S 中的点.

由极限点的定义我们还可以知道,若 $\boldsymbol{x}$ 非 S 的极限点,则在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域中不含 S 中的点,即 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的外点.

称 $\boldsymbol{a}$ 为 S 的孤立点,若 $\boldsymbol{a} \in S$ 且存在一去心邻域 $O_\delta(\boldsymbol{a}) - \{\boldsymbol{a}\}$ 不含 S 的任何点.

八、开集

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个子集,如果 S 中的每一点都是 S 的内点,则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**开集**. 也就是说开集是由内点组成的,或者说 $S = S^0$.

例如,任何一个 n 维开球一定是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集,但开集未必是开球. 又如平面上不包含边界的矩形是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集, $\left\{(x, y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\right\}$ (a, b 是两个正数)也是 $\mathbf{R}^2$ 中的开集. 此外,整个 $\mathbf{R}^n$ 当然是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集. 从逻辑上讲空集 $\varnothing$ 也是开集.

定理 3 开集具有以下三条最重要的特征:

(1) 任意个开集之并集仍旧是开集.

即设 $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一族开集,Λ 是指标集,它可能是有限集也可能是无限集(可列无限或不可列无限),则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

(2) 有限多个开集之交集仍旧是开集.

即设 $O_1, O_2, \cdots, O_m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 m 个开集,则 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

(3) 整个 $\mathbf{R}^n$ 和空集 $\varnothing$ 都是开集.

证 (1) 对每一个 $\boldsymbol{x} \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, 则存在 $\lambda_0 \in \Lambda$, 使 $\boldsymbol{x} \in O_{\lambda_0}$. 已知 O_{λ_0} 是开集,所以存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset O_{\lambda_0}$, 从而有 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$, 这样便证明 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 中的每一个 $\boldsymbol{x}$ 都是 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 的内点,于是 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 是开集.

(2) 如果 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 是空集,则它是开集. 如果 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 非空,对每一个 $x \in \bigcap_{i=1}^m O_i$, 有 $\boldsymbol{x} \in O_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$, 而 O_i 都是开集,故存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) \subset O_i$, 取

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m),$$

有 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset O_{\delta_i}(\boldsymbol{x}) \subset O_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 所以 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset \bigcap_{i=1}^m O_i$, 这就证明了 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 中的每一个 $\boldsymbol{x}$ 都是 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 的内点,即 $\bigcap_{i=1}^m O_i$ 是开集.

(3) 是明显的.

利用定理 3 的性质(1),不难看出 $\mathbf{R}^n$ 中的任何开集都可以看作为许多大小不一的 n 维开球的并集,也可以看作为许多大小不一的 n 维开长方体的并集. 这里,n 维开长方体的定义是

$$\{\boldsymbol{x} = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

a_i, $b_i (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 都是常数. 因此,可以说开球或开长方体是 $\mathbf{R}^n$ 中最基本的开集,其他任何开集都可以看作为开球或开长方体的并集.

九、闭集

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集,如果它的补集 $S^c = \mathbf{R}^n \setminus S$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集,则称 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个**闭集**. 例如直线上的闭区间$[a,\ b]$,其补集$(-\infty,\ a) \cup (b,\ +\infty)$是直线上的开集,所以$[a,\ b]$是直线上的闭集. 又如平面上的点集 $S = \{(x,\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 内的一个闭集,这是因为 S 的补集$S^c = \{(x,\ y) \mid x^2 - y^2 > 1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 内的开集. 再如平面上的点集 $E = \{(x,\ y) \mid 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,$ x 和 y 都是有理数$\}$既非开集也非闭集.

在极限点的定义中,我们已经知道点集 S 的极限点 $\boldsymbol{x}$ 可能属于 S 也可能不属于 S. 但如果 S 是一个闭集,又如果 S 有极限点 $\boldsymbol{x}$,那么 $\boldsymbol{x}$ 必属于 S,这就是"闭"的含意,它对极限点是封闭的,闭集的极限点必在该闭集内. 用定理的形式写出来是:

定理 4　集 S 是闭集的充要条件是:S 的一切极限点必属于 S.

证　先证明必要性. 设 S 是闭集,其补集 S^c 是开集,则对 S^c 中的每一点 $\boldsymbol{x}$,存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S^c$, 由此可见,点 $\boldsymbol{x}$ 一定不是 S 的极限点. 也就是说,S 的极限点一定不在 S^c 中,从而必在 S 中.

再证明充分性. 设 S 的一切极限点都在 S 中,那么其补集 S^c 中的每一点 $\boldsymbol{x}$ 必定不是 S 的极限点,从而存在 $\boldsymbol{x}$ 的一个邻域 $O_\delta(\boldsymbol{x})$,在此邻域内没有 S 中的点,即 $O_\delta(\boldsymbol{x}) \subset S^c$, 由此可见 S^c 是开集,故 S 是闭集.

对任何集 S,记

$$\overline{S} = S \cup \{S\ \text{的一切极限点}\},$$

显然$\overline{S}$是一个闭集. 称$\overline{S}$是 S 的**闭包**. 例如直线上开区间$(a,\ b)$的闭包是闭区间$[a,\ b]$. 平面上的点集 $S = \{(x,\ y) \mid 0 \leqslant x,\ y \leqslant 1,\ x$ 和 y 都是有理数$\}$的闭包为 $\overline{S} = [0,\ 1] \times [0,\ 1]$.

容易知道,闭包$\overline{S}$又可以写为

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

十、区域

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个集合，如果对 D 内任何两点 x 和 y，都可以用 D 内的一条连续曲线 l 将 x 和 y 相连接，则称 D 是一个道路连通集（简称连通集，图 16-4）. 连通的开集称为**开区域**.

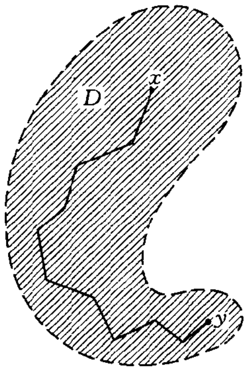

图 16-4

开区域 D 的闭包 $\overline{D}$ 称为**闭区域**，显然

$$\overline{D} = D \cup \partial D.$$

十一、练习

1. 设 $S \subset \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{x}$ 是 S 的极限点，证明：在 S 内存在点列 $\boldsymbol{x}_k (k=1, 2, 3, \cdots)$，使 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$.

2. 无限个开集之交集是否仍为开集？无限个闭集之并集是否仍为闭集？

3. 设 O 是开集，C 是闭集，证明：$O - C$ 是开集，$C - O$ 是闭集.

4. 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的无界点集，证明：存在 $\{\boldsymbol{x}_k\} \subset S$，$|\boldsymbol{x}_k| \to \infty$.

§ 16.2 Euclid 空间上点集拓扑的基本定理

一、几个等价的基本定理

在直线上，有下列几个等价的基本定理：单调有界数列的收敛定理、确界存在定理、区间套定理、Bolzano-Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理等等，它们都是实数系连续性（或完备性）的解析表达. 同样，在 Euclid 空间中，也有相应的几个等价的基本定理. 在没有逐个证明它们之前，先列出它们的结论. 为方便起见，这里仅在 $\mathbf{R}^2$ 中讨论. 很容易将 $\mathbf{R}^2$ 的情形直接推广到 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 中去. 对这些定理的证明，有的仅写出证明的关键，相信读者一看便知道它的证明，有的将详细写出.

定理 1（矩形套定理） 设 $\Delta_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一列闭矩形（图 16-5），满足：

(1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \cdots$；

(2) Δ_n 的直径 $\rho_n \to 0$，其中 $\rho_n = \sqrt{(b_n - a_n)^2 + (d_n - c_n)^2}$ 即为 Δ_n 的对角线的长度；

则交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ 是单点集.

证 将$\{[a_n, b_n]\}$和$\{[c_n, d_n]\}$分别利用直线上的区间套定理,便立即得出所要的结论.

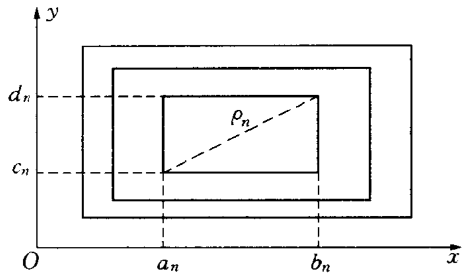

图 16-5

我们称 x 为点列$\{x_k\}$的极限点,若 $\exists$ 子点列 $x_{k_l}\to x$.

定理 2(Bolzano-Weierstrass 定理) $\mathbf{R}^2$ 中任一有界点列必存在收敛子点列,即有界点列必存在极限点.

证 设 $\boldsymbol{x}_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$为有界点列,显然$\{x_1^{(n)}\}$和$\{x_2^{(n)}\}$都是直线上的有界数列,再利用直线上的 Bolzano-Weierstrass 定理,$\exists$ 收敛子列

$$x_1^{(n_k)}\to\xi.$$

再从$\{x_2^{(n_k)}\}$又可挑出收敛子列,记$x_2^{(n_l)}\to\eta$. 合并之得$(x_1^{(n_l)}, x_2^{(n_l)})\to(\xi, \eta)$,这就是所要的结果.

定理 3(Cauchy 收敛定理) $\mathbf{R}^2$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$收敛的充要条件是:$\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 有 $|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_N|<\varepsilon$.

证 设 $\boldsymbol{x}_n=(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$,和证明定理1、定理2相仿,对直线上的数列$\{x_1^{(n)}\}$和$\{x_2^{(n)}\}$分别利用实数系的 Cauchy 收敛定理,便立即得出 $\mathbf{R}^2$ 中点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$的 Cauchy 收敛定理.

定理 4(Heine-Borel 定理) 设 S 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集,则 S 的任意开覆盖必存在有限子覆盖.

证 S 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集,则存在一个闭矩形 $\Delta_1=[a_1, b_1]\times[c_1, d_1]\supset S$. 又设$\{O_\alpha, \alpha\in A\}$是 S 的任意一个无限开覆盖. 下面证明在$\{O_\alpha, \alpha\in A\}$中一定可以选取出 S 的有限开覆盖.

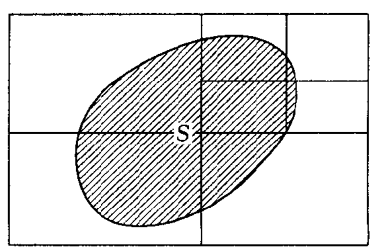

图 16-6

采用反证法. 设从$\{O_\alpha, \alpha\in A\}$中无法选取出 S 的有限开覆盖. 将闭矩形 Δ_1 四等分(图 16-6),那么至少有一个闭子矩形 Δ_2,使得在$\{O_\alpha, \alpha\in A\}$中无法选取出有限个开集