

机械制造工艺学

第三册

陈懋圻 主编

大连工学院

498924
图书馆藏

机械制造工艺学 (三)

编者: 陈 懋 圻 主 编
出版: 大 连 工 学 院
印刷: 大连工学院印刷厂
发行: 大连工学院教材料

1982 年 1 月出版 1982 年 2 月印刷
787×1092 16/1 印数 1750 册

0.85元 (1-3)
¥3.46 (共叁册)

下 册 目 录

第六章 切削加工中的振动

- § 6—1 机械振动的基本理论····· (1)
- § 6—2 切削过程中的颤振····· (17)
- § 6—3 减小振动、提高稳定性的工艺途径····· (34)
- § 6—4 振动的综合分析和判断····· (40)

第七章 精密工艺

- § 7—1 概述····· (47)
- § 7—2 精密加工方法····· (49)
- § 7—3 精密零件加工实例····· (59)

第八章 圆柱齿轮加工工艺

- § 8—1 概 述····· (65)
- § 8—2 滚齿工艺····· (66)
- § 8—3 插齿工艺····· (82)
- § 8—4 剃齿工艺····· (84)
- § 8—5 磨齿工艺····· (92)
- § 8—6 精密蜗轮的加工····· (102)

第六章 切削加工中的振动

在切削加工过程中常常会产生振动，这在一般情况下是一种破坏正常切削过程的极其有害的现象。在车削、镗削和铣削时，发生的振动通常比较剧烈，它产生波纹度使加工表面光洁度恶化；它使机床和刀具的使用寿命缩短，并且造成噪音污染，危害工人健康。为了避免振动的产生，常常不得不降低切削用量，因而也就降低了生产率。磨削时的振动虽然不那么剧烈，但由于磨削一般用于精加工，所以即使有轻微的振动，也会使加工表面质量达不到要求。

切削过程中的振动是一种十分复杂的物理现象，有些类型振动的机理至今仍没有研究得十分透彻，因此随着机械加工工艺日益向高生产率、高精度和自动化方向发展，如何防止和消除切削过程中的振动，就日益成为紧迫的研究课题了。

为了进一步阐明切削过程中各种类型振动的物理现象及其本质，首先对机械振动的基本理论作一个扼要的复习和阐述。

§ 6—1 机械振动的基本理论

一、机械振动的基本类型

常见的机械振动有三类：即自由振动、强迫振动和自激振动。

(1) 自由振动是一种最简单的振动。如图 6—1 所示，如果把固定在板弹簧末端上的钢球从其静止位置 0 点扳到 0' 点，然后突然松开，钢球便会相对于 0 点作自由振动。振动的频率（每秒钟振动次数）只取决于振动系统的刚度和质量，叫做固有频率。自由振动在振动过程中没有外来能量的补充，由于系统总是存在着阻尼的，所以，振动就逐渐衰减。

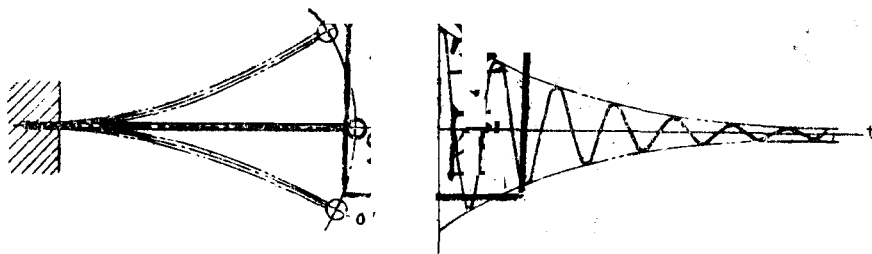


图 6—1. 自由振动及其衰减现象

在切削过程中，当切削力产生一个突然的波动时（例如车削一个带键槽的轴，车刀切到槽的一瞬间），或者工艺系统受到一个外界冲击时，工艺系统便会产生自由振动。这种振动

往往是迅速衰减的，所以一般说来对切削过程没有什么影响，但在某些条件下，它可能诱发自激振动。

(2) 强迫振动是一种由于外界周期性干扰力的作用而引起的不衰减的振动。如图 6—2 所示，若安装在简支梁上的电动机的转子不平衡，电机旋转时便会产生一个离心力 P ， P 力在 x 方向的分力 $p \cos \omega t$ (ω —转子角速度) 就是梁的外界周期性干扰力，它使简支梁在 x 方向产生稳定的不衰减的振动。强迫振动的两个重要特点是：① 系统的振动频率等于外界周期性干扰力的频率。在上面的例子中，梁的振动频率就等于电动机的每秒回转数。② 当外界周期性干扰力的频率接近或等于系统的固有频率时，将出现共振现象，此时振幅显著增大，可能使振动系统受到严重破坏。

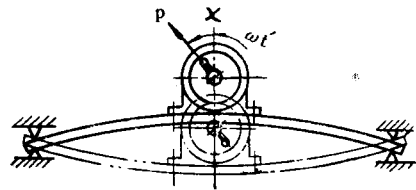


图 6—2. 强迫振动示例

实践证明，机床转动部件的不平衡，常常是加工中出现强迫振动的重要原因。

(3) 自激振动是自然界和工程界常见的现象。例如用乐弓以均匀的速度拉过小提琴的弦，在摩擦力的作用下，琴弦会发生振动而发生声音。又例如机床工作台在低速运动时常会出现的爬行现象也是一种自激振动。在这种情况下，即使驱动机构的速度是非常均匀的，工作台也出现跳跃式的爬行。在切削加工时，刀具和工件之间也会产生自激振动，称之为颤振。自激振动的特点是：① 它不是由外界周期性干扰力所引起，而是振动过程本身存在一种机制，它能自行将外界均匀输入的能量转化为产生和维持振动的交变力，所以叫做自激振动。② 它是不衰减的振动。③ 它的频率接近于固有频率（不等于固有频率，最常见的是略大于固有频率）。关于颤振的产生原因及其分析，在 § 6—2 中再详细阐述。

二、单自由度系统的振动。

1. 振动系统的简化

实际的工艺系统常是一个非常复杂的振动系统，要对它进行精确的数学分析常常是不可能的。为了研究和揭示振动现象的本质，往往把它简化成一个或若干个简单的振动系统，分别加以研究，然后再加以综合分析。

如图 6—2 所示的看起来似乎很简单的振动系统，为了便于数学分析，也需要把它简化。如果不考虑离心力在水平方向上的分力所引起的振动，则可简化成图 6—3 所示的等效系统。其中 m 是整个系统的等效质量， k 是整个系统的等效弹簧刚度， c 为整个系统的等效粘性阻尼系数， $p \cos \omega t$ 为外激振力（即外界周期性干扰力）。在这样一个简化了的理论模型中，弹簧是没有质量的，质点是没有弹性的，而阻尼器则既无质量又无弹性。模型化了的等效系统和原来系统在动态特性上的符合程度取决于：

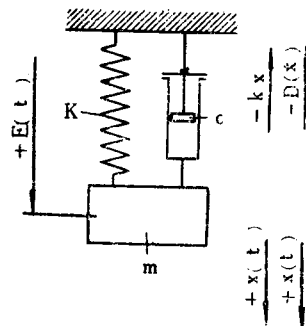


图 6—3 单自由度振动系统

- ① “弹簧”的质量和振动质量相比是否可以忽略不计；
- ② 振动物体在其它方向上的运动是否可以忽略不计；

③ 所假设的阻尼特性是否符合实际情况。

在图 6—3 所示的模型中, 振动系统在各瞬时的位置只要一个单独的座标 x 即可确定, 所以叫做单自由度系统。单自由度系统的振动理论是一切复杂的振动系统的振动理论的基础, 我们应该很好的掌握它。

2. 基本运动方程式

系统振动时的受力情况如图 6—3 所示, 假设物体在激振力作用下从其静止位置移开, 则有下列几个力作用在该物体上: ① 物体的重力; ② 与物体的位移 x 成正比的弹簧恢复力 kx ; ③ 与物体的运动速度 $\dot{x}$ 成正比的粘性阻尼力 $c\dot{x}$; ④ 作用在物体上的外激振力 $P\cos\omega t$ 。

物体的重力只影响物体静止时的位置 (平衡点的位置), 即只影响座标原点的位置, 所以在研究动态过程时可不用考虑。

假设物体此时的加速度为 $\ddot{x}$, 则根据牛顿第二定律可得到系统的力平衡方程式如下:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + P\cos\omega t,$$

kx 和 $c\dot{x}$ 前的负号表示这两个力的作用方向与运动方向相反。移项后得:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P\cos\omega t, \quad (6-1)$$

这就是单自由度系统的基本运动方程式。

3. 无阻尼自由振动

假定系统没有外激振力, 即 $P=0$, 同时阻尼系数 $c=0$, 则方程 (6—1) 变为:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (6-2)$$

这就是典型的无阻尼自由振动方程式。

令
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

则上式化为
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

此方程的通解为:

$$x = X \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (6-3)$$

这是一个简谐运动的方程式。若有一个质点 M' 以角速度 ω_0 (弧度/秒) 和半径 X 逆时针作圆周运动, 则 M' 点在 x 座标轴上的投影 M 点的运动规律就符合公式 (6—3)

(图 6—4)。由公式 (6—3) 可知, 当 $t=0$ 时,

$$x_0 = X \cos(-\theta) = X \cos\theta,$$

即 M 点的初始位置不是在它的平衡位置 (座标原点 0) 上。 θ 角叫做初始相位角。 M' 点绕圆心旋转一周, M 点完成一次振动, 它所需要的时间叫做周期 T (秒),

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{秒})。 \quad (6-4)$$

周期的倒数 (即每秒钟振动的次数) 称为频率 f_0 。

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{次/秒, 或赫})。 \quad (6-5)$$

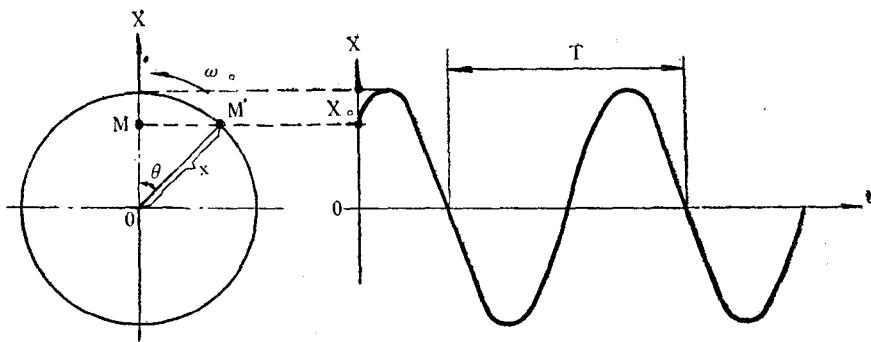


图 6-4 无阻尼自由振动 (简谐运动)

可见, ω_0 或 f_0 只与振动系统的弹簧刚度 k 和质量 m 有关, 而与振动的初始条件无关, 所以我们把 ω_0 称为系统的固有圆频率或固有角频率, 把 f_0 称为系统的固有频率, 这是振动系统的一个非常重要的参数。

振幅 X 和初始相位角 θ 由振动的初始条件决定, 即当 $t=0$ 时,

$$\begin{aligned} x_0 &= X \cos(\omega_0 t - \theta) \big|_{t=0} = X \cos \theta \\ \dot{x}_0 &= -X \omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) \big|_{t=0} = X \omega_0 \sin \theta \end{aligned}$$

解上述联立方程可得:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0} \quad (6-6)$$

无阻尼自由振动的振幅在振动过程中始终保持不变, 因为在这种振动中没有任何形式的阻尼, 除初始时刻有能量输入外, 在振动过程中没有任何能量的输入和输出。这是一种“理想的”振动, 它并不存在于自然界中, 但它是研究其它类型振动的基础。

4. 有粘性阻尼的自由振动

实际的振动系统中总是存在着阻尼的, 所以实际的自由振动都是要衰减的。实践中所遇到的阻尼是多种多样的: ① 干摩擦阻尼, 阻尼的大小主要决定于摩擦副的材料及法向力, 一般与相对速度无关; ② 非粘性流体阻尼, 例如物体在空气中高速运动所受到的阻力, 其大小近似与速度的平方成正比; ③ 粘性液体阻尼, 阻尼的大小与运动的速度成正比。由于利用液体的粘性所造成的阻尼都具有这种性质, 所以凡是具有这种性质的阻尼通称为粘性阻尼; ④ 材料的内摩擦阻尼, 决定于材料的性质, 阻尼与振幅的平方成正比。

实际振动系统中常常同时存在着几种阻尼, 由于粘性阻尼遇得最多, 所占比例一般也较大, 在数学处理上也较方便, 因此通常都以等效粘性阻尼来表示实际结构中的阻尼。由于实际结构中的阻尼都是比较小的, 因此这样的处理是接近实际情况的。

具有粘性阻尼的单自由度自由振动的方程式为:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (6-7)$$

令 $\delta = \frac{c}{2m}$, δ 称为衰减常数, 则上式化为

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6-8)$$

此微分方程的解有三种可能的不同情况:

- (1) $\delta^2 - \omega_0^2 > 0$, 即阻尼很大时, 所得的解表明不可能产生振动;
 (2) $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$, 即临界阻尼时, 所得的解表明也不可能产生振动;
 以上这两种情况既然都不会振动, 所以我们不作深入分析。
 (3) $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, 即阻尼较小时, 方程 (6—8) 的解为:

$$x = X e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \theta), \quad (6-9)$$

式中 $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 。 (6-10)

振幅 X 和初始相位角 θ 由初始条件决定:

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{(\dot{x}_0 + \delta x_0)^2}{\omega_d^2}}, \quad (6-11)$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\dot{x}_0 + \delta x_0}{\omega_d x_0}. \quad (6-12)$$

由公式 (6—9) 可知, 振幅是逐渐衰减的,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X e^{-\delta t} = 0,$$

所以又叫做衰减振动。实际上不需要 $t \rightarrow \infty$ 时振动才完全消失, 而在一定时间后振动就会完全消失。衰减常数 δ 越大, 衰减得越快, δ 大到一定程度, 实际上就不会发生振动。

图 6—5 所示就是方程 (6—9) 的图形, 虚线表示的是振幅衰减曲线。

前面已经提到, 当 $\delta^2 - \omega_0^2 \geq 0$, 也即 $\frac{\delta}{\omega_0} \geq 1$ 时, 系统不振动; 当 $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$, 也即 $\frac{\delta}{\omega_0} < 1$ 时, 系统才可能振动; 所以把 $\frac{\delta}{\omega_0} = 1$ 的状态叫做临界状态, 令并 $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ 称为阻尼比, 是一个无量纲的物理量, 它也是振动系统中一个很重要的参数。设临界状态时的阻尼系数为 c_c , 衰减常数为 δ_c , 此时 $\delta_c = \omega_0$, 可见 $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\delta_c} = \frac{c/2m}{c_c/2m} = \frac{c}{c_c}$, 即说明阻尼比 D 就是振动系统阻尼系数与其临界阻尼系数之比, 表示了振动系统阻尼的相对强度。

有粘性阻尼的自由振动的固有角频率

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 D^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}, \quad (6-13)$$

可见它比无阻尼系统的固有频率要小一些, 而当阻尼较小时 (大约到 $D=0.2$), 可以近似地认为有阻尼和无阻尼的固有频率是相等的。

5. 有粘性阻尼的强迫振动

公式 (6—1) 即为激振力直接作用在振动物体上的有粘性阻尼的强迫振动的微分方程式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P \cos \omega t, \quad (6-14)$$

上式的通解为:

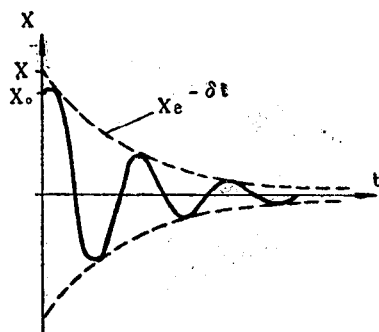


图 6—5 有粘性阻尼的自由振动 (衰减振动)

$$x = X_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \theta) + X \cos(\omega t - \Phi) \quad (6-15a)$$

解的前一部分表示具有粘性阻尼的自由振动(图 6-6b), 经过短时间后该振动就会消失。解的第二部分是有粘性阻尼的强迫振动的稳态解, 它是频率等于外加激振力频率 ω 的稳定的简谐振动(图 6-6a)。二者叠加后的振动过程如图 6-6c 所示, 叫做强迫振动的初始响应过程。一般我们不去研究这一初始响应过程, 我们感兴趣的是稳定振动过程。因此只研究其稳态解:

$$x = X \cos(\omega t - \Phi)。 \quad (6-15b)$$

式中 X 为强迫振动的振幅, 将 (6-15b) 代入, (6-14) 化简可得

$$X = \frac{P}{k} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4D^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (6-16)$$

式中的 $\frac{P}{k}$ 就是等效弹簧刚度为 k 的振动系统

在静态力 P 作用下的静态变位, 令 $X_{st} = \frac{P}{k}$, 而系统在激振力 $P \cos \omega t$ 作用下产生的强迫振动的振幅(动态变位) X 与 X_{st} 的比值叫做振动系统的动态放大系数 V_1 。

$$V_1 = \frac{X}{X_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4D^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad (6-17)$$

式 (6-15) 中的 Φ 角为强迫振动的位移与外加激振力在时间上滞后的相位角, 注意它和自由振动时的初始相位角 θ 的含义是不同的。关于 Φ 角的物理意义在后面再进一步说明。

$$\Phi = \tan^{-1} \frac{2D \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}。 \quad (6-18)$$

从式 (6-17) 和 (6-18) 可以清楚地看出, 强迫振动的动态放大系数 V_1 , 和相位角 Φ 仅仅是 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 和 D 的函数。

(1) 强迫振动的幅频特性曲线

为了更直观地表达这种函数关系, 以频率比 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 为横座标, 以动态放大系数 V_1 为纵座标, 则可得到如图 6-7 所示的公式 (6-17) 的曲线。由于 V_1 的变化实质上反映了振幅的变化, 所以习惯上把这条曲线称为幅频特性曲线。

曲线说明了强迫振动的几个重要特性:

- ① 在阻尼比 D 较小时 ($D \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时), 曲线都有一个最大值 V_{1max} 。

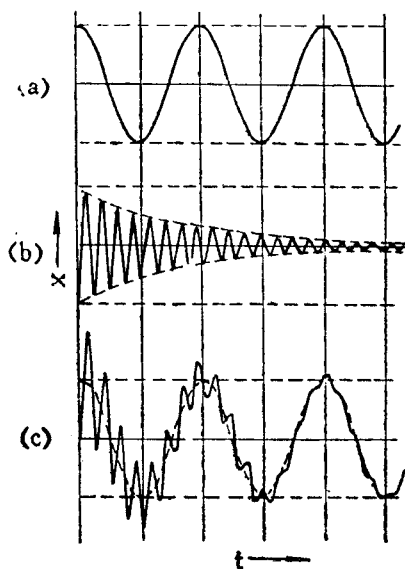


图 6-6 初始响应过程

令

$$\frac{dV_1}{d\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = 0,$$

可求出当

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-2D^2} \text{ 时,}$$

$$V_{1\max} = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} \quad (6-19)$$

(请注意并不是 $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ 时 $V_1 = V_{1\max}$)

图中的虚线表示不同的 D 的 $V_{1\max}$ 轨迹。

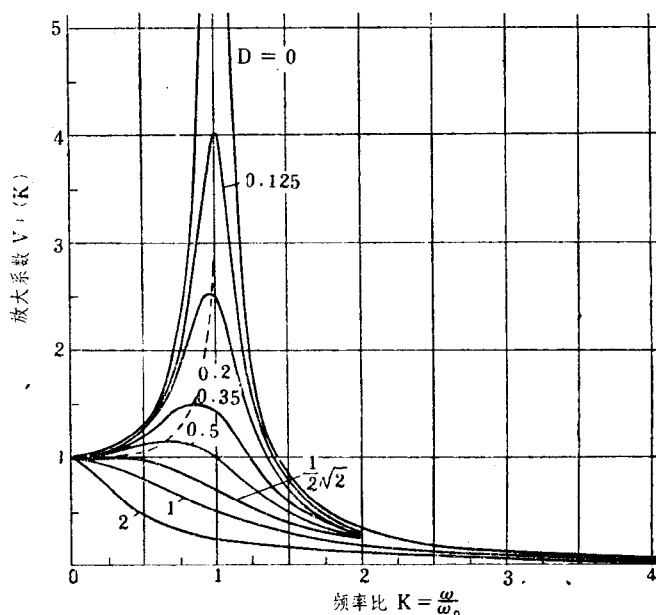


图 6-7 幅频特性曲线

② 在 $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ 的附近, 当 D 较小时, $V_{1\max}$ 总是大于 1, 也就是说, 此时由激振力 $p \cos \omega t$ 所引起的动态变位 X 大于可能由静态力 p 所引起的静态变位 x_{st} 。当 D 很小时 (例如 $D < 0.2$ 时), $V_{1\max}$ 可以达到很大的数值。也就是说, 当激振力的频率等于振动系统 (无阻尼) 固有频率时, 小的激振力可以引起很大的振幅, 这就是所谓的共振现象, 这在强迫振动过程中必须特别加以注意。

共振时的动态放大系数 (略去 D^2 项) 是:

$$V_{1\max} \approx \frac{1}{2D}。$$

③ 理论上当 D 非常小时, $V_{1\max}$ 可达到非常大的数值, 但实际上是不可能的, 因为在振幅增大的过程中, 可能发生三种情况:

i) 振幅大到一定程度后, 系统中的弹性元件变形将超出虎克定律的范围, 弹性力不再

与位移成线性关系。

ii) 振幅大到一定程度后, 阻尼力不再与速度成线性关系, 阻尼力将比速度增加得更快, 消耗更多的能量。

iii) 振幅大到一定程度后, 系统阻尼所消耗的能量将大于激振力源所能供应的能量。

第一种情况将使振动系统的弹性元件破坏, 后两种情况都使振幅的扩大受到限制。

④ 在 $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$ 时, 放大系数 $V_1 \rightarrow 1$ 。这是因为激振力的频率极低而近似于静载荷, 振幅接近于 P 力所引起的静变位 x_{st} 。这个区域称为静力区。

⑤ 在 $\frac{\omega}{\omega_0} > 2$ 时, 阻尼比 D 对放大系数 V_1 的影响变小, 同时 V_1 也很小 ($\ll 1$), $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ 时, $V_1 \rightarrow 0$ 。这说明, 当 $\omega \gg \omega_0$ 时, 振动系统对激振力将不产生响应。这个区域称为惯性区。

(2) 强迫振动的相频特性曲线

若以 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 为横座标, 以强迫振动的位移滞后于激振力的相位角 Φ 为纵座标, 则可得到如图 6—8 所示的公式 (6—18) 的曲线。这条曲线进一步说明了强迫振动的另外几个重要特性:

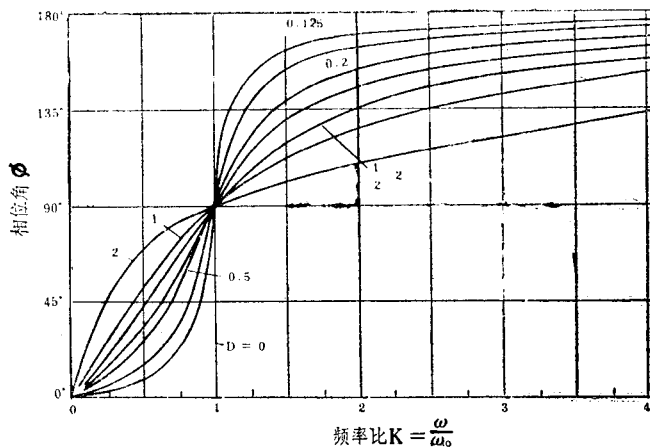


图 6—8 相频特性曲线

① 不管系统的阻尼比 D 的大小如何, 当 $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ 时, 所有的曲线都通过 $\Phi = 90^\circ$ 这一点。也就是说当系统发生共振时, 振动的位移大约滞后于激振力 90° 。它的物理意义如图 6—9b 所示。

我们已经知道, 激振力是按 $P \cos \omega t$ 规律变化, 而强迫振动的位移是按 $X \cos(\omega t - \Phi)$ 规律变化, 所以如果 $\Phi = 90^\circ$, 则当 $\omega t = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ \dots$ 时, $P \cos \omega t$ 达到正或负的最大值, 而 $X \cos(\omega t - 90^\circ)$ 则都为零; 反之, 当激振力已变到零时, 振动位移才达到最大值。由图 6—9b 可以清楚地看到这种滞后 90° 的情况。

② $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0$ 时, $\Phi \rightarrow 0$, 也就是说当激振力的频率很低时, 振动位移与激振力基本是同相的, 二者同时达到正最大值或负最大值。在 $0 < \frac{\omega}{\omega_0} < 1$ 范围内, $0 < \Phi < 90^\circ$, 相位关系见图 6—9a。

③ 当 $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty$ 时, $\Phi \rightarrow 180^\circ$, 此时当激振力达到正最大值时, 振动位移则正好达到负最大值。也就是说激振力的方向与振动位移的方向始终是相反的。在 $1 < \frac{\omega}{\omega_0} < \infty$ 范围内, $90^\circ < \Phi < 180^\circ$, 其相位关系见图 6—9c。

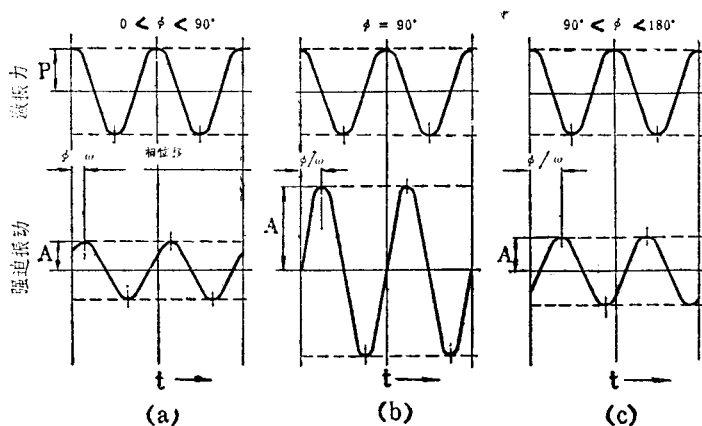


图 6—9 相位角 Φ 的物理意义

(3) 强迫振动的幅相特性曲线 (谐波响应轨迹)

从前述幅频特性曲线和相频特性曲线可以看出, 强迫振动的振幅和相位都和频率比 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 有关, 因此可以 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 为媒介, 把振幅和相位二者之间的对应关系表示出来, 得到所谓幅相特性曲线 (或称为谐波响应轨迹)。这不是一条新的曲线, 但对于分析振动系统的动态特性是非常有用的, 可以说在机床和切削过程动态特性的研究领域里, 碰到最多的就是这种曲线。

图 6—10 所示为如何从幅频特性曲线 (图 6—10a) 和相频特性曲线 (图 6—10b) 合成得到幅相特性曲线 (图 6—10c) (此处 $D=0.05$, 若 D 不同, 曲线的形状也不同)。例如 $\frac{\omega}{\omega_0}=0.9$ 时, $V_1=4.76$, $\Phi_1=28^\circ 10'$, 在幅相特性曲线上以矢量 OA 的长短表示 V_1 的大小, 以 OA 与实轴之间的夹角表示此时振幅与激振力 (以矢量 OB 表示) 之间的相位差 Φ_1 。随着 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 的变化, 矢量 OA 的端点所形成的轨迹就是幅相特性曲线, 频率比 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 则以刻度的方式标在轨迹相应的点上。可见, 在这条曲线上可以一目了然地看到 V_1 (或振幅)、 Φ_1 和 $\frac{\omega}{\omega_0}$ 三者的关系。例如在共振区附近 (即 $\frac{\omega}{\omega_0}=1$ 左右), 频率比的刻度变得较稀, 它说明在这个区域里, 激振频率较小的变化可以引起振幅和相位角的较大幅度的变化。

幅相特性曲线的横座标轴习惯上称为实轴, 纵座标轴称为虚轴, 这是因为矢量在数学上常常用复数来表示。在本章内我们不打算过多地依赖于数学推导, 所以没有采用复数这一工具。

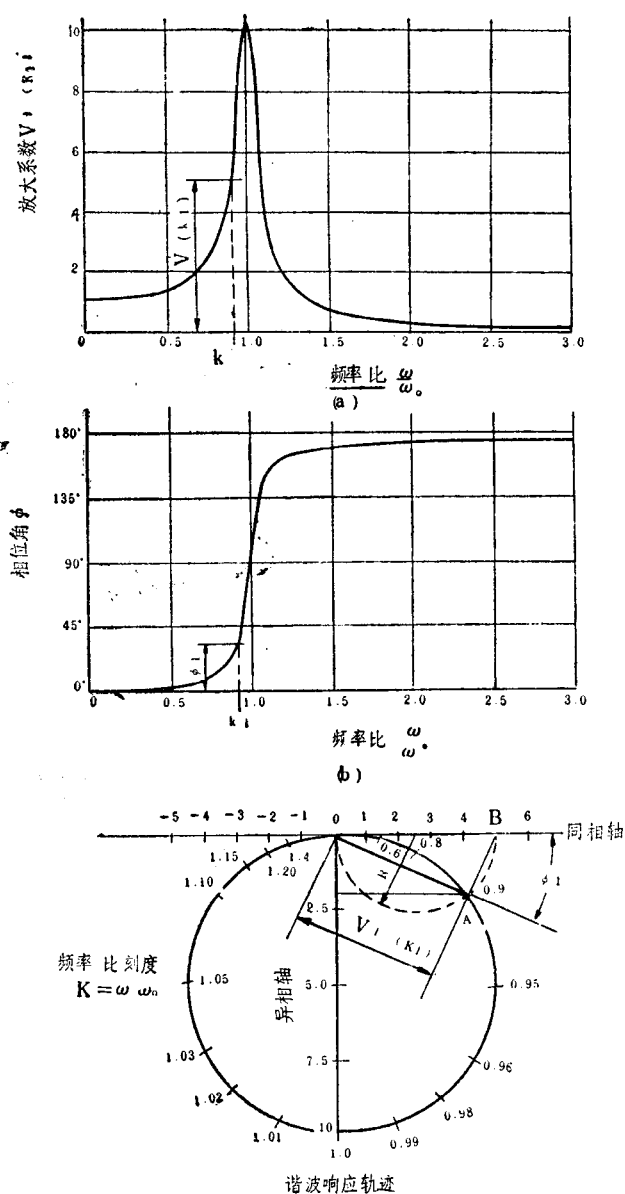


图 6-10 幅相特性曲线与幅频特性曲线及相频特性曲线的关系

幅相特性曲线的形状随着 D 的不同而不同, 图 6-11 给出了 $D=0.25-1.25$ 的单自由度系统的幅相特性曲线, 当 D 越小时, 曲线在共振区的形状越接近于圆。

需要指出, 实际的振动系统往往是很复杂的多自由度系统, 很难用解析的方法求出其各种振动特性曲线, 往往是通过激振试验得出振动特性的实验曲线, 然后再根据这些曲线去求出振动系统的各种参数。

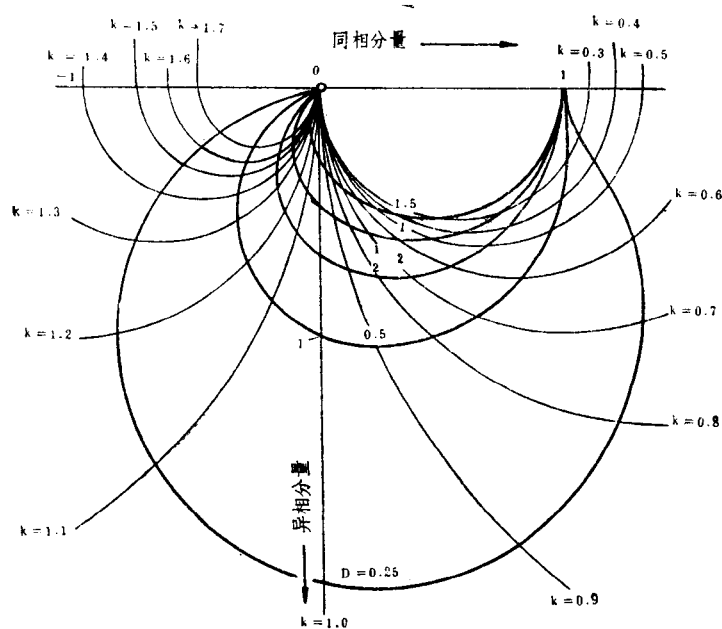


图 6-11 $D=0.25-1.5$ 的单自由度系统的幅相特性曲线

三、两自由度系统的振动

前述单自由度系统，只要用一个座标参数就可以描述系统的振动，但这只是一种非常理想的情况。实际的工艺系统其质量和刚度是连续分布的，也就是说是由无穷多的有弹性的质点所构成的，要精确描述这样的系统的振动状态，理论上讲就需要无穷多个独立的座标，因此是一个无穷多自由度的系统。但为了研究的方便，常将其简化为一个多自由度系统，其中最简单的是两自由度系统。

振动理论证明，从单自由度系统过渡到两自由度系统，其振动特性发生了一些本质的变化。但是从两自由度系统过渡到多自由度系统，在振动特性上没有本质的差别，其不同点仅在于：振动系统的自由度越多，描述其振动特性的方程越多越复杂，计算过程麻烦。因此我们只着重对两自由度系统的振动进行分析。

1. 两自由度系统的自由振动

图 6-12 所示为磨床主轴——砂轮架振动系统及其简化的两自由度振动模型，其中 m_1

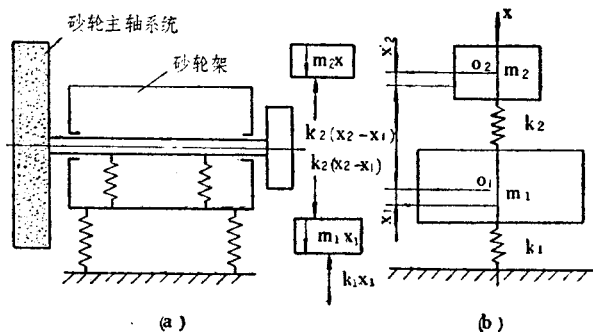


图 6-12 磨床主轴及砂轮架振动系统及其简化的振动型模

和 k_1 分别为砂轮架的等效质量及其等效静刚度, m_2 和 k_2 分别为砂轮及主轴部件的等效质量及等效静刚度, 阻尼暂时忽略不计。取每个质量的静平衡位置作为座标原点, 其垂直位移 x_1 、 x_2 分别为各个质量的独立座标。其正方向如图所示。

由图 6—12b 可知, 质量 m_1 下面的弹簧变形就是 x_1 , 而质量 m_1 、 m_2 之间的弹簧变形是 $x_2 - x_1$, 与弹簧的变形成正比的恢复力分别作用于 m_1 及 m_2 上。运用牛顿第二定律可建立 m_1 和 m_2 的运动微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

令
$$a = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad b = \frac{k_2}{m_1}, \quad c = \frac{k_2}{m_2},$$

则上式变为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-21)$$

设其特解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_0 t + \theta), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_0 t + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

求出特解的一阶、二阶导数代入 7—21 式可得

$$\left. \begin{aligned} A_1(a - \omega_0^2) - A_2 b &= 0, \\ -A_1 c + A_2(c - \omega_0^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-23)$$

这是齐次线性联立代数方程组。它的一个解为 $A_1 = A_2 = 0$, 所引出的 $x_1 = x_2 = 0$, 只定出了系统的平衡位置, 而未说明振动的任何性质, 当然不是我们所要求的解。要使 A_1 、 A_2 有非零解, 式 (6—23) 的系数行列式必须等于零, 即

$$\Delta(\omega_0^2) = \begin{vmatrix} a - \omega_0^2 & -b \\ -c & c - \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

将行列式展开得

$$\begin{aligned} (a - \omega_0^2)(c - \omega_0^2) - bc &= 0 \\ \omega_0^4 - (a + c)\omega_0^2 + c(a - b) &= 0. \end{aligned} \quad (6-24)$$

式 6—24 是一个 ω_0^2 的二次代数方程, 解此方程可得到如下的两个根:

$$\omega_{01}^2, \omega_{02}^2 = \frac{a+c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)} = \frac{a+c}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + bc}. \quad (6-25)$$

由于 $a > b$, 故 $\frac{a+c}{2} > \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - c(a-b)}$, ω_{01}^2 和 ω_{02}^2 都是正值; 同时从实用上我们只取正的 ω_{01} 和 ω_{02} , 这样我们就可从 (6—25) 式求得该两自由度系统的两个固有频率, 式 (6—25) 也就称为系统的频率方程(要注意这里 $\omega_{01} \neq \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_{02} \neq \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$).

命这两个频率中数值较小的为 ω_0 , 称为系统的第一阶主频率(或第一固有频率), ω_{02} 为系统的第二阶主频率(或第二固有频率)。可以证明, n 个自由度的系统具有 n 个固有频率。这是多自由度系统的一个非常重要的特性。

将 ω_{01} 代入 (6—22) 式即得到第一阶主振动的特解为

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= A_1^{(1)} \cos(\omega_{01}t + \theta_1), \\ x_2^{(1)} &= A_2^{(1)} \cos(\omega_{01}t + \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

同理，第二阶主振动的特解为

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= A_1^{(2)} \cos(\omega_{02}t + \theta_2), \\ x_2^{(2)} &= A_2^{(2)} \cos(\omega_{02}t + \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

式中 $A_1^{(1)}$ 和 $A_2^{(1)}$ 分别为系统以第一阶主频率振动时质量 m_1 和 m_2 的振幅； $A_1^{(2)}$ 和 $A_2^{(2)}$ 分别为系统以第二阶主频率振动时质量 m_1 和 m_2 的振幅。振幅的具体数值与初始条件有关，但它们的比值即

$$\beta_1 = \frac{A_1^{(1)}}{A_1^{(2)}} \quad \text{与} \quad \beta_2 = \frac{A_2^{(1)}}{A_2^{(2)}} \quad (6-28)$$

却是与初始条件无关的。将 (6-25) 式求出的 ω_{01} 与 ω_{02} 分别代入 (6-23) 式，即可求得 β_1 和 β_2 ，可以证明： $\beta_1 > 0$ ， $\beta_2 < 0$ 。 $\beta_1 > 0$ ，表明 $A_1^{(1)}$ 和 $A_1^{(2)}$ 的符号相同，它说明两自由度系统在作第一阶主振动时，两个质点同时按同方向运动，同时以同方向经过平衡位置，又同时达到最大偏离位置，如图 6-13a 所示（图中将 x 方向的振幅画成水平方向，以便于表达 $A_1^{(1)}$ 和 $A_2^{(1)}$ 的相对关系）。 $\beta_2 < 0$ 表明 $A_1^{(2)}$ 和 $A_2^{(2)}$ 符号相反，即二阶主振动时两个质点的相位相反，当质点 m_1 达到最低位置时， m_2 恰好到达最高位置，它们一会儿相互分离，一会儿又相向运动，如图 6-13b 所示。这时在联系 m_1 和 m_2 的弹簧上将有不发生振动的一点，其位置在任何瞬时都是不动的，称之为节点。这就好象在节点处给振动系统加了一个固定支承一样。振动理论证明：多自由度系统的第 i 阶主振型一般有 $(i-1)$ 个节点。既然节点处振动系统是不动的，那么也就可以推论，高阶主振动的振幅由于受到节点的约束而不易增大。阶次越高，节点数就越多，振幅就越不易增大。相反，低阶的主振动由于节点少，振动就比较容易激发。

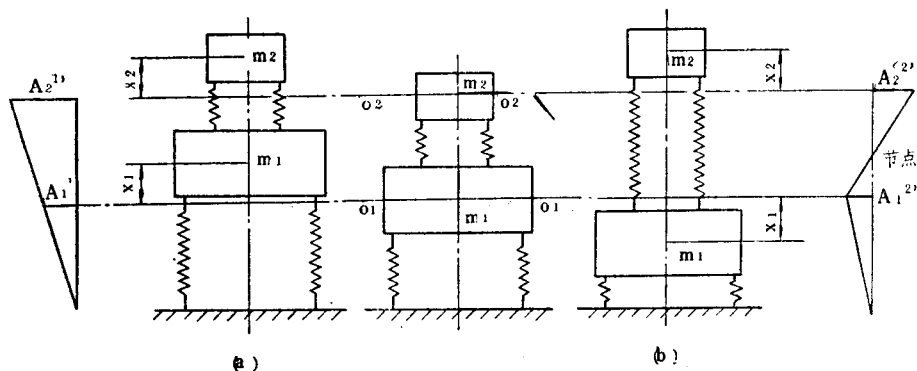


图 6-13 两自由度系统自由振动的主振型

前面只讨论了两自由度系统无阻尼自由振动的两个特解——一阶主振动和二阶主振动，而微分方程 6-20 的通解应该是两个特解的叠加，即

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1^{(1)} \cos(\omega_{01}t + \theta_1) + A_1^{(2)} \cos(\omega_{02}t + \theta_2), \\ x_2 &= A_2^{(1)} \cos(\omega_{01}t + \theta_1) + A_2^{(2)} \cos(\omega_{02}t + \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

对于 n 个自由度系统的振动，其通解则为 n 阶主振动的叠加。由于各阶的频率一般是不可通约的，因此叠加后的振动一般就不是周期性的振动。但是这个振动可以分解为几个主振动之和，每一阶主振动都是简谐振动。至于那一阶主振动占多少成分，则由初始条件决定。但是

由于一阶主振动没有节点，最容易被激发，所以在一般情况下， n 阶自由振动中总是低阶特别是一阶主振动占优势。

2. 两自由度系统的强迫振动

如果在图 6-12 所示的砂轮架系统的 m_1 上加一个简谐激振力 $P\cos\omega t$ ，即构成两自由度的强迫振动系统(图6-14)。通常把受激振力作用的 m_1-k_1 系统称为主系统，而把不受激振力作用的 m_2-k_2 系统称为付系统。

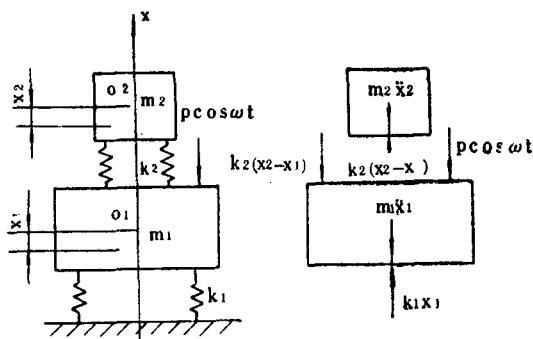


图 6-14 两自由度系统强迫振动的动力学模型

如果不考虑系统的阻尼，则可得该系统的运动微分方程式如下：

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + P \cos \omega t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1). \end{aligned} \right\} \quad (6-30)$$

令
$$a = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad b = \frac{k_2}{m_1}, \quad c = \frac{k_2}{m_2}, \quad p = \frac{P}{m_1}$$

则 6-30 式化简为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + ax_1 - bx_2 &= p \cos \omega t, \\ \ddot{x}_2 - cx_1 + cx_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6-31)$$

可以证明，上式的特解为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega t, \\ x_2 &= A_2 \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (6-32)$$

代入 (6-31)，可求得 A_1 、 A_2 分别为：

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{p(c - \omega^2)}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}, \\ A_2 &= \frac{pc}{(a - \omega^2)(c - \omega^2) - bc}. \end{aligned} \right\} \quad (6-33)$$

此式的分母即为频率方程 (6-23)，当激振力频率 ω 等于系统固有频率 ω_{01} 、 ω_{02} 时，分母为零。

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c - \omega^2}{c} = \frac{k_2 - \omega^2 m_2}{k_2}. \quad (6-34)$$

两自由度系统的强迫振动有如下特点：

①两自由度系统在受到简谐激振时，其强迫振动是持续进行的简谐振动，其振动频率与激振力的频率相同，与初始条件无关。这一点与单自由度的强迫振动相同。

②振幅 A_1 、 A_2 与激振频率 ω 之间的关系——幅频特性曲线的示意图如 6-15 图所示。(a) 是主系统的曲线，(b) 是付系统的曲线。图中的虚线是以振幅的绝对值为纵座标时的情况。由公式 (6-33) 可以证明，当 $\omega = 0$ 时， $A_1 = A_2 = \frac{P}{k_1}$ 即在静态力 P 作用下，弹簧 k_2 变形， k_1 不变形， m_1 和 m_2 的距离保持不变。

③当 $\omega = \omega_{01}$ 或 $\omega = \omega_{02}$ 时，系统出现共振现象，振幅急剧增加。由于阻尼的存在，