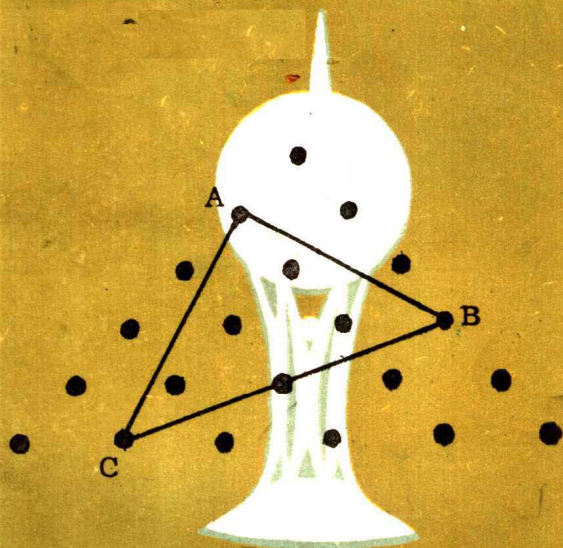


清



智力竞赛丛书

华罗庚金杯数学竞赛



智力竞赛丛书

华 罗 庚
金 杯
数学竞赛

杨道正 肖江汉
浣若安 许远森

湖南科学技术出版社

内 容 提 要

本书是配合《华罗庚金杯》少年数学竞赛为小学高年级和初中学生编写的课外读物。书中收集了首届金杯赛的初赛、复赛和决赛的全部试题和解答,三届“从小爱数学”邀请赛试题及解答,选编了部分竞赛辅导资料 and 培训练习题(附解答)。全书内容丰富而具有启发性和趣味性。适合广大中小学生阅读,也可以作为数学教师、家长开发学生智力的培训资料。

华罗庚金杯数学竞赛

杨道正 肖江汉 浣若安 许运森

责任编辑:古 华

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1986年12月第1版第1次印刷

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 3.125 字数: 70,000

印数: 1—100,000

统一书号: 13204·145 定价: 0.55元

征订册号: 湖南新书目86—21(44)

前 言

为了纪念著名数学家华罗庚爷爷逝世一周年，向全国少年儿童宣传华老的崇高品德，更好地发现和培养人材，由中国少年报、中央电视台、中国科协青少年部联合举办了全国首届《华罗庚金杯》少年数学邀请赛，全国有二十二个城市近一百五十万少年参加了这一活动。

邀请赛由方毅爷爷担任组委会名誉主任，胡耀邦爷爷亲笔为金杯题名。金光闪亮的华罗庚金杯上嵌着华罗庚爷爷的头像，六个孩子高举双手托起金球，象征少先队员热爱数学，立志用科学创造未来。竞赛分为初赛、复赛、决赛，决赛获第一名的北京人大附中学生陆昱的名字和校名都已光荣地刻在金杯之上。

为了适应全国《华罗庚金杯》少年数学竞赛活动的需要，进一步激发广大少年从小爱数学，立志攀登科技高峰的热情，我们编写了这本小册子，献给立志成才的少年朋友们，也为关心竞赛的老师和望子成“龙”的家长们提供一份参考资料。

本书由杨道正主编，肖江汉、浣若安、许远森执笔编写，此外，王紫阳、覃小荔、彭铸民、盛遇顺也参加了编写工作，由于时间仓促，编者水平有限，书中不免疏漏之处，愿望广大读者和同行给予批评和指正。

编 者

目 录

第 一 部 分

- 一、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛初赛试题及解答.....(1)
- 二、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛复赛试题及解答.....(6)
- 三、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛决赛第一试试题及解答.....(12)
- 四、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛决赛第二试试题及解答.....(17)

第 二 部 分

- 一、第一届“从小爱数学”邀请赛试题及解答.....(18)
- 二、第二届“从小爱数学”邀请赛试题及解答.....(25)
- 三、第三届“从小爱数学”邀请赛试题及解答.....(29)

第 三 部 分

- 一、有趣的最大值.....(35)
- 二、分解质因数.....(37)
- 三、最大公约数.....(40)
- 四、分数.....(45)
- 五、图形.....(50)
- 六、定义新运算问题.....(56)
- 七、数字趣题.....(59)
- 八、有余数除法.....(65)
- 九、计数法.....(71)
- 十、图表解题法及其它.....(75)
- 十一、培训试题选.....(81)

第一部分

科学家的话

数学本身，也有无穷的美妙。认为数学枯燥，没有艺术性，这看法是不正确的，就象站在花园外面，说花园枯燥无味一样。只要踏进了大门，你们随时会发现数学有许许多多趣味的东西。

——华罗庚

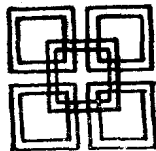
一、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛初赛试题及解答

(1986年10月5日上午电视播出)

1. 1966、1976、1986、1996、2006这五个数的总和是多少？

解：敏锐地观察出这些数可拆补成1986
 $\times 5 = 9930$ 。

2. 每边长是10厘米的正方形纸片，正中间挖了一个正方形的洞，成为一个宽度是1厘米的方框。把五个这样的方框放在桌面上，



图一

成为如图一的图案，问桌面上被这些方框所盖住部分的面积是多少平方厘米？

解： $(10^2 - 8^2) \times 5 - 8 = 36 \times 5 - 8 = 172$ （平方厘米）

3. 105的约数共有几个？

解： $105 = 3 \times 5 \times 7$ ，它的约数是1、3、5、7、15、21、35、105，共8个。

4. 妈妈让小明给客人烧水沏茶，洗开水壶要用1分钟，烧开水要用15分钟，洗茶壶要用1分钟，洗茶杯要用1分钟，拿茶叶要用2分钟。小明估算了一下，完成这些工作要花20分钟，为了使客人早点喝上茶，按你认为最合理的安排，多少分钟就能沏茶了？

解：先洗开水壶，接着烧开水，在等水开的过程中同时洗茶壶，洗茶杯，拿茶叶，水开了就沏茶，这样只需16分钟即可。

5. 下面的算式里，四个小纸片各盖住了一个数字，被盖住

$$\begin{array}{r} \square\square \\ + \square\square \\ \hline 149 \end{array}$$

四个数字总和是多少？

解：和的个位数是9，说明两个个位数字的和是9（不可能进位）。所以两个十位数字的和是14。故各位数字的总和是 $14 + 9 = 23$ 。

6. 松鼠妈妈采松子，晴天每天可以采20个，有雨的天每天只能采12个，它一连几天采了112个松子，平均每天采14个，问这几天当中有几天有雨？

解：6天有雨。因为共用了 $112 \div 14 = 8$ 天采松子，如果8天都是晴天，就能采到松子 $20 \times 8 = 160$ 个。一个雨天比一个晴天要少采8个松子，现在共少采了 $160 - 112 = 48$ 个，所以有 $48 \div 8 = 6$ 个雨天。

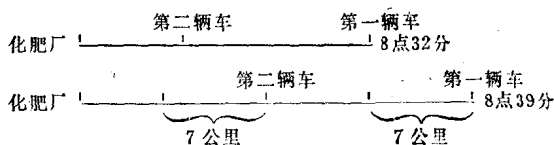
7. 边长1米的正方体2100个，堆成了一个实心的长方体。

它的高是10米，长、宽都大于高。问长方体的长与宽的和是几米？

解：因为堆成的长方体的体积应该等于所有正方体的体积总和，所以底面长方形的面积为 $2100 \div 10 = 210$ 平方米， $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$ ，因为长与宽都要大于10米，因此长与宽分别为15米和14米，所以长与宽的和是29米。

8. 早晨8点多钟有两辆汽车先后离开化肥厂向幸福村开去，两辆汽车的速度都是每小时60公里，8点32分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的三倍，到了8点39分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的二倍。那么，第一辆汽车是8点几分离开化肥厂的？

解：因为车速是每分钟1公里，所以车行几分钟就是几公里。



从8点32分到8点39分两车各前进7公里，两车距离不变，这个距离等于到8点39分时第二辆车行驶的路程，也等于到8点32分时第二辆车所行驶路程的两倍，即是说到8点32分时，第二辆车行驶7公里，两车的距离是14公里。所以 $32 - (14 \div 1) = 18$ ，因此第一辆汽车是8点18分离开化肥厂的。

9. 有一个整数，除300、262、205，得到相同的余数。问这个整数是几？

解：这个数应该是 $300 - 262 = 38$ 与 $262 - 205 = 57$ 的公约数，而38、57的公约数是19，所以这个整数是19。

10. 甲、乙、丙、丁四个人比赛乒乓球，每两个人都要赛一

场，结果甲胜了丁，并且甲、乙、丙三人胜的场数相同。问丁胜了几场？

解：一共要赛6场。因为丁败给了甲，所以丁不能胜三场；同时丁也不能胜两场或一场，因为这样甲、乙、丙三人总共所胜的场数为四场或五场，他们胜的场数都不可能相同，所以丁没有胜一场。

11. 两个十位数1111111111和9999999999的乘积有几个数字是奇数？

解：因为 $1111111111 \times 9999999999$

$$= 1111111111 \times (10000000000 - 1)$$

$$= 11111111110000000000 - 1111111111$$

$$= 11111111108888888889.$$

所以有10个数字是奇数。

12. 黑色、白色、黄色的筷子各有8根，混杂地放在一起。黑暗中想从这些筷子中取出颜色不同的两双筷子，问至少要取多少根才能保证达到要求？

解：拿得太少不能保证达到要求，即使拿了10根筷子，还可能8根都是一种颜色，另外两种颜色一样一根，所以至少要拿11根才能达到要求。

13. 有一块菜地和一块麦地，菜地的一半和麦地的三分之一放在一起是13亩，麦地的一半和菜地的三分之一放在一起是12亩，那么，菜地是几亩？

解：因为 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ，所以菜地的 $\frac{5}{6}$ 和麦地的 $\frac{5}{6}$ 放在一起是 $13 + 12 = 25$ (亩)。可见菜地的 $\frac{1}{6}$ 和麦地的 $\frac{1}{6}$ 放在一起是5亩，因此，菜地的 $\frac{1}{3}$ 和麦地的 $\frac{1}{3}$ 放在一起是10亩，但已知菜地的 $\frac{1}{2}$

和麦地的 $\frac{1}{3}$ 放在一起是13亩，因为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ，所以菜地的 $\frac{1}{6}$

是 $13 - 10 = 3$ (亩)，故菜地是 $3 \div \frac{1}{6} = 18$ (亩)。

14. 71427和19的积被7除，余数是几？

解：71427被7除余6，19被7除余5， $5 \times 6 = 30$ ，30被7除余2，所以71427和19的积被7除余数是2。

15. 科学家进行一项实验，每隔五小时做一次记录。做第十二次记录时，挂钟的时针恰好指向9，问做第一次记录时，时针指向几？

解：从第一次记录到第十二次记录，相隔十一次，共 $5 \times 11 = 55$ (小时)，因为时针每隔12小时返回原位置，55被12除余数是7， $9 - 7 = 2$ ，所以做第一次记录时，时针指向2。

16. 有一路电车的起点站和终点站分别是甲站和乙站，每隔5分钟有一辆电车从甲站出发开往乙站，全程要走15分钟，有一个人从乙站出发沿电车路线骑车前往甲站，他出发的时候，恰好有一辆电车到达乙站，在路上他又遇到了10辆迎面开来的电车，才到达甲站，这时候，恰好又有一辆电车从甲站开出，问他从乙站到甲站用了多少分钟？

解：骑车人一共看见了十二辆电车，他由乙站出发时，第四辆电车正从甲站出发，他到达甲站时，第十二辆电车正好从甲站出发，这中间共用了 $(12 - 4) \times 5 = 40$ (分钟)。

17. 在混合循环小数2.718281的某一位上再添上一个表示循环的圆点，使新产生的循环小数尽可能大，请写出新的循环小数。

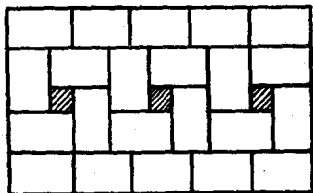
解：依照循环小数的定义，只要从右往左寻找小数部分中最大的数字，因此新的循环小数应该是2.718281。

18. 有六块岩石标本，它们的重量分别是8.5公斤、6公斤、4公斤、4公斤、3公斤、2公斤，要把它们分别装在三个背里包，要求最重的一个背包尽可能轻一些。请写出最重的背包里装的岩石标本是多少公斤？

解：8.5+6+4+4+3+2=27.5，分装三个背包，每个平均要装9公斤多(但不到9.5公斤)，而已知的六个重量数无论怎样组合都不能组成9.5公斤，因此，最重的一个背包最少要装10公斤(例如6公斤+4公斤)。

19. 同样大小的长方形小纸片摆成了所示图形。已知小纸片的宽是12厘米，求阴影部分的总面积？

解：从图二的第一排与第二排看，五个小纸片的长等于三个小纸片的长加上三个小纸片的宽，也就是说二个纸片的长等于三个小纸片的宽。所以小纸片的长为 $(3 \times 12) \div 2 = 18$ ，因此阴影部分的总面积是 $(18 - 12)^2 \times 3 = 36 \times 3 = 108$ (平方厘米)。



图二

二、《华罗庚金杯》少年数学邀请赛复赛试题及解答

(1986年10月19日上午9:00—10:00)

1. 甲班和乙班共83人，乙班和丙班共86人，丙班和丁班共88人。问甲班和丁班共多少人？

解：依题意知甲、乙、丙、丁四个班总共有 $83 + 88 = 171$ (人)，从中减去乙班和丙班人数，得甲班和丁班共有 $171 - 86 = 85$ (人)。

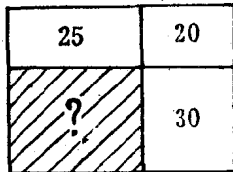
2. 一笔奖金分一等奖、二等奖和三等奖,每个一等奖的奖金是每个二等奖奖金的两倍,每个二等奖的奖金是每个三等奖奖金的两倍,如果评一、二、三等奖各两人,那么每个一等奖的奖金是308元;如果评一个一等奖,两个二等奖,三个三等奖,那么一等奖的奖金是多少元?

解: 奖金总数是 $(308 + 308 \times \frac{1}{2} + 308 \times \frac{1}{4}) \times 2 = 1078$ (元)

$$1078 \div (1 + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3) = 1078 \div 2\frac{3}{4} = 392 \text{ (元)}$$

所以评一个一等奖,两个二等奖,三个三等奖,则一等奖的奖金是392元。

3. 一个长方形 (如图三), 被两条直线分成四个长方形, 其中三个的面积分别是20亩、25亩和30亩。问另一个 (图中阴影部分) 长方形的面积是多少亩?



图三

解: 由图中可以看出, 25亩那块地的长乘以30亩那块地的宽等于阴影部分的面积, 而这两块地的另一边相乘就是20亩地的面积

所以 $25 \times 30 / 20 = 37.5$ (亩)

因此图中阴影部分长方形面积是37.5(亩)

4. 在一条公路上每隔一百公里有一个仓库 (如图), 共有五个仓库。一号仓库存有10吨货物, 二号仓库存有20吨货物, 五



号仓库存有40吨货物, 其余两个仓库是空的。现在想把所有的货物集中存放在一个仓库里, 如果每吨货物运输一公里需要0.5

元的运费，那么最少要花多少运费才行？

解：因为一吨货物运输一公里需要0.5元，那么一吨货物运输100公里就需50元。我们分别算出将货物全部存放在每个仓库所需的运费，然后再比较运费的多少就可以了。

全放一号仓库：需 $50 \times (20 + 40 \times 4) = 50 \times 180$ (元)

全放二号仓库：需 $50 \times (10 + 40 \times 3) = 50 \times 130$ (元)

全放三号仓库：需 $50 \times (10 \times 2 + 20 \times 1 + 40 \times 2)$
 $= 50 \times 120$ (元)

全放四号仓库：需 $50 \times (10 \times 3 + 20 \times 2 + 40 \times 1)$
 $= 50 \times 110$ (元)

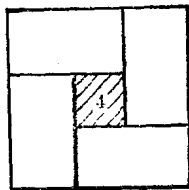
全放五号仓库：需 $50 \times (10 \times 4 + 20 \times 3) = 50 \times 100$ (元)

比较上面的五个运费，很显然最少要花5000元运费，而且是全部存放在五号仓库。

5. 有一个数，除以3余数是2，除以4余数是1。问这个数除以12余数是几？

解：除以3余2，除以4余1的最小自然数是5，而3与4的最小公倍数是12，故这个数可以是5，17，29，41，……但不管是哪一个，它们除以12的余数都是5。

6. 四个一样的长方形和一个小正方形（如图四）拼成了一个大正方形。大正方形的面积是49平方米，小正方形的面积是4平方米。问长方形的短边长度是几米？



图四
大正方形面积49平方米

解：大小正方形的边长分别是7米和2米，所以长方形的短边长是 $(7 - 2) \div 2 = 2.5$ (米)

7. 有两条纸带，一条长21厘米，一条长13厘米，把两条纸带都剪下同样长的一段以后，发现短纸带剩下的长度是长纸带

剩下的长度的 $\frac{8}{13}$ 。问剪下的一段有多长？

解：把两条纸带都剪下同样长的一段后，长纸带仍然比短纸带长 $21-13=8$ (厘米)。又因为剪去同样长后，短纸带剩下的长度是长纸带剩下的长度的 $\frac{8}{13}$ ，那么长纸带剩下的 $\frac{5}{13}$ 就应该是长纸带比短纸带长的那8厘米，因而长纸带剩下的部分应该是 $8 \div (5/13) = 8 \times 13/5$ ，那么长纸带剪去的部分应该是 $21 - (8 \times 13/5) = (105 - 104)/5 = 1/5$ (厘米)。

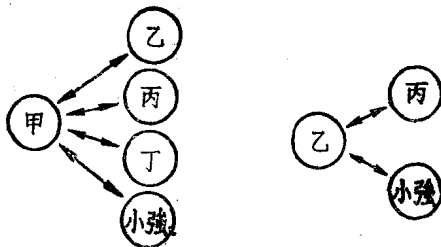
8. () $\times$ () = $\square$ = () $\div$ ()

将0, 1, 2, 3, 4, 5, 6这七个数字填在括号和方格内, 每个数字恰好出现一次, 组成只有一位数和两位数的整数算式。问填在方格内的数是几？

解：是12。具体填法如下： $(3) \times (4) = \boxed{12} = (60) \div (5)$

9. 甲、乙、丙、丁与小强五位同学一起比赛象棋, 每两人都要比赛一盘。到现在为止, 甲已经赛了4盘, 乙赛了3盘, 丁赛了1盘。问小强已经赛了几盘？

解：我们用箭头线段表示互相联接的两人已经赛了一盘, 那么依题意可以画出如图五的示意图:



图五

很显然小强已经赛了两盘，而且是和甲、乙赛的。

10. 有三堆棋子，每堆棋子数一样多，并且都只有黑、白两色棋子。第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多，第三堆里的黑子占全部黑子的 $\frac{2}{5}$ ，把这三堆棋子集中在一起，问白子占全部棋子的几分之几？

解：因三堆棋子数一样多，那么每堆占总数的 $\frac{1}{3}$ 。又只有黑白两色，而第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多，那么第一堆的黑子加上第二堆的黑子应等于一堆棋子数，也就是总数的 $\frac{1}{3}$ 。

又因为第三堆的黑子数占全部黑子的 $\frac{2}{5}$ ，那么其他两堆的黑子数就占全部黑子数的 $\frac{3}{5}$ ，故黑子数的 $\frac{3}{5}$ 就等于全部棋子总数的 $\frac{1}{3}$ ，所以黑子总数占全部棋子总数的 $(\frac{1}{3}) \div (\frac{3}{5}) = \frac{5}{9}$ 。因此白子就占全部棋子总数的 $\frac{4}{9}$ 。

列式为： $1 - \frac{1}{3} \div (1 - \frac{2}{5}) = 1 - \frac{1}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{9}$ 。

11. 甲、乙两班同学人数相等，各有一些同学参加课外天文小组，甲班参加天文小组的人数恰好是乙班没有参加的人数的 $\frac{1}{3}$ ，乙班参加天文小组的人数是甲班没有参加的人数的 $\frac{1}{4}$ 。问甲班没有参加的人数是乙班没有参加的人数的几分之几？

解：因为两班人数相等，而每个同学只有参加或不参加两种情形。

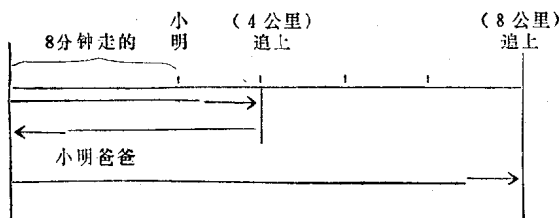
又因为甲班参加天文小组的人数恰是乙班没有参加的人数的 $\frac{1}{3}$ ，所以甲班没有参加天文小组的人数加上乙班没有参加的人数的 $\frac{1}{3}$ 就是全班的总人数。同理，乙班没有参加天文小组的

人数加上甲班没有参加的人数的 $\frac{1}{4}$ 也是全班的总人数

由于两班人数相等,所以甲班没有参加的人数是乙班没有参加的人数的 $(1-\frac{1}{3}) \div (1-\frac{1}{4}) = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ 。

12. 上午8点8分, 小明骑自行车从家里出发, 8分钟后, 爸爸骑摩托车去追他, 在离家4公里的地方追上了他, 然后爸爸立刻回家, 到家后又立刻回头去追小明, 再追上他时, 离家恰好是8公里。问这时是几点几分?

解: 依题意可知小明的爸爸在四个相等的时间里走了16公里, 而小明在其中的三个相等的时间里走了4公里, 那么它在每



个等分时间里走了 $\frac{4}{3}$ 公里, 从而推知小明在8分钟里走了 $4 -$

$\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ (公里), 因此小明的速度为每分钟 $\frac{8}{3} \div 8 = \frac{1}{3}$ (公里), 小

明共走了8公里, 所以共用去 $8 \div \frac{1}{3} = 24$ (分钟), 因此小明离家8公里时正好是8点32分。

13. 把14分成几个自然数的和, 再求出这些数的乘积, 要使得到的乘积尽可能大, 问这个乘积是几?

解: 因为 $14 = 2 + 3 + 3 + 3 + 3$ 。所以 $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 162$ 。

把14分成一个2和四个3的和, 这些数的乘积为162最大。(参阅第三部分辅导讲座《有趣的最大值》一节)

14. 43位同学，他们身上带的钱从8分到5角，钱数都各不相同。每个同学都把身上带的全部钱各自买了画片，画片只有两种，3分一张和5分一张，每人都尽量多买5分一张的画片。问他们所买3分画片的总数是多少张？

解：根据题意每人的钱从8分到5角各不相同，可以把钱数按从少到多顺序排列，又要尽量多买5分一张的，且把钱用完，所以可列出以下的对应关系表：

每人带的钱数(分)	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
每人买3分画片数(张)	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	

从表中可以看出买3分一张的画片数具有每隔五个数重复出现的规律：1，3，0，2，4接着又是1，3，0，2，4，……而
 $1+3+0+2+4=10$ (张)， $43 \div 5 = 8 \cdots \cdots 3$ ， $10 \times 8 = 80$ (张)，
 余下的三人按顺序应买3分的画片 $1+3+0=4$ (张)，所以他们买3分的画片总张数是84张。

三、“华罗庚金杯”少年数学邀请 赛决赛试卷第一试解答

(1986年11月2日9:00—9:30)

$$1. \text{ 计算 } \frac{\frac{7}{13} \times 4\frac{1}{2} + \frac{1}{6}}{13\frac{1}{3} - 3\frac{3}{4} \div \frac{5}{16}} \times 2\frac{7}{8}$$

解：原式 $= 4\frac{17}{128}$ 。