高数(一)微积分

考点与题典

主审 姚慕生

主编 王青

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

会计专业(本科段)

辽宁大学出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学(一)微积分
考点与题典

主　审　姚慕生
主　编　王　青

辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（一）微积分考点与题典/王青主编. 一沈阳：辽宁大学出版社，2003. 7
ISBN 7－5610－4433－X

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 高等数学－高等教育－自学考试－自学参考资料　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 020971 号

责任编辑：胡家诗　祝恩民　黄永恒　　封面设计：刘桂湘
责任校对：李　佳

辽宁大学出版社出版
地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮编：110036
联系电话：024－86853301　　http://www.lnupress.com.cn
Email：mailer@lnupress.com.cn
丹东日报印刷厂印刷　　辽宁大学出版社发行

幅面尺寸：148mm×210mm　　印张：13.125
字数：300 千字

2003 年 7 月第 1 版　　2003 年 7 月第 1 次印刷
印数：1～5 000　　定价：18.00 元

出版说明

我社近几年来陆续出版了由全国高等教育自学考试指导委员会组织编写的自学考试用书200余种,包括自考教材及自学辅导系列、同步练习册系列,其后又推出了考点与题典系列。这些系列图书由于其权威性和实用性,适应和满足了全国各类考生自学理解、课后同步练习及考试的实际需求,出版后深受广大考生的欢迎和厚爱。为了把自学考试用书这一品牌做大做精,最近我们又全新推出了会计专业(专科和独立本科段)考点与题典系列丛书,并根据广大自学者应试备考的实际需要,有针对性地组织全国一批长期从事自考教学辅导、命题研究、评卷且经验丰富的专家、学者编写,由教材主编对各书内容、体例等进行认真审阅并担纲主审或主编。因此,本系列丛书与其他同类书相比更具有独创。

1. 体例设计独到。针对自考考生实际情况和应试需要,本套丛书各分册每章设考点和题典两部分。考点部分主要向考生介绍本章必须掌握的要点,并具体给出考试重点;题典部分则按最新全国高等教育自学考试试卷相应题型设计各章习题。通过这样的设计可使考生“点”、“面”兼顾,由“点”及“面”,既掌握重点和难点及考试点,又涵盖教材全部内容,对考生应试能够起到事半功倍的效果。

2. 习题针对性强。由于各书编写者均具有丰富的自考辅导、评卷、命题的阅历和经验,因而习题能够根据全国统一自学考试试卷的标准试题题型设计习题,其思路、风格及题量、难易程度等均与全国自学考试试题的标准一致,对考生而言可做到举一反三,触类旁通,有助于考生顺利通过考试。

3. 答案准确精练。各书习题答案均严格按照教材、大纲及自考

试题参考答案相应的评分标准和要求编写，经教材主编认真审阅，答案既准确、全面，又要点明晰，一目了然。

4.实用性特点突出。从体例、内容到重点、难点、题型设计，力求体现实用性原则，旨在为考生应试提供更加切实有效的帮助。

各书最后均附录了该学科 2002 年全国高等教育自学考试试卷及标准答案，将有助于考生了解和把握考试的题型、题量及难易程度。同时也可以检测考生实战状态下的应试能力。

我们衷心希望这套丛书的出版，能够帮助参加自学考试的考生顺利通过考试，同时也敬请使用本书的广大读者对书中不足之处给以批评指正。

前　言

《高等数学(一)微积分》是经济管理类专科段的一门基础课，学好这一门课程不仅对学习后继课程是必不可少的，而且对掌握现代经济管理理论并应用于实际也是很有必要的。《高等数学(一)微积分》内容广泛，理论较深，使得许多考生不知如何学好这门课程。为了帮助参加《高等数学(一)微积分》考试的考生们顺利通过考试，并能将基本的理论和方法应用于现代经济管理科学中，我们根据全国高等教育自学考试委员会颁布的《高等数学(一)微积分自学考试大纲》和指定教材的基本内容和考核要求，并结合经济管理类专业《高等数学(一)微积分》这门课程自学考试命题的特点及类型，为自学者编写了这本《高等数学(一)微积分考点与题典》。

本书对高汝熹教授主编的《高等数学(一)微积分》教材所附全部习题做了解答，并参考近年来考题题型精选了大量典型题，且做了详细解答，各章均附有考核要点和重点，解题过程思路清晰，注重培养考生的逻辑思维及综合分析能力。本书力求通俗易懂，深入浅出，考生只要用心领会，强化训练，便能收到意想不到的效果。

最后，附上2002年全国自学考试《高等数学（一）微积分》试题及标准答案，以测试考生的实战能力。

本书由全国自学考试统编教材高等数学（经济管理类）系列教材主编之一、上海复旦大学姚慕生教授主审，编写者多年从事自考命题、评卷、辅导工作并具有丰富教学经验，其辅导深受考生的欢迎，希望本书的出版，对参加自学考试的朋友以有益帮助，能够顺利通过考试，同时由于编写时间所限，难免有不当之处，敬请使用本书的读者批评指正。

编　者

2003年5月

目　录

第一章 函数及其图形

一、考 点

☞(一) 考核要点

1. 集合的概念、集合的表示方法、集合的运算.

2. 函数的定义及函数的二要素. 掌握定义域的确定和计算. 了解决定两个函数是否相同,主要是看其定义域及对应关系是否相同,而不是其表示字母是否相同.

3. 分段函数的含义,复合函数的复合过程,反函数的确定.

4. 函数的几何特性.

5. 基本初等函数的几何图像、定义域、单调性、奇偶性、有界性、周期性.

6. 经济学中常用的函数:成本函数、收益函数、利润函数、需求函数及供给函数等.

☞(二) 考核重点

1. 集合的性质及运算.

2. 函数的定义域.

3. 函数关系、复合函数的复合关系及复合函数的定义域.

4. 函数的奇偶性.

本章考题均以选择题的形式出现.

二、题 典

(一) 习题参考解答

习题 1.1

1. 用集合符号写出下列集合:

(1) 大于 30 的所有实数的集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 外部一切点组成的集合.

解:(1) $\{x \mid x>30, x \in R\}$.

(2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2=25 \quad x,y \in R\}$.

(3) $\{(x,y) \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}>1 \quad x,y \in R\}$.

2. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合；

(2) 一个无限集合；

(3) 一个空集；

(4) 一个集合是另一个集合的子集.

解:(1) 如 $\{1,2,3\}$.

(2) 如 $\{x \mid x>5, x \in R\}$.

(3) 如 $\{x \,\big|\, |x|<0\}$.

(4) 如自然数集是整数集的子集.

3. 下列集合中哪个是空集 Φ?

$A=\{x \mid x+5=5\}$, $B=\{x \mid x \in R$ 且 $x^2+5=0\}$,

$C=\{x \mid x>5$ 且 $x<5\}$

解:判别集合是否为空集，需用定义检验，本题中，集合 A 含有一个元素 0，集合 B 和集合 C 不含有任何元素. 因此，B、C 是空集 Φ.

4. 设 $A=\{a,b,c\}$，下列式子中哪些是正确的？

(1) $\Phi \in A$；(2) $a \overline{\in} A$；(3) $\{a\} \subset A$；(4) $\Phi \subset A$；

(5) $A \subset A$；(6) $b \in A$；(7) $b \subset A$.

解:如果 x 是集合 A 的元素，则记作 $x \in A$；如果 x 不是集合 A 的元素，则记作 $x \overline{\in} A$. 如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 此外，任何一个集合都是它自身的子集，即 $A \subset A$；空集是任何一个集合的子集，即 $\Phi \subset A$. 因此，(3)、(4)、(5)、(6) 是正确的.

5. 如果 $A=\{x \mid 3<x<5, x \in R\}$；$B=\{x \mid x>4, x \in R\}$，

求(1)$A \cup B$;(2)$A \cap B$.

解:$A \cup B$表示两个集合之并,即集合A的元素和集合B的元素的全体;$A \cap B$表示两个集合之交,即集合A和集合B的全体公共元素.因此,$A \cup B = \{x \mid x > 3, x \in R\}$,$A \cap B = \{x \mid 4 < x < 5, x \in R\}$.

6. $A = \{a,b\}$,$B = \{b,c\}$,$C = \{c,d\}$.

求:$A \cup B$;$B \cup C$;$A \cup C$;$A \cup A$;$A \cap B$;$A \cap C$;$(A \cup B) \cap C$;$A \cap A$.

解:$A \cup B = \{a,b,c\}$;　　$B \cup C = \{b,c,d\}$;

$A \cup C = \{a,b,c,d\}$;　　$A \cup A = A = \{a,b\}$;

$A \cap B = \{b\}$;　　$A \cap C = \Phi$;

$(A \cup B) \cap C = \{c\}$;　　$A \cap A = A = \{a,b\}$.

7. 试证:若 $A \subset B$,$B \subset C$　则 $A \subset C$.

证:设 a 是 A 的任意一个元素,$\because A \subset B$,$\therefore a \in B$

又　$\because B \subset C$,$\therefore a \in C$,　$\therefore A \subset C$.

8. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合

(1) $|x| \leqslant 2$　(2) $|x-5| \leqslant 1$　(3) $|x-1| < \varepsilon(\varepsilon > 0)$

(4) $|x| > 1$　(5) $|x+2| \geqslant 3$.

解:(1)$[-2,2]$　(2)$[4,6]$　(3)$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$

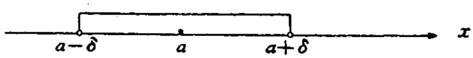
(4)$(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$　(5)$(-\infty,-5] \cup [1,+\infty)$

9. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合

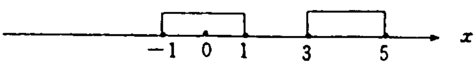
(1) $|x-a| < \delta$,a 为常数,$\delta > 0$;

(2)$1 < |x-2| < 3$.

解:(1)



(2)



习题 1.2

1. 设 X 是所有同心圆的集合,Y 为实数集合,若把同心圆与其直径建立对应关系,试验证这种对应关系构成 X 到 Y 的映射.

证明:$\because$ 对于集合 X 中任意一个圆 x,都惟一地确定一条直径,

设其直径长度数为 d，显然 $d \in Y$. 于是，对于集合 X 中任意元素 x 在 Y 中有惟一元素 d 与之对应，∴ 这种对应关系构成 X 到 Y 的映射.

2. 请判断下列对应关系是否构成映射.

设 X 集合由 A、B、C 三个工厂构成，Y 集合由甲、乙、丙、丁四个商店构成. A、C 两个工厂产品分别由甲、丁两个商店销售，B 工厂产品由乙、丙两个商店共同销售，若把生产产品的工厂和销售这些产品的商店之间建立对应关系（供销关系），问这种对应关系是否构成从 X 到 Y 的映射？

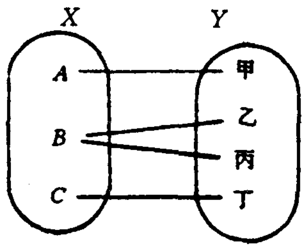


图 1－1

解：依题意，供销之间的对应关系如图所示，由于 X 中的元素 B，在 Y 中有两个元素乙、丙与之对应，所以集合 X 到集合 Y 不构成映射.

习题 1.3

1. 求下列函数值

(1) 若 $f(x) = x \cdot 4^{x-2}$，求 $f(2), f(-2), f(t^2), f(\frac{1}{t})$

(2) 若 $\varphi(t) = t^3 + 1$，求 $\varphi(t^2), [\varphi(t)]^2$.

解：(1) $f(2) = 2 \cdot 4^{2-2} = 2, f(-2) = -2 \cdot 4^{-2-2} = -\frac{1}{128}$

$$f(t^2) = t^2 \cdot 4^{t^2-2}, f(\frac{1}{t}) = \frac{1}{t} \cdot 4^{\frac{1}{t}-2} = \frac{1}{t} \cdot 4^{\frac{1-2t}{t}}$$

(2) $\varphi(t^2) = (t^2)^3 + 1 = t^6 + 1, [\varphi(t)]^2 = (t^3 + 1)^2$.

2. 求下列函数值

(1) 若 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0), f(a), f(a+b)$.

解：$f(0) = 2; f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}; f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$.

(2) 若 $g(x) = \begin{cases} 2^x & -1 < x < 0 \\ 2 & 0 \leqslant x < 1 \\ x-1 & 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$，

求 $g(3), g(2), g(0.5), g(-0.5)$.

解:这是用三个解析式给定的一个函数.这个函数的定义域是 $(-1,3]$.当自变量在区间 $(-1,0]$ 内取值时,对应函数值按 $y = 2^x$ 计算;当 x 在区间 $[0,1)$ 内取值时,函数值取 2;当 x 在区间 $[1,3]$ 取值时,函数值按 $y = x-1$ 计算.因此,$g(3) = 3-1 = 2$;$g(2) = 2-1 = 1$;$g(0.5) = 2$;$g(-0.5) = 2^{-0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) 若 $\varphi(x) = \begin{cases} 3+x^4 & -\infty < x \leqslant 0 \\ 2^x & 0 < x < +\infty \end{cases}$

求 $\varphi(-2), \varphi(0), \varphi(2)$.

解:$\varphi(-2) = 3+(-2)^4 = 19$, $\varphi(0) = 3+0^4 = 3$,
$\varphi(2) = 2^2 = 4$.

(4) 若 $\psi(x) = \begin{cases} |\sin x| & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$

求 $\psi(1), \psi(\frac{\pi}{4}), \psi(-\frac{\pi}{4})$.

解:$\psi(1) = 0, \psi(\frac{\pi}{4}) = |\sin\frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\psi(-\frac{\pi}{4}) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $f(x) = \ln x^2, \varphi(x) = 2\ln x$.

(2) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \psi(x) \equiv 1$.

解:两个函数相同必须定义域相同,对应法则相同.函数 $f(x) = \ln x^2$ 的定义域为:$(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$,而 $\varphi(x) = 2\ln x$ 的定义域为:$(0,+\infty)$,因此(1)中的 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是不相同的,而(2)中的 $f(x)$ 与 $\psi(x)$ 是相同的.

4. 求下列函数的定义域

(1) $y = \frac{2x}{x^2-3x+2}$ (2) $y = \sqrt{3x+4}$

(3) $y = \sqrt{a^2-x^2}$ (4) $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+4}$

(5) $y=\lg\frac{x}{x-2}$ (6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$

(7) $y=\arcsin\frac{x-3}{2}$

解：(1) $\because y=\frac{2x}{(x-1)(x-2)}$

$\therefore$ 其定义域为 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$ 的一切实数，即定义域为 $\{x \mid x\neq 1$ 且 $x\neq 2, x\in R\}$.

(2) x 需满足 $3x+4\geqslant 0$，于是 $x\geqslant -\frac{4}{3}$，即定义域为 $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right)$.

(3) x 需满足 $a^2-x^2\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant|a|$

或 $-|a|\leqslant x\leqslant|a|$，

$\therefore$ 其定义域为 $[-|a|,|a|]$.

(4) x 需满足：$x^2\neq 1$ 且 $x+4\geqslant 0$ 即 $x\geqslant -4$ 且 $x\neq\pm 1$，

$\therefore$ 定义域为 $[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(5) 欲使函数有意义，必须有 $\begin{cases}\frac{x}{x-2}>0\\ x-2\neq 0\end{cases}$

$\frac{x}{x-2}>0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x-2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ x-2<0\end{cases}$，前一不等式的解为 $x>2$，后一不等式的解为 $x<0$，故所求函数定义域为：$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

(6) x 需满足 $\sin x\geqslant 0$ 且 $16-x^2\geqslant 0$.

由 $\sin x\geqslant 0$ 得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,(k\in Z)$.

由 $16-x^2\geqslant 0$ 得 $|x|\leqslant 4$，即 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

$\therefore$ 其定义域为 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

(7) 欲使函数有意义，必须有 $\left|\frac{x-3}{2}\right|\leqslant 1$.

即 $|x-3|\leqslant 2$

故所求函数定义域为：$[1,5]$.

5. 确定函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$$

的定义域，并作出函数图形.

解：定义域为$(-2,2)$，其图像如图 1—2.

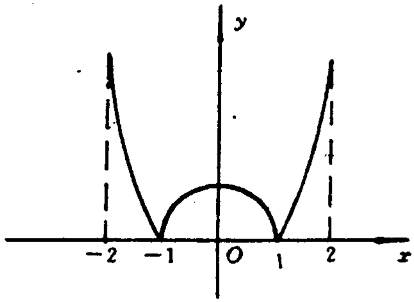


图 1—2

6. 某产品年产量为 x 台，每台售价为 400 元，当年产量在 1000 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 1000 台时，经广告宣传后又可以再多出售 200 台，每台平均广告费 40 元，生产再多，本年就售不出去，试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

解：这是一个具有实际意义的分段函数. 当年产量 x 在 1000 台以内时，即 $0\leqslant x\leqslant 1000$ 时，销售收入 $R=400x$；当年产量 x 超过 1000 台时，经广告宣传再多出售 200 台，即 $1000<x\leqslant 1200$ 时，销售收入 $R=400000+360(x-1000)$；生产再多，本年就售不出去，即 $x>1200$ 时，销售收入 $R=400000+360(1200-1000)=472000$. 因此，销售收入

$$R(x)=\begin{cases}400x & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 400000+360(x-1000) & 1000<x\leqslant 1200\\ 472000 & x>1200.\end{cases}$$

7. 设生产与销售某产品的总收入 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知：当产量 $x=0,2,4$ 时，总收入 $R=0,6,8$，试确定总收入 R 与产量 x 的函数关系.

解：二次函数的一般形式为：

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

由已知条件得线性方程组：

$$\begin{cases} 0+0+c=0 \\ a\cdot 4+b\cdot 2+c=6 \\ a\cdot 16+b\cdot 4+c=8 \end{cases}$$

$\therefore c=0, a=-\dfrac{1}{2}, b=4$

因此，总收入 R 与产量 x 的函数关系为：

$R=-\dfrac{1}{2}x^2+4x.$

8. 判断下列函数的单调性

(1) $y=3x-6$　(2) $y=2^{x-1}$　(3) $y=\log_a x$.

解：(1)、(2) 均为单调递增函数，$x\in R$.

(3) 当 $0<a<1$ 时为单调递减函数，$x\in(0,+\infty)$，

当 $a>1$ 时为单调递增函数，$x\in(0,+\infty)$.

9. 判断下列函数中哪些是奇函数、偶函数、非奇非偶函数.

(1) $f(x)=x^4-2x^2$　　(2) $f(x)=x-x^2$

(3) $f(x)=\tan x$　　(4) $f(x)=\sin x-\cos x$

(5) $f(x)=x\cdot\sin x$　　(6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

(7) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　(8) $f(x)=a^x+a^{-x}$

(9) $f(x)=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$　　(10) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解：判别一个函数是奇函数还是偶函数，必须从定义来判别.

偶函数有：(1)，(5)，(6)，(8)

奇函数有：(3)，(7)，(9)，(10)

非奇非偶函数有：(2)，(4).

以(10) 为例证明如下：

$$\because f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})$$

$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(-x-\sqrt{1+x^2})}{-x-\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$