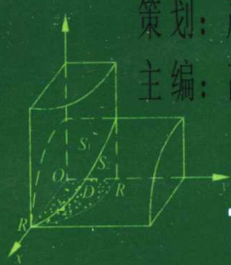
高等学校辅助教材

科源教室
KY. Studio

高等数学

（同济五版）

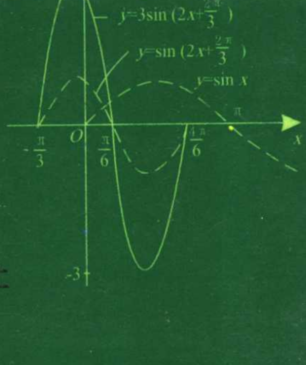
策划：严　汎
主编：高等数学考试研究室



上册

考点精析

习题全解



光明日报出版社

高等数学（同济五版）
考点精析习题全解
（上册）

策划/ 严 汛
主编/高等数学考试研究室

光明日报出版社

内容提要

本书有以下特点：一、集中要点，方便检索。二、多级筛选，突出重点。三、考点精析，习题全解。四、循环复习，强化记忆。

《高等数学（同济五版）考点精析习题全解》（上、下册）有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（同济五版）考点精析习题全解/高等数学考试研究室主编、北京：光明日报出版社，2003 ISBN 7-80145-693-9

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第004117号

高等数学(同济五版)考点精析习题全解(上册)

高等数学考试研究室 主编

*

光明日报出版社出版发行

(北京永安路106号)

汉川市诚信印务有限责任公司印刷

各地新华书店经销

*

850 X 1168 毫米 32开本

2003年8月第一版 2003年8月第一次印刷

印张：31.5 字数：877千字

共二册：定价：31.60元(本册15.80元)

前　言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并获奖的优秀教材，被全国许多院校采用作为教科书，已印行20多年。目前，第五版已逐渐取代第四版。

由科源教室组织编写的《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)贴近学生的需要，率先在全国推出考点精析和习题全解，受到学生的普遍欢迎。为了适应教材升级的现状，我们在《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)的基础上，严格按照新教材的调整和体例，编写出《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)。

本书有以下特点：

一、集中要点，方便检索。根据教材顺序，将每章每节的知识点归纳集中在一起，并按教材顺序给出题解，便于读者整体掌握本章节内容，同时方便读者随时检索查阅这些知识点和题解。

二、多级筛选，突出重点。按照教材的要求，本书对各章、节内容进行了三级筛选。其中选学部分标出 * 号；未作记号的是一般的知识要点；将必须掌握、学期考试中必考或出现频率高的核心知识用【考点】号标出。这样，学习者可按照自身的情况制定学习方案。

三、考点精析，习题全解。“考点”既是每章每节的重点，通常也是难点，本书在各章和各节对其进行了较深入的解析。本书不仅对《高等数学》(同济五版)所附的全部习题进行了解答，而且在解题过程中，编写者对大部分习题的解题思路进行了精练的分析和引导，部分习题还给出了多套解题方案以活跃思路。

四、循环复习，强化记忆。本书每章后的复习首先对全章的内容作了一个小结，这是作者为读者特别提供的一种科学而行之有效的学习方法。运用这种“厚书薄读”的方法，读者可以从厚厚的两

本教材中迅速切入重点，全面、系统、提纲挈领、事半功倍地掌握所学知识。其次，遴选了各章的综合例题进行了精解。最后，给出了各章节总习题的解答。这样循环往复，学新温故，可以明晰思路，加深理解，灵活运用，强化记忆和重点掌握各章节的知识要点和考点。以上内容也为教师上习作课提供了素材。

《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。为此，我们建议读者首先对每章每节的小结和知识要点及考点浏览一遍，并在今后的学习和解题中随时参照和检索所需要的公式和知识点。其次，注意本书着重指出的考点，在全面掌握高等数学知识的基础上，四两拨千斤，迅速抓住核心问题。第三，本书各章的复习小结和综合例题对理清思路、提高解题能力、强化记忆具有很重要的作用，希望读者学完上册或下册后，再重复读或做各章复习中的小结和综合例题，如此，无论是巩固学习或应试都会游刃有余。

本书由严汛策划，科源教室主编。本书的不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

目　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

知识要点与考点

一、集合、常量与变量、函数概念

函数的定义，求定义域 D，求函数表达式等(略).【考点】

二、函数的几种初等性质简述　【考点】

1)有界性：$|f(x)|\leqslant M,\forall$①$x\in X\subset D$；

2)单调性：$x_1<x_2\Longrightarrow f(x_1)\begin{smallmatrix}<\\ >\end{smallmatrix}f(x_2)$，$\forall x_1、\forall x_2\in D$；

3)奇偶性：$f(-x)=\mp f(x)$，$\forall x、-x\in D$；

4)周期性：$f(x\pm T)=f(x)$，$\forall x、x\pm T\in D$.

三、反函数与直接函数

它们互为反函数，$f(x)$与 $f^{-1}(x)=\varphi(x)$的图形在同一个坐标系里关于直线 $y=x$ 对称.

习题 1—1 解答

> 1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$的表达式.

解　【利用集合的并、交、差运算之定义】

$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，

$A\cap B=[-10,-5)$，　　$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$

---

① 逻辑符号"$\forall$"表示并读作"任(意)给(定)".

$A\setminus(A\setminus B)=[-10,-5)$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

证 $x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证 (1) $y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow$ 存在 $x\in A\cup B$，使 $f(x)=y$

$\Leftrightarrow x\in A$ 或 $x\in B$，使 $f(x)=y\Leftrightarrow y\in f(A)$或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

(2) $y\in f(A\cap B)\Longrightarrow$ 存在 $x\in A\cap B$，使 $f(x)=y\Longrightarrow x\in A$，且 $x\in B$，$f(x)=y\Longrightarrow y\in f(A)$且 $y\in f(B)\Longrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_Xx=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Yy=y$. 证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

证 【需证明 f 既是单射，也是满射】

设 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，由 $g\circ f=I_X\Longrightarrow(g\circ f)(x_1)\neq(g\circ f)(x_2)$

即 $g(f(x_1))\neq g(f(x_2))\Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，故 f 为单射。

任给 $y\in Y$，有 $x=g(y)\in X$，由 $f\circ g=I_Y\Longrightarrow(f\circ g)(y)=y$

即 $f(g(y))=y\Longrightarrow f(x)=y$，故 f 为满射. 综上有 f 为双射，且 g 是 f 的逆映射.

5. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$. 证明：

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证 (1) $x\in A\Longrightarrow y=f(x)\in f(A)\Longrightarrow x\in f^{-1}(f(A))$，这里 $f^{-1}(f(A))$表示 $f(A)$的原像的集合.

(2) $x\in A \Leftrightarrow y=f(x)\in f(A)$,(因 f 为单射)

$$\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\in f^{-1}(f(A)).$$

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$;　(2) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　(4) $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$;　(6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$;　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(x+1)$;　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解　【求函数的定义域,常由解不等式或不等式组确定之.】

(1) $3x+2\geqslant 0, x\geqslant -2/3, D=[-2/3,+\infty)$;

(2) $1-x^2\neq 0,\ x\neq\pm 1,\ D=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(3) $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\neq 0,\\ |x|\leqslant 1,\end{cases} D=[-1,0)\cup(0,1]$;

(4) $4-x^2>0, |x|<2, D=(-2,2)$ 或 $D=\{x\mid -2<x<2\}$;

(5) 必须 $x\geqslant 0$,即定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,定义域为 $\{x\mid x\in\mathrm{R}, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1, k\in\mathrm{Z}\}$.

(7) $-1\leqslant x-3\leqslant 1$,即 $2\leqslant x\leqslant 4$,定义域为 $[2,4]$.

(8) 解 $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\neq 0.\end{cases}$ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$,即 $x>-1$,定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$,定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2,\ g(x)=2\lg x$;　(2) $f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3},\ g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

(4) $f(x)=1, g(x)=sec^2x-tan^2x$.

答　【两个函数是否相同,从对应规则与定义域都要相同两方面去判断.】

(1)不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而 $2\lg x$ 的定义域是$(0,+\infty)$.

(2)不相同. 因为 $f(x)=x$ 的值域为 R；而 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$的值域仅为非负实数$[0,+\infty)$，即它们的对应规则不相同.

(3)相同. 因为 $\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $x\sqrt[3]{x-1}$的定义域(都是 R)与对应规则都相同.

(4)不相同。因为 $f(x)$的定义域为 R；而 $g(x)$的定义域为$\{x|x\in R, x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$

8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解　$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|$

$=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$；

$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$\because\ |-2|>\frac{\pi}{3}$，$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1 所示.

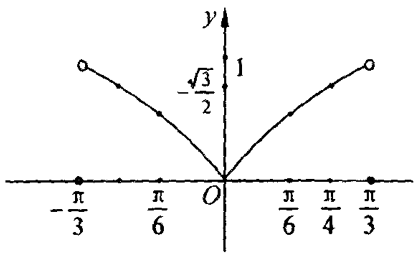


图 1-1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1)$y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；

(2)$y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

证明　(1)$y=-1+\frac{1}{1-x}$,任取 $x_1,x_2\in(+\infty,1)$且 $x_1<x_2$　$\frac{1}{1-x_1}<\frac{1}{x-x_2}$,故 $y_1<y_2$,即在$(-\infty,1)$内函数单调增.

(2)任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$且 $x_1<x_2$,由 $\ln x_2>\ln x_1$ 知 $x_2+\ln x_2>x_1+\ln x_1$ 即 $y_2>y_1$,故在$(0,+\infty)$内函数单调增加.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证明　任取 x_1、$x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则

$$-x_1、-x_2\in(0,l),\quad 且-x_2<-x_1.$$

由于 $f(x)$在$(-l,l)$内是奇函数,且在$(0,l)$内单调增加,所以

$$f(-x_2)-f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)<0,$$

从而 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的. 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明　【可根据定义判断函数的奇偶性.】

设 $f_1(x),g_1(x)$为奇函数,而 $f_2(x),g_2(x)$为偶函数.

(1)　$f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x)$,

所以两个偶函数的和仍为偶函数. 而

$$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)],$$

所以两个奇函数的和仍为奇函数.

(2)　$f_2(-x)\cdot g_2(-x)=f_2(x)\cdot g_2(x)$,

所以两个偶函数的乘积仍为偶函数. 而

$$f_1(-x)\cdot g_1(-x)=-f_1(x)[-g_1(x)]=f_1(x)\cdot g_1(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$f_2(-x)\cdot f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)f_1(x),$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$； (2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$； (4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$； (6) $y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

答 【以 $-x$ 代入各右式中的 x，易知奇偶性或是非奇非偶函数.】

(1)，(3)，(6)是偶函数是容易验证的.

(2)与(5)经验证既非奇函数又非偶函数.

(4)是奇函数，这是因为

$$(-x)(-x-1)(-x+1)=-x(x-1)(x+1).$$

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$； (2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$； (4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

答 易验明(1)、(2)、(3)、(5)均为周期函数，(1)的周期为 2π；(2)的周期为 $\pi/2$；(3)的周期为 2；(5)的周期为 π.(4)不是周期函数.

14. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$； (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$； (4) $y=2\sin 3x$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$； (6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

解 【可由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$，即可写出反函数 $y=\varphi(x)$.】

(1)由 $y=\sqrt[3]{x+1}$，解得 $x=y^3-1$，反函数为

$$y=x^3-1.$$

(2)由 $y=\frac{1-x}{1+x}$，解得 $1-x=y+xy$，即

$$x(y+1)=1-y,\quad \therefore\quad x=\frac{1-y}{1+y},$$

反函数为
$$y=\frac{1-x}{1+x}.$$

(3)由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$，有　$ax+b=cyx+dy$.

$$x(a-cy)=dy-b,\quad x=\frac{dy-b}{a-cy},$$

故所求反函数为

$$y=\frac{dx-b}{a-cx}.$$

欲使此反函数与其直接函数相同，必须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a},$$

即
$$(ax+b)(cx-a)=(cx+d)(b-dx),$$

展开、移项、合并同类项，得

$$c(a+d)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)\equiv 0,$$

比较恒等式两边的系数，得

$$\begin{cases} c(a+d)=0, \\ b(a+d)=0, \\ (d-a)(d+a)=0, \end{cases}$$

所以当 a、b、c、d 满足条件：$a+d=0$ 或 $a+d\neq 0$ 但 $b=c=0$ 且 $a=d$ 时，此题的反函数与直接函数相同.

注：题中限制 $ad-bc\neq 0$，是为了构成"分式线性函数"的需要. 否则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，令比值为 k，则有 $a=bk$，$c=dk$，代入，得

$$y=\frac{bkx+b}{dkx+d}=\frac{b(kx+1)}{d(kx+1)}=\frac{b}{d},$$

这是常(量)函数，不含 x，就无法解出其反函数了.

(4)由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=1/3\cdot\arcsin(y/2)$，反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5)由 $y=1+\ln(x+2)$解得 $x=e^{y-1}-2$，反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6)由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$，有 $y(2^x+1)=2^x$，$2^x(1-y)=y$，$2^x=\frac{y}{1-y}$，$x=\log_2$

$\frac{y}{1-y}$，反函数为 $y=\log_2 \frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明　【对于这类充要性问题，首先要分清充分性与必要性的条件与欲证结论各是什么.】

必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上有界，即有

$$|f(x)|\leqslant M \quad (M>0, x\in X),$$

$\therefore$

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M \quad (x\in X),$$

此式说明 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$ 和上界 M.

充分性. 设 $f(x)$ 在 X 上有下界 m 与上界 M，即

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\ x\in X.$$

取 $K=\max\{|m|,|M|\}$，则有

$$-K\leqslant m\leqslant f(x)\leqslant M\leqslant K,$$

从而 $|f(x)|\leqslant K$，这说明 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\frac{\pi}{6}, x_2=\frac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u, u=2x, x_1=\frac{\pi}{8}, x_2=\frac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}, u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$；

(4) $y=e^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$；

(5) $y=u^2, u=e^x, x_1=1, x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x$；$y_1=\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{1}{4}$，$y_2=\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2=\frac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x$，$y_1=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$；$y_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) $y=e^{x^2}$；$y_1=e^0=1$；$y_2=e^1=e$.