

高等学校辅助教材

科源
教室

KY. Studio

高等数学

(同济五版)

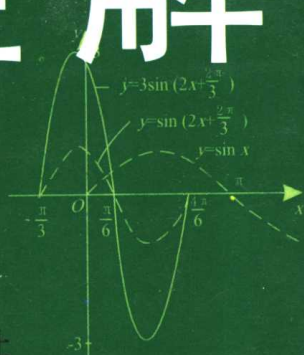
策划: 严 汛

主编: 高等数学考试研究室

上册

考点精析

习题全解



光明日报出版社

高等数学(同济五版)
考点精析习题全解
(上册)

策划/ 严 汛

主编/高等数学考试研究室

光明日报出版社

内 容 提 要

本书有以下特点：一、集中要点，方便检索。二、多级筛选，突出重点。三、考点精析，习题全解。四、循环复习，强化记忆。

《高等数学（同济五版）考点精析习题全解》（上、下册）有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（同济五版）考点精析习题全解/高等数学考试研究室
主编、北京：光明日报出版社，2003 ISBN 7-80145-693-9

I. 高… II. 高… III. 高等数学-高等学校-解题
N. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004117 号

高等数学(同济五版)考点精析习题全解(上册)

高等数学考试研究室 主编

*

光明日报出版社出版发行

(北京永安路 106 号)

汉川市诚信印务有限责任公司印刷

各地新华书店经销

*

850 X 1168 毫米 32 开本

2003 年 8 月第一版 2003 年 8 月第一次印刷

印张：31.5 字数：877 千字

共二册：定价：31.60 元(本册 15.80 元)

如有印装问题 请向承印厂调换

前 言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并获奖的优秀教材,被全国许多院校采用作为教科书,已印行 20 多年。目前,第五版已逐渐取代第四版。

由科源教室组织编写的《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)贴近学生的需要,率先在全国推出考点精析和习题全解,受到学生的普遍欢迎。为了适应教材升级的现状,我们在《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)的基础上,严格按照新教材的调整和体例,编写出《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)。

本书有以下特点:

一、集中要点,方便检索。根据教材顺序,将每章每节的知识点归纳集中在一起,并按教材顺序给出题解,便于读者整体掌握本章节内容,同时方便读者随时检索查阅这些知识点和题解。

二、多级筛选,突出重点。按照教材的要求,本书对各章、节内容进行了三级筛选。其中选学部分标出 * 号;未作记号的是一般的知识要点;将必须掌握、学期考试中必考或出现频率高的核心知识用【考点】号标出。这样,学习者可按照自身的情况制定学习方案。

三、考点精析,习题全解。“考点”既是每章每节的重点,通常也是难点,本书在各章和各节对其进行了较深入的解析。本书不仅对《高等数学》(同济五版)所附的全部习题进行了解答,而且在解题过程中,编写者对大部分习题的解题思路进行了精练的分析和引导,部分习题还给出了多套解题方案以活跃思路。

四、循环复习,强化记忆。本书每章后的复习首先对全章的内容作了一个小结,这是作者为读者特别提供的一种科学而行之有效的学习方法。运用这种“厚书薄读”的方法,读者可以从厚厚的两

本教材中迅速切入重点,全面、系统、提纲挈领、事半功倍地掌握所学知识。其次,遴选了各章的综合例题进行了精解。最后,给出了各章节总习题的解答。这样循环往复,学新温故,可以明晰思路,加深理解,灵活运用,强化记忆和重点掌握各章节的知识要点和考点。以上内容也为教师上习作课提供了素材。

《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)有科学、完整的体例,读者如果科学合理的使用本书,必将获得双倍的效果。为此,我们建议读者首先对每章每节的小结和知识要点及考点浏览一遍,并在今后的学习和解题中随时参照和检索所需要的公式和知识点。其次,注意本书着重指出的考点,在全面掌握高等数学知识的基础上,四两拨千斤,迅速抓住核心问题。第三,本书各章的复习小结和综合例题对理清思路、提高解题能力、强化记忆具有很重要的作用,希望读者学完上册或下册后,再重复读或做各章复习中的小结和综合例题,如此,无论是巩固学习或应试都会游刃有余。

本书由严汛策划,科源教室主编。本书的不足之处,恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

目 录

前 言

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
习题 1-1 解答	1
第二节 数列的极限	12
习题 1-2 解答	12
第三节 函数的极限	16
习题 1-3 解答	17
第四节 无穷小与无穷大	21
习题 1-4 解答	21
第五节 极限运算法则	25
习题 1-5 解答	26
第六节 极限存在准则 两个重要极限	28
习题 1-6 解答	29
第七节 无穷小的比较	32
习题 1-7 解答	33
第八节 函数的连续性与间断点	35
习题 1-8 解答	36
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	39
习题 1-9 解答	40
第十节 闭区间上连续函数的性质	42
习题 1-10 解答	43
复习一 求(证)极限的主要方法	45
总习题一解答	53
第二章 导数与微分	60

目 录

第一节	导数概念	60
	习题 2-1 解答	61
第二节	函数的求导法则	67
	习题 2-2 解答	69
第三节	高阶导数	77
	习题 2-3 解答	78
第四节	隐函数的导数 由参数方程所 确定的函数的导数 相关变化率	83
	习题 2-4 解答	84
第五节	函数的微分	91
	习题 2-5 解答	93
复习二	一元函数微分法	100
总习题二	解答	108
第三章	微分中值定理与导数的应用	115
第一节	微分中值定理	115
	习题 3-1 解答	116
第二节	洛必达法则	124
	习题 3-2 解答	125
第三节	泰勒公式	128
	习题 3-3 解答	129
第四节	函数的单调性与曲线的凹凸性	135
	习题 3-4 解答	136
第五节	函数的极值与最大值最小值	150
	习题 3-5 解答	151
第六节	函数图形的描绘	161
	习题 3-6 解答	162
第七节	曲率	166
	习题 3-7 解答	167
第八节	方程的近似解	172

习题 3-8 解答	173
复习三 中值定理与导数的应用	176
总习题三解答	190
第四章 不定积分	203
第一节 不定积分的概念与性质	203
习题 4-1 解答	204
第二节 换元积分法	207
习题 4-2 解答	207
第三节 分部积分法	214
习题 4-3 解答	215
第四节 有理函数的积分	223
习题 4-4 解答	224
第五节 积分表的使用	235
习题 4-5 解答	235
复习四 计算不定积分的方法	240
总习题四解答	249
第五章 定积分	266
第一节 定积分的概念与性质	266
习题 5-1 解答	267
第二节 微积分基本公式	275
习题 5-2 解答	276
第三节 定积分的换元法与分部积分法	282
习题 5-3 解答	283
第四节 反常积分	293
习题 5-4 解答	294
第五节 反常积分的审敛法 Γ -函数	298
习题 5-5 解答	300
总习题五解答	304
第六章 定积分的应用	321

目 录

第一节 定积分的元素法	321
第二节 定积分在几何学上的应用	321
习题 6-2 解答	323
第三节 定积分在物理学上的应用	341
习题 6-3 解答	342
复习五、六 定积分及其应用	348
总习题六解答	360
第七章 空间解析几何与向量代数	367
第一节 向量及其线性运算	367
习题 7-1 解答	369
第二节 数量积 向量积 *混合积	374
习题 7-2 解答	375
第三节 曲面及其方程	380
习题 7-3 解答	381
第四节 空间曲线及其方程	386
习题 7-4 解答	387
第五节 平面及其方程	390
习题 7-5 解答	391
第六节 空间直线及其方程	396
习题 7-6 解答	397
复习七 向量代数与空间解析几何	405
总习题七解答	412
参考文献	426

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

知识要点与考点

一、集合、常量与变量、函数概念

函数的定义,求定义域 D ,求函数表达式等(略).【考点】

二、函数的几种初等性质简述 【考点】

1)有界性: $|f(x)| \leq M, \forall x \in X \subset D$;

2)单调性: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} f(x_2), \forall x_1, \forall x_2 \in D$;

3)奇偶性: $f(-x) = \mp f(x), \forall x, -x \in D$;

4)周期性: $f(x \pm T) = f(x), \forall x, x \pm T \in D$.

三、反函数与直接函数

它们互为反函数, $f(x)$ 与 $f^{-1}(x) = \varphi(x)$ 的图形在同一个坐标系里关于直线 $y=x$ 对称.

习题 1—1 解答

1. 设 $A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty), B = [-10, 3]$, 写出 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ 及 $A \setminus (A \setminus B)$ 的表达式.

解 【利用集合的并、交、差运算之定义】

$$A \cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty),$$

$$A \cap B = [-10, -5), \quad A \setminus B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$$

① 逻辑符号“ $\forall$ ”表示并读作“任(意)给(定)”.

$$A \setminus (A \setminus B) = [-10, -5).$$

2. 设 A, B, C 是任意三个集合, 证明对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\begin{aligned} \text{证 } x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ 或 } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ 或 } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明

$$(1) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B);$$

$$(2) f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } (1) y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \text{存在 } x \in A \cup B, \text{ 使 } f(x) = y \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ 或 } x \in B, \text{ 使 } f(x) = y \Leftrightarrow y \in f(A) \text{ 或 } y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \text{存在 } x \in A \cap B, \text{ 使 } f(x) = y \Rightarrow x \in A, \\ \text{且 } x \in B, f(x) = y &\Rightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

4. 设映射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在一个映射 $g: Y \rightarrow X$, 使 $g \circ f = I_X, f \circ g = I_Y$, 其中 I_X, I_Y 分别是 X, Y 上的恒等映射, 即对于每一个 $x \in X$, 有 $I_X x = x$; 对于每一个 $y \in Y$, 有 $I_Y y = y$. 证明: f 是双射, 且 g 是 f 的逆映射: $g = f^{-1}$.

证 【需证明 f 既是单射, 也是满射】

$$\begin{aligned} \text{设 } x_1, x_2 \in X \text{ 且 } x_1 \neq x_2, \text{ 由 } g \circ f = I_X &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2) \\ \text{即 } g(f(x_1)) \neq g(f(x_2)) &\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ 故 } f \text{ 为单射.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{任给 } y \in Y, \text{ 有 } x = g(y) \in X, \text{ 由 } f \circ g = I_Y &\Rightarrow (f \circ g)(y) = y \\ \text{即 } f(g(y)) = y &\Rightarrow f(x) = y, \text{ 故 } f \text{ 为满射. 综上有 } f \text{ 为双射, 且 } g \text{ 是 } f \text{ 的逆映射.} \end{aligned}$$

5. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X$. 证明:

$$(1) f^{-1}(f(A)) \supset A;$$

$$(2) \text{ 当 } f \text{ 是单射时, 有 } f^{-1}(f(A)) = A.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } (1) x \in A &\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A)), \text{ 这里} \\ f^{-1}(f(A)) &\text{ 表示 } f(A) \text{ 的原像的集合.} \end{aligned}$$

(2) $x \in A \Leftrightarrow y = f(x) \in f(A)$, (因 f 为单射)

$$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \in f^{-1}(f(A)).$$

6. 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin \sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

解 【求函数的定义域,常由解不等式或不等式组确定之.】

$$(1) 3x+2 \geq 0, x \geq -2/3, D = [-2/3, +\infty);$$

$$(2) 1-x^2 \neq 0, x \neq \pm 1, D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty);$$

$$(3) \begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ |x| \leq 1, \end{cases} D = [-1, 0) \cup (0, 1];$$

$$(4) 4-x^2 > 0, |x| < 2, D = (-2, 2) \text{ 或 } D = \{x | -2 < x < 2\};$$

$$(5) \text{必须 } x \geq 0, \text{即定义域为 } [0, +\infty).$$

$$(6) x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{定义域为 } \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(7) -1 \leq x-3 \leq 1, \text{即 } 2 \leq x \leq 4, \text{定义域为 } [2, 4].$$

$$(8) \text{解 } \begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \text{得 } \begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0. \end{cases} \text{定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, 3].$$

$$(9) x+1 > 0, \text{即 } x > -1, \text{定义域为 } (-1, +\infty).$$

$$(10) x \neq 0, \text{定义域为 } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

7. 下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2 \lg x; \quad (2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}.$$

$$(4) f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

答 【两个函数是否相同,从对应规则与定义域都要相同两方面去判断.】

第一节 映射与函数

(1)不相同. 因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

(2)不相同. 因为 $f(x)=x$ 的值域为 $\mathbb{R}$; 而 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 的值域仅为非负实数 $[0, +\infty)$, 即它们的对应规则不相同.

(3)相同. 因为 $\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $x\sqrt[3]{x-1}$ 的定义域(都是 $\mathbb{R}$)与对应规则都相同.

(4)不相同. 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$; 而 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

8. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

$$\begin{aligned} \text{解 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}; \\ \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left| \sin \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \left| \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$\because |-2| > \frac{\pi}{3}, \quad \varphi(-2) = 0.$$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1-1 所示.

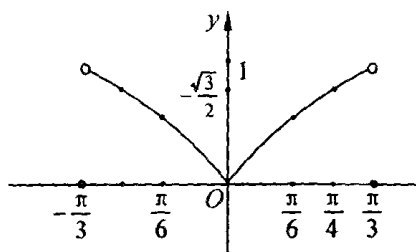


图 1-1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$

(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty).$

证明 (1) $y = -1 + \frac{1}{1-x}$, 任取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$ 且 $x_1 < x_2$ $\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2}$, 故 $y_1 < y_2$, 即在 $(-\infty, 1)$ 内函数单调增.

(2) 任取 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 由 $\ln x_2 > \ln x_1$ 知 $x_2 + \ln x_2 > x_1 + \ln x_1$ 即 $y_2 > y_1$, 故在 $(0, +\infty)$ 内函数单调增加.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证明 任取 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$-x_1, -x_2 \in (0, l), \text{ 且 } -x_2 < -x_1.$$

由于 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 内是奇函数, 且在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以

$$f(-x_2) - f(-x_1) = -f(x_2) + f(x_1) < 0,$$

从而 $f(x_1) < f(x_2)$, 所以 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l, l)$ 上的. 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 【可根据定义判断函数的奇偶性.】

设 $f_1(x), g_1(x)$ 为奇函数, 而 $f_2(x), g_2(x)$ 为偶函数.

$$(1) \quad f_2(-x) + g_2(-x) = f_2(x) + g_2(x),$$

所以两个偶函数的和仍为偶函数. 而

$$f_1(-x) + g_1(-x) = -[f_1(x) + g_1(x)],$$

所以两个奇函数的和仍为奇函数.

$$(2) \quad f_2(-x) \cdot g_2(-x) = f_2(x) \cdot g_2(x),$$

所以两个偶函数的乘积仍为偶函数. 而

$$f_1(-x) \cdot g_1(-x) = -f_1(x)[-g_1(x)] = f_1(x) \cdot g_1(x),$$

所以两个奇函数的乘积是偶函数. 又

$$f_2(-x) \cdot f_1(-x) = f_2(x)[-f_1(x)] = -f_2(x)f_1(x),$$

所以偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

第一节 映射与函数

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非偶函数又非奇函数?

$$(1) y = x^2(1-x^2);$$

$$(2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$(4) y = x(x-1)(x+1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

答 【以 $-x$ 代入各右式中的 x , 易知奇偶性或是非奇非偶函数.】

(1), (3), (6) 是偶函数是容易验证的.

(2) 与 (5) 经验证既非奇函数又非偶函数.

(4) 是奇函数, 这是因为

$$(-x)(-x-1)(-x+1) = -x(x-1)(x+1).$$

13. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) y = \cos(x-2);$$

$$(2) y = \cos 4x;$$

$$(3) y = 1 + \sin \pi x;$$

$$(4) y = x \cos x;$$

$$(5) y = \sin^2 x.$$

答 易验明 (1)、(2)、(3)、(5) 均为周期函数, (1) 的周期为 2π ; (2) 的周期为 $\pi/2$; (3) 的周期为 2; (5) 的周期为 π . (4) 不是周期函数.

14. 求下列函数的反函数:

$$(1) y = \sqrt[3]{x+1};$$

$$(2) y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3) y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0);$$

$$(4) y = 2\sin 3x;$$

$$(5) y = 1 + \ln(x+2);$$

$$(6) y = \frac{2^x}{2^x+1}.$$

解 【可由 $y=f(x)$ 解出 $x=\varphi(y)$, 即可写出反函数 $y=\varphi(x)$.】

(1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$, 解得 $x = y^3 - 1$, 反函数为

$$y = x^3 - 1.$$

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$, 解得 $1-x = y + xy$, 即

$$x(y+1)=1-y, \quad \therefore x=\frac{1-y}{1+y},$$

反函数为

$$y=\frac{1-x}{1+x}.$$

(3) 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, 有 $ax+b=cyx+dy$.

$$x(a-cy)=dy-b, \quad x=\frac{dy-b}{a-cy},$$

故所求反函数为

$$y=\frac{dx-b}{a-cx}.$$

欲使此反函数与其直接函数相同, 必须

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a},$$

即

$$(ax+b)(cx-a)=(cx+d)(b-dx),$$

展开、移项、合并同类项, 得

$$c(a+d)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)\equiv 0,$$

比较恒等式两边的系数, 得

$$\begin{cases} c(a+d)=0, \\ b(a+d)=0, \\ (d-a)(d+a)=0, \end{cases}$$

所以当 a, b, c, d 满足条件: $a+d=0$ 或 $a+d\neq 0$ 但 $b=c=0$ 且 $a=d$ 时, 此题的反函数与直接函数相同.

注: 题中限制 $ad-bc\neq 0$, 是为了构成“分式线性函数”的需要. 否则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 令比值为 k , 则有 $a=bk, c=dk$, 代入, 得

$$y=\frac{bkx+b}{dkx+d}=\frac{b(kx+1)}{d(kx+1)}=\frac{b}{d},$$

这是常(量)函数, 不含 x , 就无法解出其反函数了.

(4) 由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=1/3 \cdot \arcsin(y/2)$, 反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin$

$$\frac{x}{2}.$$

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$, 反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$, 有 $y(2^x+1)=2^x$, $2^x(1-y)=y$, $2^x=\frac{y}{1-y}$, $x=\log_2$

$\frac{y}{1-y}$, 反函数为 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 【对于这类充要性问题, 首先要分清充分性与必要性的条件与欲证结论各是什么.】

必要性. 设 $f(x)$ 在 X 上有界, 即有

$$|f(x)| \leq M \quad (M > 0, x \in X),$$

$\therefore$

$$-M \leq f(x) \leq M \quad (x \in X),$$

此式说明 $f(x)$ 在 X 上有下界 $-M$ 和上界 M .

充分性. 设 $f(x)$ 在 X 上有下界 m 与上界 M , 即

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in X.$$

取 $K = \max\{|m|, |M|\}$, 则有

$$-K \leq m \leq f(x) \leq M \leq K,$$

从而 $|f(x)| \leq K$, 这说明 $f(x)$ 在 X 上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1) y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin u, u = 2x, x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y = \sqrt{u}, u = 1 + x^2, x_1 = 1, x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, u = x^2, x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, u = e^x, x_1 = 1, x_2 = -1.$$

解 (1) $y = \sin^2 x; y_1 = \left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}, y_2 = \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}.$

$$(2) y = \sin 2x, y_1 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$(3) y = \sqrt{1+x^2}; y_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, y_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}.$$

$$(4) y = e^{x^2}; y_1 = e^0 = 1; y_2 = e^1 = e.$$