高校课程 学 练 考 系列丛书

4

# 线性代数

# 学 练 考

Learn Practise Examine

学练考

- 学·练·考三维辅导
- 知识要点一目了然
- 重点难点剖析透彻
- 典型例题解答点评
- 主流教材习题精解
- 学习效果两级训练


何光明 丛书主编

孙多如 杨 玲 何光明 编著


学练考

高校课程学·练·考系列

# 线性代数学·练·考

何光明　　丛书主编
孙多如　杨　玲　何光明　编著

清华大学出版社
北　京

## 内 容 简 介

本书与同济大学编写、高等教育出版社出版的《线性代数》第三版配套，每章结构为：重点知识结构图；疑难解惑；典型例题与考研题分析；同步教材习题全解；两级训练题五部分。书末附有期中和期末考试试题及答案、每章的两级训练题答案。

本书归纳总结了线性代数中重要的典型题型及考研题型、解题的规律、方法和技巧。例题多、题型广，基本覆盖了线性代数的主要内容。例题主要由两部分组成：一是线性代数中的典型题型，是重点也是难点；二是近年全国硕士研究生入学考试的部分试题(线性代数部分)。阅读此书，必将增强读者的分析、解题能力及应试能力。

本书可供本(专)科学生学习线性代数时阅读和参考；对于自学者和有志考研的人士，本书更是良师益友；对于从事线性代数教学的教师，也有一定的参考价值。



**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学・练・考/何光明丛书主编；孙多如，杨玲，何光明编著.—北京：清华大学出版社，2003
(高校课程学・练・考系列)
ISBN 7-302-07717-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①何…②孙…③杨…④何… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 111073 号

**出 版 者**：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
**社 总 机**：010-62770175　　**客户服务**：010-62776969
**组稿编辑**：章忆文
**文稿编辑**：刘　颖
**封面设计**：付剑飞
**印 刷 者**：北京市通州大中印刷厂
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**发 行 者**：新华书店总店北京发行所
**开　本**：185×260　**印张**：16.5　**字数**：382 千字
**版　次**：2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷
**书　号**：ISBN 7-302-07717-7/O・334
**印　数**：1～5000
**定　价**：24.00 元

# 扬起风帆，成就梦想

## (丛书序)

21 世纪人类已迈入“知识经济”时代，科学技术正发生着深刻的变革，社会对德才兼备高素质专业人才的需求更加迫切。如何培养出符合时代要求的优秀人才，是全社会尤其是高等院校面临的一项急迫而现实的任务。

为了配合当前高等院校注重培养高素质知识型人才的需求，也为了给同学们提供一套行之有效的课程学习辅导书，我们在广泛调研并听取很多专家及学生们建议的基础上，组织编写了这套《高校课程学 · 练 · 考系列》丛书。本套丛书作为学生正规课本的辅导用书，对课程的各方面知识不做细致讲解，而是抽取重点、难点和易于混淆的方面进行强调和解惑；再配以典型例题和考研题、考级题解析，提高读者分析问题与解决问题的实际能力；每章都辅以对应习题(达标训练题和考研挑战题、考级题)，以助读者达到即学、即练、即会的目的；另外，每章都精选主流教材的课后习题进行解答，帮助读者消化和巩固所学知识。

### 首推书目

本套丛书以全新的视角，陆续推出涵盖高等院校主干课程的辅导用书。首推 12 本，书目如下：

(1) 概率论与数理统计学 · 练 · 考

(2) 高等数学(上册)学 · 练 · 考

(3) 高等数学(下册)学 · 练 · 考

(4) 线性代数学 · 练 · 考

(5) 数据结构学 · 练 · 考

(6) 操作系统学 · 练 · 考

(7) 离散数学学 · 练 · 考

(8) C 语言学 · 练 · 考

(9) 电子技术基础(模拟部分)学 · 练 · 考

(10) 电子技术基础(数字部分)学 · 练 · 考

(11) 电路学 · 练 · 考

(12) 自动控制原理学 · 练 · 考

## 丛书特色

1. 丛书以国家教育部制定的教学大纲及研究生入学考试大纲为依据，按照高等学校通用的主流教材为主线，注重基础知识的学习与解题能力的提高，既保证了课程学习的循序渐进，又能对复习迎考与考研行之有效。

2. 丛书从“学、练、考”3 个角度进行立体辅导，帮助读者理解基本概念和理论，开拓解题思路，提高分析问题的能力，使读者对所学课程真正做到融会贯通、考试轻松。

3. 丛书基本按照正规教学课本顺序编排，每章设计了 5 个板块，分别是：本章知识结构图、疑难解惑、典型例题与考研题分析、重要习题精选精解、两级训练题。各内容安排为：

- 本章知识结构图：用图表的形式列出本章各知识点的有机联系，便于记忆、复习。
- 疑难解惑：突出核心知识，对重点、难点内容进行解释与讲述，使读者掌握问题的本质。
- 典型例题与考研题分析：精选出常考题型与考研题进行解析，增强读者解题能力。
- 重要习题精选精解：对主流教材的重要习题做出解答，便于读者复习与检查。
- 两级训练题：分达标训练题与考研挑战题两个级别，通过两级训练，读者可以进一步加深对所学内容的理解，旨在达到巩固提高的目的。

4. 丛书重点定位在疑难解惑与解题方法上，不仅授人以“鱼”，更在于授人以“渔”。丛书对课程学习过程中可能遇到的疑难点进行了细致深入的分析，突出解决易混淆和忽略的问题；对常见题型进行完整的解答与总结，注重解题思路及技巧的培养，旨在使读者达到茅塞顿开、触类旁通、举一反三之功效。

5. 丛书对主流教材的较难习题(或全部习题)进行了解答，并且每章均配有相应数额的训练题，最后还提供了 4 套完整的模拟试题，所有习题及模拟试题均给出了解答或提示，便于读者自测提高。

## 关于作者

丛书聘请执教多年，且有较高学术造诣的名师编写。他们长期从事有关的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对相应课程有较深的体会与独到的见解，本丛书凝聚了他们多年的教学经验和心血。

## 读者定位

本套丛书特别适合参加课程学习、考试(课程考试、考研、考级)的读者群阅读，同时可供高等院校教师作为教学参考使用。

## 互动交流

读者的进步，我们的心愿。如果发现书中有任何疑惑之处，或有建议或意见，请与我们交流。联系信箱：gmkeji@163.com。

## 特别致谢

在此，对丛书所选用的参考文献的著作者，及丛书所引用习题、试题的命题老师表示真诚的感谢。感谢为本丛书出版提供帮助的各界人士。

乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海。愿这套书为在知识海洋中奋进的学子们助一臂之力！

# 丛书编委会

# 前　言

线性代数是理工专业的一门重要基础课，随着科学技术的飞速发展和计算机的广泛应用，线性代数的理论与方法已成为科学研究及处理各个领域问题的强有力工具，成为各类科技人员必备的数学基础之一。

要学好线性代数，除了要重视课堂学习，认真阅读教材、勤思考、多总结之外，还应做一定数量的习题。通过独立思考和反复练习，加深对基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握，在解决问题的过程中，不断获取知识，提高分析和解决问题的能力，并培养科学思维和创新能力。然而，由于线性代数概念较多，且较抽象，并有一套独特的理论体系和处理问题的规律与方法，初学者往往感到不易抓住重点，不易理解其抽象的概念与理论，特别是似乎容易听懂，但做题感到困难，尤其是对推理方面的题常常感到无从下手。针对这些问题和困难，并根据多年来从事线性代数教学的经验和体会，我们编写了本书。

本书旨在帮助读者用较少的时间掌握线性代数的基本内容，提高学习效率；揭示线性代数处理问题的基本规律，帮助读者掌握这些基本规律和基本方法，达到举一反三、触类旁通、提高分析和解决问题的能力。从而达到考研备战的目的。

本书共分 6 章：行列式；矩阵及其运算；矩阵的初等变换与线性方程组；向量组的线性相关性；相似矩阵及二次型；线性空间与线性变换。外加 3 个附录：一是期中考试试题及答案；二是期末考试试题及答案；三是各章两级训练题解答。每章(第 6 章除外)均分为以下 5 部分内容：

(1) 重点知识结构图：提纲挈领，逻辑性强，主要知识点一目了然。

(2) 疑难解惑：抓住易混淆知识点，突出重点、难点，深化理解，拓宽知识面。

(3) 典型例题与考研题分析：典型例题及考研题题型全面，一题多解，方法灵活，举一反三，开阔视野，使读者了解考研的题型和难度，做到有的放矢。

(4) 同步教材习题全解：给出同步教材习题解答，便于读者自我检测。

(5) 两级训练题：循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

本书由孙多如、杨玲、何光明编写，全书由何光明、杨治辉审校。参与本书编写与协助工作的还有黄昭强、杨治辉、李虎军、江安、倪志强、陆克斌、朱家明、孙建东、贾高等，在此表示感谢！

我们衷心希望《线性代数学·练·考》一书能够成为广大读者的得力助手。当然，限于编者的水平，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，恳请广大读者及同行批评指正。

编者

2003 年 11 月

# 参 考 书 目


1. 同济大学编．《线性代数(第三版)》．北京：高等教育出版社，1999 年 6 月

2. 李永乐，周耀耀编著．《线性代数辅导讲义(第二版)》．北京：国家行政学院出版社，2002 年 8 月

3. 钱志强主编．《线性代数——教与学参考》．北京：中国致公出版社，2002 年 11 月

4. 毛纲源编．《线性代数解题方法技巧归纳(第二版)》．武汉：华中科技大学出版社，2002 年 3 月

5. 魏战线编著．《线性代数辅导与典型题解析》．西安：西安交通大学出版社，2001 年 9 月

6. 梁晓毅主编．《线性代数——题型·方法》．西安：西安电子科技大学出版社，2003 年 2 月

7. 张天德等编著．《工程数学》．北京：科学出版社，1999 年 2 月

# 目　　录

# 第 1 章　行　列　式

## 1.1　本章知识结构图

为便于读者学习，我们首先将本章重要知识点进行了归类，列出如图 1.1 所示的知识结构图.

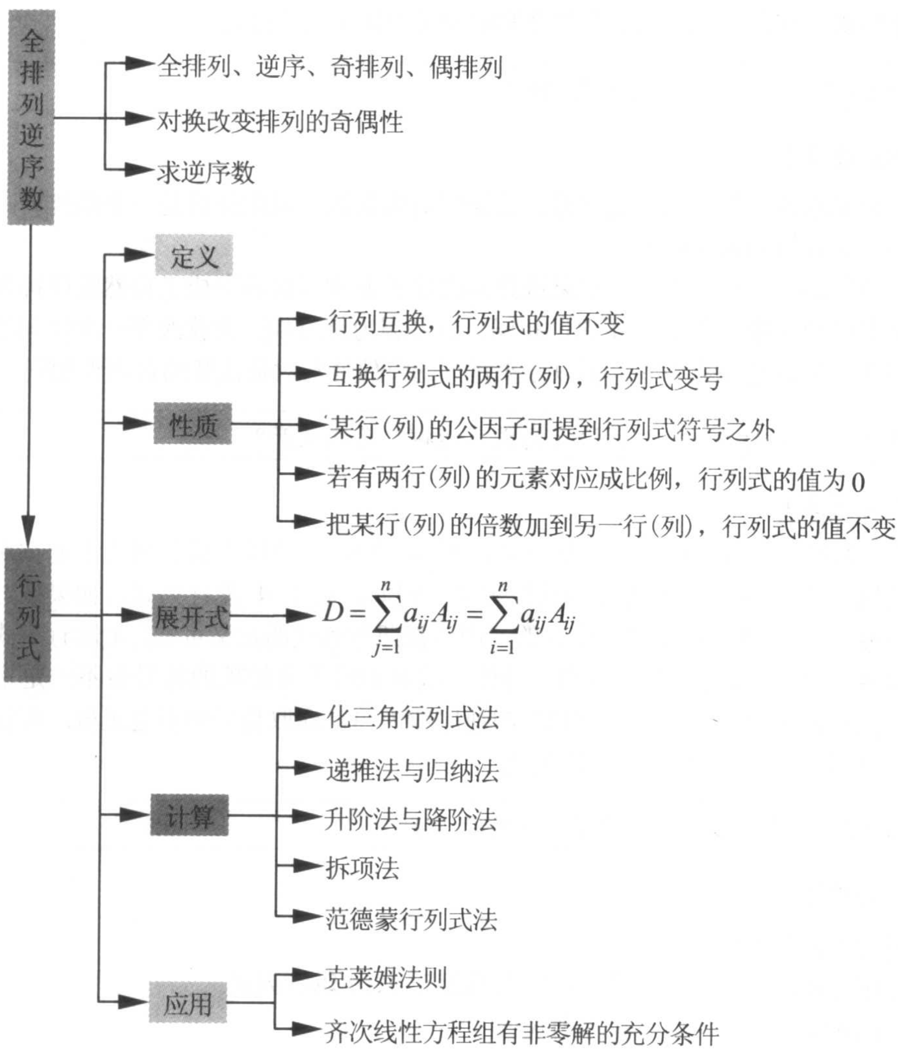


图 1.1　行列式

# 1.2 疑难解惑

问题 1.2.1 计算 $n$ 元排列的逆序数通常有哪些方法？

**【指点迷津】**

常用下面两种方法：

(1) 分别算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码个数之和，即逐一算出 $1,2,\cdots,n$ 这 $n$ 个元素的逆序数，这 $n$ 个元素的逆序数之总和即为所求 $n$ 元排列的逆序数.

(2) 从左边起，分别算出排列中每个元素前面比它大的数码个数，即算出排列中每个元素的逆序数，这每个元素的逆序数之和即为所求排列的逆序数.

问题 1.2.2 怎样确定排列的奇偶性？

**【指点迷津】**

(1) 首先求出所给排列的逆序数，若逆序数为偶数，则此排列是一个偶排列；若逆序数为奇数，则此排列为奇排列.

(2) 对所给排列进行对换，如果该排列进行了 $k$ 次对换后变成了自然顺序排列，则该排列的奇偶性与对换次数 $k$ 的奇偶性相同，这是因为每对换一次就改变一次排列的奇偶性. 而自然顺序排列的逆序数为零，所以原来排列的奇偶性与对换次数的奇偶性相同.

问题 1.2.3 为什么 $n(n\geqslant 4)$ 阶行列式不能按对角线展开？

**【指点迷津】**

二阶、3 阶行列式可以按对角线展开，而 4 阶及 4 阶以上的行列式不能按对角线展开，因为它不符合 $n$ $(n\geqslant 4)$阶行列式的定义. 例如，对于 4 阶行列式，如果按对角线法则，则只能写出 8 项，这显然是错误的，因为按照行列式的定义可知，4 阶行列式一共有 4!项，即 4 阶行列式是项的代数和. 另外，按对角线做出的项的符号也不一定正确，譬如，乘积项 $a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$ 其列排列 4123 的逆序数为 3，应取负号而不是正号. 所以，在计算 $n(n\geqslant 4)$阶行列式时，对角线法则失效.

问题 1.2.4 计算行列式的常用方法有哪些？

**【指点迷津】**

计算行列式的方法通常有：

(1) 用对角线法则计算行列式，它只适用于 2、3 阶行列式.

(2) 用 $n$ 阶行列式定义计算行列式.

显然有

上三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

下三角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

对角形行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

另外 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$.

(3) 利用行列式的性质计算行列式.

(4) 利用行列式按某一行(列)展开定理计算 $n$ 阶行列式.

(5) 利用数学归纳法计算行列式.

(6) 利用递推公式计算 $n$ 阶行列式.

(7) 利用范德蒙行列式的结论计算特殊的行列式.

(8) 利用升阶(加边)法计算 $n$ 阶行列式.

(9) 化三角形法计算 $n$ 阶行列式.

(10) 综合运用上述各法来计算行列式.

在实际计算中，又常常根据行列式的具体特点，采用相应的方法(有时需要几种方法结合使用). 请注意学习、总结例题中的计算方法，由此及彼，举一反三，逐步提高计算能力.

---

问题 1.2.5 为什么说在一个 $n$ 阶行列式 $D$ 中等于 0 的元素如果比$(n^2-n)$还多，则 $D$ 的值等于 0?

---

**【指点迷津】**

因为 $n$ 阶行列式中共有个 $n^2$ 元素，等于 0 的元素如果比$(n^2-n)$还多，那么其中不等于 0 的元素比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，即在 $n$ 阶行列式中不等于 0 的元素最多有$(n-1)$个，由 $n$ 阶行列式定义知，$D$ 的值是个数，它是 $n!$项代数和，每一项都是 $n$ 个元素的乘积，且这 $n$ 个元素取自行列式的不同行与不同列. 所以这个 $n$ 阶行列式的每一项的 $n$ 个元素中至

少有一个元素为 0，从而行列式 $D=0$.

问题 1.2.6　设 $a_{ij}(x)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 是可微函数，$D(x)=\left|a_{ij}(x)\right|$，问 $D'(x)$ 是否等于 $\left|a'_{ij}(x)\right|$？如果是，试证明你的结论；如果不是，试求出 $D'(x)$ 的正确表达式.

**【指点迷津】**

这个结论不正确，即 $D'(x)\neq\left|a'_{ij}(x)\right|$，因为如果取第一行均为常数，则按 $D'(x)=\left|a'_{ij}(x)\right|$，就会有 $D'(x)=0$，显然未必如此. 例如

$$D(x)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x & x^3+2x\end{vmatrix}=x^3+x,\quad D'(x)=3x^2+1>0$$

但 $\left|a'_{ij}(x)\right|=0$.

下面按行列式的定义求出 $D'(x)$ 的正确表达式：

$$D(x)=\sum(-1)^t a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x)$$

于是

$$\begin{aligned}D'(x)&=\sum(-1)^t[a'_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a_{np_n}(x)+\cdots+a_{1p_1}(x)a_{2p_2}(x)\cdots a'_{np_n}(x)]\\&=D_1(x)+D_2(x)+\cdots+D_n(x)\end{aligned}$$

其中 $D_i(x)$ 为把 $D(x)$ 中第 $i$ 行 $a_{i1}(x),a_{i2}(x),\cdots,a_{in}(x)$ 换以导数 $a'_{i1}(x),a'_{i2}(x),\cdots,a'_{in}(x)$，$(i=1,2,\cdots,n)$，而其余各行保持不变所得的行列式.

问题 1.2.7　什么是行列式按行(列)展开定理？它有何应用？

**【指点迷津】**

行列式按行(列)展开定理是指下述两个定理：

**定理 1**　$n$ 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n)\ \text{ 或 } D=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

**定理 2**　$n$ 阶行列式 $D=\left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ 的某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于 0，即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=0\ (i\neq s)\ \text{ 或 } \sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{it}=0\ (j\neq t)$$

**应用一**　计算行列式的值.

行列式按某一行(列)展开能将高阶行列式的计算转化为若干个较低阶行列式的计算，是计算数字行列式的常用方法. 值得注意的是，展开前往往先利用行列式的性质，将某行(列)的元素尽可能多的消成零，然后利用定理 1 进行降阶计算.

**例 1** 计算行列式$\Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$

【解答】

为运算方便起见，通常选择元素较为简单(或较小)的行(或列)，本题可选择第2行或第3列.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\overset{r_i-2r_4}{\underset{i=1,3}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}4&-1&0&-10\\1&2&0&2\\10&3&0&-14\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

$$=(0\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+0\cdot A_{33}+1\cdot A_{43}) \qquad \text{(按第3列展开)}$$

$$=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}4&-1&-10\\1&2&2\\10&3&-14\end{vmatrix}\overset{c_i-2c_1}{\underset{i=2,3}{=\!=\!=}}-\begin{vmatrix}4&-9&-18\\1&0&0\\10&-17&-34\end{vmatrix}$$

$$=-(1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13}) \qquad \text{(按第2行展开)}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix} \qquad \text{(两列成比例)}$$

$$=0$$

注意：利用代数余子式计算行列式时，余子式所带的符号千万不能遗忘. 按某一行或某一列展开时，展开式中各项所带符号有下列规律：

$$\begin{vmatrix}+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}$$

即行列式中主对角线上元素的余子式总是带正号的，其他元素余子式所带符号是负正相间.

**应用二** 求某行(列)元素的代数余子式的(代数)和.

已知行列式$D=|a_{ij}|$及其元素$a_{ij}$的代数余子式$A_{ij}$和任意$n$个数$k_1,\cdots,k_n$，求和式$\sum\limits_{j=1}^{n}k_jA_{ij}$或$\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA_{ij}$.

首先应注意，上面的和式均表示某个行列式$\widetilde{D}$，其第$i$行或第$j$列元素为$k_1,\cdots,k_n$，因此将$D$的第$i$行元素或第$j$列元素改为$k_1,\cdots,k_n$，即为$\widetilde{D}$. 写出$\widetilde{D}$后，再算出$\widetilde{D}$，即为所求的和式.

如果$k_1,\cdots,k_n$恰为$D$中某行但不是第$i$行，或为某列但不是第$j$列元素，则上述和式的值为0.

**例 2** 设$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{vmatrix}$，求$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$，其中$A_{i2}\ (i=1,2,3,4)$为$D$中元素$a_{i2}$的代数余子式.

【解答】

因$A_{i2}$为中元素$a_{i2}$的代数余子式$(i=1,2,3,4)$，故将$D$中第 2 列元素依次换为$3,7,4,8$，即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix}1&3&3&4\\5&7&7&8\\2&4&4&5\\6&8&8&9\end{vmatrix}=0.$$

问题 1.2.8　如何证明一行列式能被某一整数整除？

【指点迷津】

下面所讨论的$n$阶行列式$D_n$，其元素均为个位整数，$D_n$被某整数整除的命题有如下两种类型，其证法基本相同.

第一种类型是命题中给出能被某整数$m$整除的$n$个整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，且$a_i$是$n$位数，其各位数字恰为$D_n$中第$i$行(列)的各个元素，$i=1,2,\cdots,n$.

其证法是：由于$D_n$的元素为个位整数，将第1列(行)乘上$10^{n-1}$，将第2列(行)乘上$10^{n-2}$，…，将第$n-1$列(行)乘上10，都加到第$n$列(行)上，则$D_n$的第$n$列(行)恰为所给定的$n$个数. 由于第$n$列(行)的元素都能被$m$整除(以下简称第$n$列(行)被$m$整除)，故$D_n$也能被$m$整除.

**例 1** 已知1326，2743，5005，3874都能被13整除，不计算行列式的值，试证

$$D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}$$

能被13整除.

【证明】

把$D_4$的第1行看成一个四位数，其千位数字为1，百位数字为3，十位数字为2，个位数字为6. 同样将$D_4$的第2,3,4行也分别看成四位数2743，5005，3874.

为使$D_4$的第4列上各元素变成这 4 个四位数，将第1,2,3列分别乘以$10^3$，$10^2$，10，且都加到第4列，得到：