QIANTAN SHUXUE FANGFALUN

徐利治

浅谈数学方法论

辽宁人民出版社

浅谈数学方法论
徐 利 治
*
辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
朝阳六六七厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：1 3/8
字数：26,000 印数：1—19,200
1980年9月第1版 1980年9月第1次印刷
统一书号：7090·92 定价：0.13元

前　　言

数学方法论是研究数学中的发现、发明以及创造性活动的规律和方法，它的内容很丰富，不可能用简短的篇幅作出全面深入的介绍，这里只好用“浅谈”来取得读者的谅解。

这本小册子是根据一个报告的提纲写成的。1978年秋至1979年夏，笔者曾采用上述提纲，先后给旅大市中学教师、吉林省教育学院理科教师进修班以及吉林大学数学系学生作过报告。由于很多人向笔者索取讲稿，所以在同志们和朋友们的建议下便编写了这本小册子。但仓促成书，考虑不周，希望读者指正。

如果这本小册子能对中学教师、中学生以及大学理科学生钻研数学有所启发、帮助的话，那末笔者将会感到极大的安慰。

书稿承辽宁师范学院数学系主任王鸿钧同志和梁宗巨教授审阅，使原稿有所改进，在此致以谢意。

徐　利　治

1980年2月17日于长春

目　　录

§1 引　言

我们知道，关于数学的发现、发明等方法的研究是由来已久的．17世纪伟大的哲学家和数学家莱布尼兹（*Leibniz*，1646—1716）就曾写过《论发明的技巧》的著作．解析几何的创始人笛卡儿（*Descartes*，1596—1650）也曾出版过“方法论”的专著．他曾特别强调怎样从数学解题过程中总结出一般的思想方法及法则．例如，他说过这样的话：“我所解决的每个问题，都成为以后解决其它问题的规则．”近代的著名数学家中，象庞加莱（*Poincare*，1854—1912）、克莱茵（*Klein*，1849－1925）、希耳伯特（*Hilbert*，1862—1943）、阿达玛（*Hadamard*，1865—1963）等人也都分别发表过关于数学方法论的精辟见解和论著．

特别值得提到的是一位美籍匈牙利数学家鲍利亚（*Pólya*），他曾花数十年时间，致力于“数学发现”与“解题思想方法”的研究．他的一些著作正在被译为中文．还有一位美国数学教授克莱因（*Kline*）曾在1972年出版了一本厚达1200页的巨著，系统地叙述和总结了古今数学思想发展史．该书包藏着大量的题材，可作为我们研究数学方法论的极为宝贵的参考资料．

上面谈了一段情况，可是还没有明确回答这样一个问

题：我们从事数学工作的人，也即以数学为职业的“数学工作者”们，其中包括大量的中学和大专学校的数学教师们以及一些专职的科研工作者，为什么应该重视数学方法论的研究呢？我想回答是简单的：有出息的数学工作者总是要在数学科学中有所作为、有所创新的．尤其是数学教师们总是希望能够多教出些有创造发明才能的学生来．因此，怎样去研究解决数学问题，怎样才能去发现数学原理和创造数学方法，这些属于“方法论”范畴的问题，自然需要引起足够的注意和认真的研究．

即使对于大专学校和中学的学生说来，他们正在学习各门数学课程，也必须注意掌握数学的思想方法，才能学得深，理解得透；遇到实际问题时，才能使数学工具发挥作用；特别有才能的学生还可能在青年时代就对数学作出贡献．在数学发展史上我们已经看到许许多多这样的先例．

§2 归纳法与类比法

现代的中学代数里都要讲述“数学归纳法”，它是用来证明同自然数有关命题的一种方法．但这里要谈的是一般自然科学中用到的归纳法，通常称为“经验归纳法”或“实验归纳法”．

提到“实验”二字，有的人或许会奇怪：数学又不是物理学或化学，怎么也需要实验呢？不错，数学定理和公式的证明，一般需用演绎法．但是，去发现真理往往比事后论证

更为重要．又因为数学的真理往往反映客观存在的数量关系和空间形式，所以有时确实需要通过实验和观察才能发现它们．

例如我国古代《周髀算经》中就有关于勾股定理的特殊形式及具体运用．还有后来贾宪、杨辉关于二项式展开系数的三角形的发现等等，这些都来源于经验归纳法，而不是靠演绎法得来的．

十八、十九世纪有突出贡献的数学家欧拉（*Euler*，1707—1783）和高斯（*Gauss*，1777—1855），根据他们自身的工作经验，曾发表过一些“经验之谈”．欧拉说过：“数学这门科学，需要观察，也需要实验．”高斯也说过，他的许多定理都是靠归纳法发现的．

我们可以举出大量实例来说明经验归纳法确实是发现数学真理的一种有效手段．

例 1 （直线分割平面问题）：试问平面上 n 条彼此相交而无三者共点的直线能够把平面分割成多少部分？

这是个很简单的问题，如以 S_n 表示分割平面部分的数目，则由简单的实验观察可知

n	1	2	3	4	5	…
S_n	2	4	7	11	16	…

由观察我们发现：$S_1=1+1$，$S_2=1+1+2$，$S_3=1+1+2+3$，$S_4=1+1+2+3+4$．依此类推，便可猜想到：

$$S_n=1+1+2+3+4+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)+1.$$

然后用数学归纳法，便可立即证明上述公式是普遍成立的（请读者自己去给出数学归纳法证明）．

例 2 （欧拉的面、顶、棱公式）：试问空间中的任何一个凸多面体的面数、顶数与棱数之间有怎样的关系？

以F,V,E分别代表一个凸多面体的面数、顶点数和棱数．猜想欧拉当年一定观察过许多具体的多面体，对F,V,E各数作了系统归纳之后，才发现他的著名公式的．现在不妨模拟一遍他多半走过的道路．试先调查一下四面体、六面体、六棱锥及六棱柱的F,V,E各数（参看图 1）．

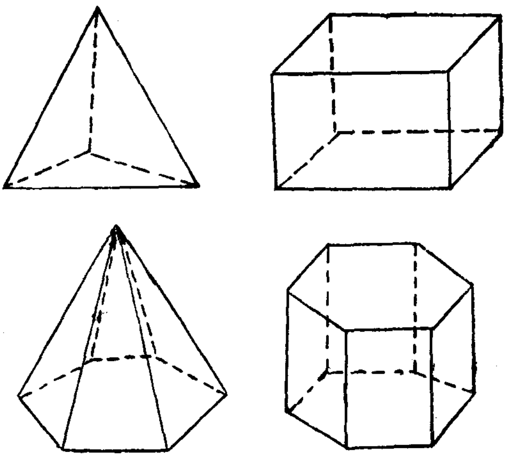

图 1

由观察可得

F	4	6	7	8
V	4	8	7	12
E	6	12	12	18

敏感的读者或许已经能够从上示的少量数据中归纳出欧拉公式“$F+V-E=2$”来，但是数据毕竟太少了，靠少量经验得出的公式还是难以令人相信的。猜想欧拉当初一定走得更远，他会通过多面体的“生成法”去进一步考虑问题。

例如，在四面体或六面体之外加一顶，使它和靠近那一面的各顶点联起来作成新的多面体，然后再考察F,V,E的变化规则，结果会发现（$F+V$）和E的增加数相同，故在公式中的$F+V-E$数值保持不变（参看图2）。

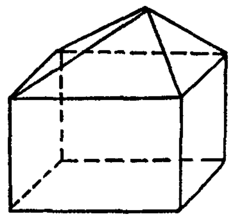

图 2

一般说来，设想多面体外增加的一点A和靠近它的那一面（比方说是有k个顶点的面）的各顶点联结起来，这样就增加了k个边，也就是E增加了数目k，另一方面，又增加了（$k-1$）个面，外加顶点A，这样，（$F+V$）的数值也增加了（$k-1$）$+1=k$，因此差量$(F+V)-E$总是保持不变的。可以相信，欧拉正是通过这样的“实验——归纳——推理”的途径才得出他的著名公式的。

例 3 （高斯分圆问题）：用直尺和圆规作图，能否把圆周分成n等份？也就是能否作出圆内接正n边形？

这是古希腊几何学上流传下来的一个尺规作图难题。十八世纪末期，这个难题被年轻的高斯解决了。高斯早年在德国格廷根大学读书时，数学和拉丁文都学得很好。为了选择毕业后的职业出路，他正在语言学与数学专业两者之间踌躇不

决的时候（当时只有19岁），发现了正17边形尺规作图法，这使他极为兴奋，于是便立志专攻数学。后来，果然成为一位大数学家。

高斯发现凡边数n等于费马素数时，则圆周即可用尺规划分为n等份，也即这样的正n边形可用尺规作出来。所谓费马素数就是形如

$$F_k = 2^{2^k} + 1 = \text{素数}$$

的正整数。例如当$k=0$，1，2，3，4时，得到$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$，$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$，$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$，$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$，$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$，这些数碰巧都是素数，所以都叫做费马素数。根据高斯发现的定理，正17边形、正257边形等皆可用尺规作出。又因为每个圆弧都可用尺规进行二等分，连续平分t次，也就能得到2^t等份。因此高斯的分圆定理是说：如果边数N能写成

$$N = 2^t \cdot (2^{2^k} + 1), \qquad (2^{2^k} + 1 = \text{素数})$$

的形式，那么尺规作图法就能把圆周等分N份，也就是能作出这样的正N边形来。

进一步，他还给出了更一般的定理：如果$p_1, p_2, \cdots, p_n$是一批相异的素数，它们都能表成费马素数的形式，那么边数为$N = 2^t \cdot p_1 p_2 \cdots p_n$的正多边形也可以作出来。

我们来回顾一下高斯的思想方法。他的一般分圆定理无疑是从特例分析中归纳出来的。基本关键还在于他深刻地洞察到正17边形作图的可能性。只要一旦发现了正17边形作图可能性之后，那么再迈前一步，去得出一般性结论就不怎么困难了。

高斯青少年时代已经熟悉复数的运算法则，也知道复数的几何表示法。因此他很自然地会想到方程

$$Z^n=1=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

的 n 个根

$$Z_0=1,\ Z_k=\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

正好是复数平面上以原点为中心，以 1 为半径的单位圆周上的 n 个等分点所表示的复数值。

在几何作图中，我们总是用线段长度来表示数量，因此，如果能把 Z_1 的实部和虚部两个数量 $\cos\frac{2\pi}{n}$ 与 $\sin\frac{2\pi}{n}$ 用尺规作出来，那么圆周的 n 分之一也就得到了。因此为解决分圆问题，关键在于方程 $Z^n-1=0$ 的一个复数根能否用尺规作出其数量（即作出其实部与虚部分别用线段长度表示的数量）。

方程 $Z^n-1=0$ 既是如此重要，后人也就称它为“分圆方程”。根据归纳法思想，即从特殊到一般的思想法则，高斯首先细心地考察了 $n=3$ 和 $n=5$ 的情形（参看图 3）。

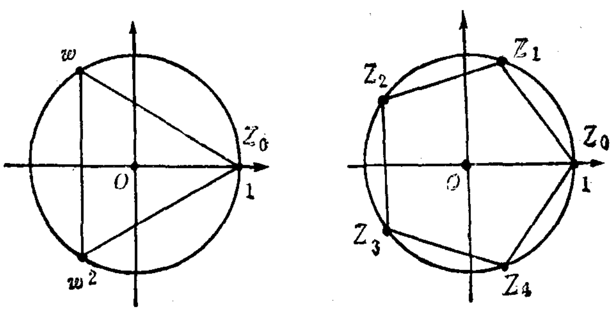

图 3

$Z^3-1=0$的情形很简单，它的三个根就是1的立方根，即

$$Z_0=1,\ Z_1=\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ Z_2=\omega^2-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

这三个根在复数平面上的分布位置见图3左图。同理，右图上单位圆周的五个等分点 Z_0，Z_1，…，Z_4 表示分圆方程 $Z^5-1=0$的五个相异根，其中

$$Z_1=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$$

用代数方法容易求出Z_1的根式表示。

分圆方程可以分解为

$(Z-1)(Z^4+Z^3+Z^2+Z+1)=0$，故 $Z_0=1$。其余四根须从方程 $Z^4+Z^3+Z^2+Z+1=0$解出。因 $Z\neq 0$，可用 Z^2 除两边，故此方程等价于

$$Z^2+Z+1+Z^{-1}+Z^{-2}=0$$

即 $$(Z^2+Z^{-2})+(Z+Z^{-1})+1=0$$

亦即 $$(Z+Z^{-1})^2+(Z+Z^{-1})-1=0$$

视 $x=Z+Z^{-1}$，解 $x^2+x-1=0$得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

再从 $Z+Z^{-1}-x=0$ 即 $Z^2-xZ+1=0$ 解出，得

$$Z=\frac{x\pm\sqrt{x^2-4}}{2}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2-4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\pm i\sqrt{4-\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right\}.$$

于是，在根式中取+号或-号，共可得四个复数根Z_1，Z_2，Z_3，Z_4。

我们知道，在平面上取定一线段作为单位长度后，它的$\frac{n}{m}$便可用尺规作出来。如果把长为$\frac{n}{m}$的线段和单位长线段加起来（连接起来），用作直径画圆，并在连接点处作垂直于该直径的弦，那么由圆的“相交弦定理”便立即知道弦的一半等于$\sqrt{\frac{n}{m}}$。由此可见，凡是由有理数通过 +、-、×、÷、$\sqrt{\quad}$等五则运算有限多次得出来的数量(用线段长度表示的量)，均可由尺规作图法作出来。根据这个准则，我们便立即理解为什么圆周的3等分、5等分的点（即$Z_0=1$，ω，ω^2及Z_1，Z_2，Z_3，Z_4等复数值）均能由尺规作出。

正是从$n=2^{2^0}+1=3$，$n=2^{2^1}+1=5$出发，使高斯通过类比与归纳方法猜到了次数为$n=2^{2^2}+1=17$的n次分圆方程应该也能用根式运算解出。他曾精细地考察了方程

$$Z^{16}+Z^{15}+Z^{14}\cdots+Z^3+Z^2+Z+1=0$$

也即方程 $(Z^8+Z^{-8})+(Z^7+Z^{-7})+\cdots+(Z+Z^{-1})+1=0$

的代数解法。把$(Z^k+Z^{-k})(k=1,2,\cdots,8)$进行适当分组，并通过一些代换，他终于利用四重平方根式$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\quad}}}}$把$Z_1$，$Z_2$，…，$Z_{15}$ $(Z_0=1)$具体地表达出来了。这样一来，按照上述尺规作图的准则，便证明了正17边形作图的可能性（欲知其详，请参考附录三）。

近代还有个德国人不厌其烦地把分圆方程$Z^{257}=1$用根式仔细地解了出来，从而还用巨幅纸张具体地作出了一个正257边形。这从理论上看当然没有什么意义了。

如上所述，高斯青年时代的第一个功绩就在于从理论上解决了历史上遗留下来的“等分圆周问题”．他当时之所以能解决这一问题，就是因为他善于从简单特殊的具体例子中，利用归纳法预见到进一步的带有一般性质的结论．但是如果他缺乏必要的数论知识、解析几何知识和精练的代数计算技巧，那么他也是不会顺利地用根式解出方程 $Z^{17}=1$的！

下面我们再来谈一点联想式的类比推理法．我们知道，在近代科技发明中，类比推理原则用得非常成功．例如“近代仿生学”就是建立在类比推理的原则上．仿生学是用“生物机制”作类比．例如，见到燕子的飞翔，就使人们想到设计滑翔机和飞机；看到鱼的浮沉想到设计潜水艇；看到蝼蛄的钻洞想到制造挖土机；观察到蚕的吐丝就使人发明了人造丝工程．当然这些都是工程科学上的大发明．

至于在数学中，根据类比联想的方式去解决问题和发现真理，更是到处遇见，不足为奇的事情．一般说来，这种思想方法往往包括“类比——联想——预见”三个步骤．这里举一简单例子．

例 4 （一个重要不等式）：下面我们写出的任意数量x，y,z 等假定均不为负．首先，从简单的不等式开始：

$$x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geqslant 0$$

立即可得$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\geqslant xy$，由此产生类比联想：考虑是否会有$\frac{1}{3}(x^3+y^3+Z^3)\geqslant xyZ$ （？）因而需要考查是否会有

$$x^3+y^3+Z^3-3xyz\geqslant 0 \qquad (?)$$

鉴于上式左端是个“循环对称式”，我们尝试作一下分解，

果然成功：

$$x^3+y^3+Z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0.$$

这就验明了联想到的事实：

$$\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\geqslant xyz.$$

由此再进一步通过类比及推广，我们便想到一般不等式：

$$\frac{1}{n}(x_1{}^n+x_2{}^n+\cdots+x_n^n)\geqslant x_1x_2\cdots x_n,$$

其中各 x_i $(i=1, \cdots, n)$ 皆为正数，记 $A_1=x_1{}^n, A_2=x_2{}^n, \cdots, A_n=x_n^n$，则得

$$\frac{1}{n}(A_1+A_2+\cdots+A_n)\geqslant(A_1A_2\cdots A_n)^{1/n}.$$

这就是算术平均值不小于几何平均值的基本不等式。

这个重要不等式并不明显，但它却可以从一个极简单、极平凡、极容易的例子出发，通过类比、联想、推广（预见）等步骤逐步发现出来。

一般说来，类比、联想和归纳等方法往往是交互为用的。其基本规律就是“从特殊到一般，从个别到整体”。例如，就欧拉的“面、顶、棱公式”来说，我们所举出的例子都是特殊的、个别的，但一旦发现了普遍公式，那就概括了一切可能情形，从而具有整体性和一般性。

从特殊到一般，必然带有从具体到抽象的特点。例如从具体的$n=1$，$n=2$，$n=3$等过渡到一般的任意的自然数n，就达到了抽象的理性认识的阶段，这是思想过程中的“飞跃”。我们使用“经验归纳法”或是“类比联想法”，最后都需要

这种“飞跃”，否则便不可能获得数学真理，即一般性定理或公式。

如上所述，我们所介绍的归纳法与类比法主要是一项发现数学真理（定理及公式）的有效手段。一般说来，如果猜到了或发现了一个涉及自然数n的命题之后，那么还必须利用数学归纳法或别种论证法去证明它。所以现代的数学工作者，在从事创造性的科研活动中，惯常是采取如下的途径和步骤：

从具体问题具体素材出发	实验—归纳—推广 类比—联想—预见	形成普遍命题	—	证明

我们所举的例1、例2、例3、例4都可利用数学归纳法给出严格证明。当然例1特别简单，例2略较麻烦（可以对顶点个数n施用数学归纳法），例3最为困难（还需要借助于数论知识）。至于例4则可借助于下列不等式

$$(n+1)A^n(A-1)\geqslant A^{n+1}-1,\quad (A>0)$$

给出数学归纳法证明。这是一个有趣味的习题，建议感兴趣的读者自己去找出它的证明。

最后，我们再举一个在数学史上很有启发性的例子。这个例子在鲍利亚所著《数学中的归纳法与类比法》一书中曾作过详细的介绍。

例5 （一个级数求和问题）：数学家伯努利（*Bernoulli*，1654—1705）曾经求得不少无穷级数的和。但他对自然数倒数平方的级数和

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

却无法求出来。当时他曾公开征求过这一求和问题的解答。可是直到十八世纪上半期，才由欧拉解答出来．欧拉通过一种巧妙的类比推理方法发现

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

欧拉发现这个结果后，当时未能给出严格证明，不免有些怀疑．于是他对上述等式两边还做了数值计算，算到七位数字都一致，即得出等式两边的数值都等于1.644934….这才使得欧拉确信他所发现的级数和$\pi^2/6$是正确无误的．当然，现今的微积分学中已有各种方法可以证明上述结果．

我们来看看欧拉当初是怎样发现上述结果的．首先，欧拉熟知多项式因式分解定理：假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 是n次代数方程

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

的n个不等于零的根，则多项式可析成因式乘积

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right).$$

类似地，对于只含偶次项的$2n$次方程

$$b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}=0, \quad (b_0\neq 0)$$

假设有$2n$个互不相同的根

$$\beta_1,-\beta_1,\beta_2,-\beta_2,\cdots,\beta_n,-\beta_n,$$

则得 $b_0-b_1x^2+b_2x^4-\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}$

$$=b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right).$$