工程模糊数学方法

谢维信 编著

西安电子科技大学出版社

工程模糊数学方法

谢维信　编著

西安电子科技大学出版社
1991

(陕)新登字010号

内 容 简 介

本书以便于工程学科人员学习的方式讲述模糊集合和模糊系统的基本内容，并向读者展示了模糊集合理论在工程应用方面的最新发展。主要内容包括模糊集合、模糊关系和模糊逻辑的基本知识，语言变量和模糊算法，模糊信息理论，专家系统和模糊控制器，模糊聚类和识别以及模糊信息处理的硬件实现。书中给出了用计算机处理模糊信息的有关算法、程序及接口界面。

本书适合于工科大学电子工程专业和计算机专业的研究生和高年级本科生使用，也可供科研和工程技术人员阅读。

工程模糊数学方法
谢维信　编著
责任编辑　马乐惠

西安电子科技大学出版社出版发行
西安电子科技大学印刷厂印刷
新华书店经销
开本 850×1168　1/32　印张 6.2/32　字数 148 千字
1991 年 12 月第 1 版　1991 年 12 月第一次印刷　印数 1—2 000

ISBN7—5606—0172—3/TP.0055 (课)　定价:2.15 元

前　言

为了建立智能系统，必须解决人类知识中的不确定性问题。随着对不确定性问题研究的深入开展，人们已经理解到用概率论和统计学来讨论的随机性并非是研究不确定性的唯一形式。模糊性也是一种不确定性，这种不确定性是用模糊集合的概念来表示的。近二十年来，模糊集合理论已经获得了很大的发展，并已在人工智能、信息处理、决策和逻辑推理、模式识别、机器人、管理科学、运筹学等多个领域获得了广泛的应用。

本书讲述了模糊集合和模糊系统的基本内容，并向读者展示了模糊集合理论在工程应用方面的最新发展。在书中适当的地方给出了用计算机处理模糊信息的有关算法、程序以及接口界面。本书内容适合于工科大学研究生和高年级本科生做为教材使用，也可供科研和工程技术人员阅读。

本书第一章至第三章讨论了模糊集合和模糊逻辑的基本内容，为了便于读者学习，其中对学习本课程必备的集合论的基本知识做了回顾。第四章讲述语言变量和模糊算法。第五章集中讨论模糊信息。第六章和第七章分别论述了模糊集合论两个突出的应用领域。第八章讨论实现模糊信息处理的接口界面和逻辑运算硬件，并且介绍了模糊计算机的概念。

作者希望本书将能有助于推进模糊集合理论在工程应用方面的发展，并且由衷欢迎读者对本书提出批评和建议。

本书的工作得到了国家自然科学基金重大项目“模糊信息处理，思维决策与机器智能”的资助，作者在此表示感谢。

谢维信

1989 年 6 月

目　录

第一章　模 糊 集 合

1.1　普 通 集 合

一、集合的概念

我们把被讨论的全体对象叫做论域，论域常以 U，V，…，X，Y，…等大写字母表示。把论域中的每个对象叫做元素，以相应的 u，v，…，x，y，…等小写字母表示。

定义 1.1.1　给定论域 X 和给定某一性质 P，X 中具有性质 P 的元素所组成的总体叫做集合，简称为集。

常常以大写字母 A，B，…来表示集合。从 X 中任意指定一个元素 x 及任意一个集合 A，在 x 和 A 之间，要么 x 属于 A（记作 $x\in A$），要么 x 不属于 A（记作 $x\notin A$），二者必居且仅居其一，这是普通集合论中最起码的要求。

如果一个集所包含的元为有限个，就叫做有穷集，否则就叫做无穷集。

在数学上常用下式表示某一集合 A：

$$A = \{x|P(x)\} \tag{1.1}$$

其中 P (x) 是“x 具有性质 P”的缩写。

［例 1.1.1］　$A=\{x|x$ 是正整数$\}$，即 A 是由全体正整数所组成的集合。有时可简写成 $A=$ $\{x$ 是正整数$\}$。

有穷集可以用列举法来表示。

［例 1.1.2］　$A=\{x|x=a$，b，c，或 $d\}$，这是由 a，b，c，d 4 个元素组成的集合。用列举法可表示为 $A=\{a, b, c, d\}$。

［例 1.1.3］ $A=\{x|x=a\}=\{a\}$，这是一个单点集，即仅有 1 个元 a 所构成的集。

为了表示方便起见，我们在后面的论述中引进了逻辑符号 $\wedge$，$\vee$，c，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$，$\exists$ 和 $\forall$。$A\wedge B$ 表示 A 且 B。$A\vee B$ 表示 A 或 B。A^c（或记做 $\overline{A}$）表示非 A。$A\Rightarrow B$ 表示 A 蕴含 B。$A\Leftrightarrow B$ 表示 A 和 B 等价。$(\exists\ x)P(x)$ 表示存在 x 满足 $P(x)$。$(\forall\ x)P(x)$ 表示所有的 x 均满足 $P(x)$。

二、空集、全集、子集和幂集

定义 1.1.2 不含论域 X 中任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$，即

$$\varnothing = \{x|x\neq x\}$$

定义 1.1.3 论域的全体称为全集，记为 Ω，即表示 $(\forall\ x)\in\Omega$。

定义 1.1.4 设 A，B 是 X 上的两个集合，如果对任意 $x\in X$，都有

$$x\in A\Rightarrow x\in B \quad (\text{若 } x\in A\text{，则 } x\in B)$$

则称 B 包含 A，记作 $B\supseteq A$，或称 A 被 B 包含，记作 $A\subseteq B$。

定义 1.1.5 如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记作 $A=B$。

定义 1.1.6 若 $B\subseteq A$，则称 B 是 A 的子集。

显然有

$$\varnothing\subseteq A\subseteq\Omega \tag{1.2}$$

即空集是任何集合的子集。

定义 1.1.7 集合 A 的全体子集组成了 A 的一个子集族，叫做集合的幂，记作 $\mathscr{P}(A)$，即

$$\mathscr{P}(A)=\{B|B\text{ 是 }A\text{ 的子集}\}$$

例如，设 2 元集 $A=\{a, b\}$，则

$$\mathscr{P}(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$

于是 X 的子集 A 有两种记法：$A\subseteq X$ 或 $A\in\mathscr{P}(X)$。

三、集合的运算及其性质

定义 1.1.8 设 A、$B\in\mathscr{P}(X)$，

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\} \tag{1.3}$$

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\} \tag{1.4}$$

$$A^c=\{x|x\notin A\} \tag{1.5}$$

分别叫做 A 与 B 的并集、交集和 A 的补集。

当有 n 个集合 A_1，A_2，…，A_n 进行并、交运算时，记作

$$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i \tag{1.6}$$

$$A_1\cap A_2\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i \tag{1.7}$$

可以用文氏图来表示集合的运算。图 1.1.1 就是利用这种图来表示并集、交集和补集。

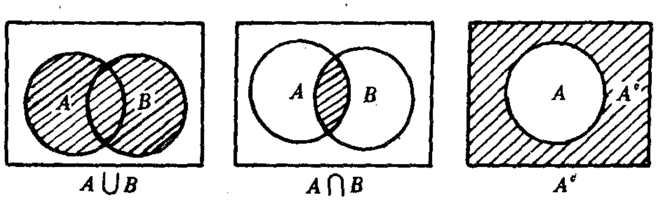

图 1.1.1 集合运算示意图

上述集合运算有如下一些性质，注意到它们都是成对出现的。

(P1) **幂等律**

$A\cup A=A$ $\quad$ $A\cap A=A$

(P2) **交换律**

$A\cup B=B\cup A$ $\quad$ $A\cap B=B\cap A$

(P3) **结合律**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(P4) **吸收律**

$$(A \cap B) \cup B = B$$
$$(A \cup B) \cap B = B$$

(P5) **分配律**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(P6) **两极律**

$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

(P7) **复原律**

$$(A^c)^c = A$$

(P8) **互补律**

$$A \cup A^c = \Omega$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

(P9) **对偶律**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

对偶律也叫做 De - Morgan 律。由它可导出一条对偶原则——集论中成立的任一定理，若将其中的$\cup$与$\cap$互换，A_i 与 A_i^c 互换，$\subseteq$与$\supseteq$互换，则该定理仍成立。

对于多个集合，对偶律可表示为

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$$

定义 1.1.9 记

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \tag{1.8}$$

称为 B 对 A 的差集，简称 A 减 B。

差运算与补运算可以互相表示：

$$A - B = A \cap B^c \tag{1.9}$$

$$A^c = \Omega - A \tag{1.10}$$

定义 1.1.10 记

$$A \ominus B = (A - B) \cup (B - A) \tag{1.11}$$

称为 A 与 B 的对称差。

图 1.1.2 表示了集合的差与对称差。由图可见，$A-B$ 意味着属于 A 而不属于 B 的所有元组成的集合，而 $A\ominus B$ 意味着或仅属于 A 或仅属于 B 的所有元组成的集合。

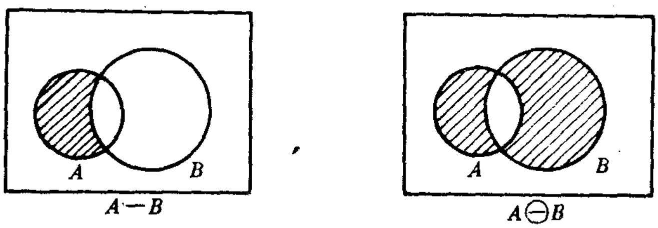

图 1.1.2 集合的差与对称差

四、特征函数

设 A 是论域 X 上的集合，记

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in A \\ 0 & \text{当 } x \notin A \end{cases} \tag{1.12}$$

为集合 A 的**特征函数**。

式(1.12)表明，对于任给 $x\in X$，都有唯一确定的特征函数 $\mu_A(x) \in \{0,1\}$ 与之对应。对这样的对应关系，我们称之为**映射**。据此，我们可以将 A 表示为

$$\mu_A(x) : X \to \{0,1\} \tag{1.13}$$

上式表示 $\mu_A(x)$ 是从 X 到 $\{0,1\}$ 的一个映射，它唯一确定了集合 A：

$$A=\{x \mid \mu_A(x)=1\}$$

特征函数 $\mu_A(x)$ 表征了元素 x 对集合 A 的隶属程度。当 $\mu_A(x)=1$，表示 x 完全隶属于 A；当 $\mu_A(x)=0$，表示 x 完全不属于 A。

［例 1.1.4］ 设论域 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，集合 $A=\{x_2,x_3,x_5\}$。我们得到

$$\mu_A(x_1)=0, \quad \mu_A(x_2)=1 \quad \mu_A(x_3)=1,$$
$$\mu_A(x_4)=0, \quad \mu_A(x_5)=1$$

我们可以将 A 记为

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(x_1)/x_1+\cdots+\mu_A(x_5)/x_5 \\ &= 0/x_1+1/x_2+1/x_3+0/x_4+1/x_5 \end{aligned}$$

这里的“+”号并不是求和，而是表示各个元素和特征函数对应关系的一个总括。

若 $x\in A$，则 $x\notin A^c$；若 $x\notin A$，则 $x\in A^c$。由此我们得到

$$\mu_{A^c}(x)=1-\mu_A(x) \tag{1.14}$$

除了这条运算性质外，我们不难看出，特征函数也满足下列两条运算性质：

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x)) \tag{1.15}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x)) \tag{1.16}$$

［例 1.1.5］ 对于例 1.1.4 的情况，我们可以得到

$$\mu_{A^c}(x_1)=1, \quad \mu_{A^c}(x_2)=0, \quad \mu_{A^c}(x_3)=0$$
$$\mu_{A^c}(x_4)=1, \quad \mu_{A^c}(x_5)=0$$

我们将 A^c 表示为

$$A^c=1/x_1+0/x_2+0/x_3+1/x_4+0/x_5$$

集合运算，实质上是逐个元素地对其特征函数进行运算。特征函数的这种运算与二值逻辑的布尔运算（$\{0,1\}$，$\vee$，$\wedge$，^{c}）一

致。

根据特征函数的讨论，我们可以引出模糊集合的概念。

1.2 模糊集合

一、模糊集合的概念

上节已述，在普通集合论中，论域 X 中的某一个元素 x 要么完全属于某个集合 $A(\mu_A(x)=1)$，要么完全不属于 $A(\mu_A(x)=0)$，元素间的分类具有截然分明的边界。从这个意义上说，也可以称普通集合为"硬集"。

［例 1.2.1］ 设教室中有 5 个学生，分别以 s_1，s_2，s_3，s_4 和 s_5 来表示，其中 s_1，s_2 和 s_3 是男学生，s_4 和 s_5 是女学生。我们以 A_1 表示男学生的集合，以 A_2 表示女学生的集合。使用特征函数的概念，我们可以将 A_1 和 A_2 分别表示为

$$A_1 = 1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 + 0/s_4 + 0/s_5$$

$$A_2 = 0/s_1 + 0/s_2 + 0/s_3 + 1/s_4 + 1/s_5$$

显然，A_1 和 A_2 的分界是截然分明的。

但是，当我们试图在这 5 个学生中构成一个表示"有才干的学生"的集合时，会感到传统的集合概念是难以应用的。学生的才干虽有高低之分，但是，对于"有才干的学生"这样的集合，我们不能指明哪些学生一定属于它，哪些学生一定不属于它。实际上人们在处理这样的问题时，也不需要完全确定谁是或者谁不是它的成员，只需要对每个元素确定一个数，用这个数来表示该元素对所言集合的隶属程度。若学生 s_1 对于"有才干的学生"的集合隶属程度高于学生 s_2，我们就说学生 s_1 比学生 s_2 相对地更属于"有才干的学生"这个集合。

正是考虑到在现实世界中很多事物的分类边界是不分明的，

而这种不分明的划分在人类的识别、判断和认知过程中起着重要的作用，为了用数学的方法来处理这种问题，L. A. Zadeh 于 1965 年提出了模糊集合的概念。他用隶属函数来划分处于中介过渡的事物对差异双方所具有的倾向性。可以认为隶属函数是普通集合中特征函数的推广。当我们将特征函数的值域由{0,1}二值扩展到[0，1]区间时，就描述了一个模糊集合。

定义 1.2.1 论域 X 上的模糊集合$\underset{\sim}{A}$由隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 来表征，其中 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 在实轴的闭区间 [0，1] 取值，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值反映了 X 中的元素 x 对于$\underset{\sim}{A}$的隶属程度。

模糊集合完全由其隶属函数所刻划。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近于 1，表示 x 隶属于$\underset{\sim}{A}$的程度很高；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近于 0，表示 x 隶属于$\underset{\sim}{A}$的程度很低，当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值域为{0，1}二值时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 演化成普通集合的特征函数 $\mu_A(x)$，$\underset{\sim}{A}$便演化成一个普通集合 A。我们可以认为模糊集合是普通集合的一般化。图 1.2.1 对此作出了说明。

对于任给 $x\in X$，都有唯一确定的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\in[0,1]$ 与之对应。类似于式 (1.13)，我们可以将 $\underset{\sim}{A}$表示为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x): X\to[0,1]$$

即 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 是从 X 到 [0，1] 的一个映射，它唯一确定了模糊集合$\underset{\sim}{A}$。

我们在讨论模糊集合的概念时，论域 X 所包含的元素是分明的，并不模糊，而只是 X 上模糊集合 $\underset{\sim}{A}$才是模糊的。从这个意义上说，常常也称模糊集合为模糊子集合。

[例 1.2.2] 取论域 X 是实轴 R，并且以$\underset{\sim}{A}$表示“远大于 1 的实数”，模糊集合$\underset{\sim}{A}$的隶属函数可以确定为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\leqslant 1\\ [1+(x-1)^{-1}]^{-1} & \text{当 } x>1\end{cases}\tag{1.17}$$

如图 1.2.2 所示。

[例 1.2.3] **以年龄为论域，取 $X=[0,200]$，对于“年**

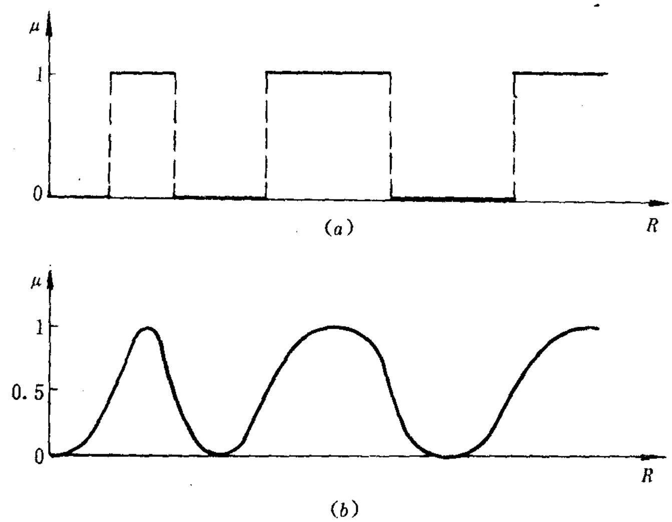

图 1.2.1

(a) 实轴 R 上的普通集合；

(b) 实轴 R 上的模糊集合

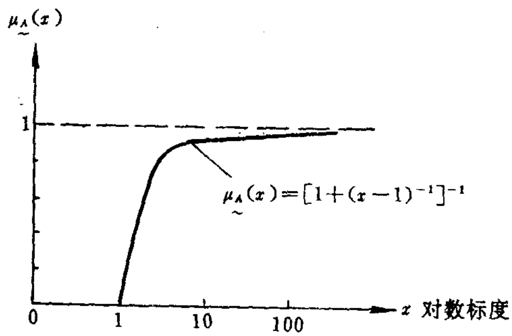

图 1.2.2

轻" $\underset{\sim}{Y}$和 "年老" $\underset{\sim}{O}$两个模糊集的隶属函数可以描述如下（见图1.2.3）：

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & \text{当 } 25< x\leqslant 200\end{cases}\tag{1.18}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & \text{当 } 50< x\leqslant 200\end{cases}\tag{1.19}$$

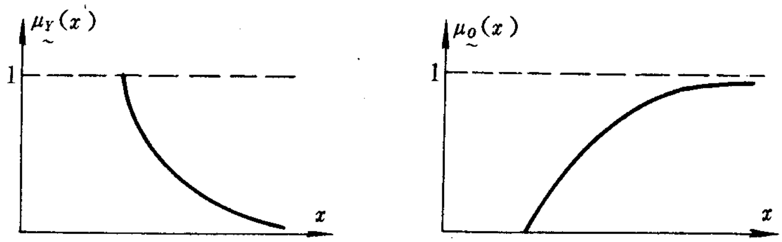

图 1.2.3

模糊集合有各种不同的表达方式，一般可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\{(x,\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)),x\in X\}\tag{1.20}$$

如果 X 是有限集或可数集，则 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\sum\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)/x_i\tag{1.21}$$

如果 X 是无限不可数集，$\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_X\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x\tag{1.22}$$

这里，$\sum$ 和 $\int_X$ 并不是求和或积分，而是表示各个元素与隶属函数对应关系的一个总括。

[例 1.2.4]　设 $X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，以 $\underset{\sim}{A}$ 表示“小的数”。采用上述记号，我们将 $\underset{\sim}{A}$ 表示为

$$\underset{\sim}{A}=1/0+0.8/1+0.6/2+0.4/3+0.2/4+0/5$$
$$+0/6+0/7+0/8+0/9+0/10$$

为了简略起见，常常把 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$ 的部分省去，即将$\underset{\sim}{A}$表示为

$$\underset{\sim}{A}=1/0+0.8/1+0.6/2+0.4/3+0.2/4$$

定义 1.2.2 设$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$均为 X 上的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

则称$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$相等，记为$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

定义 1.2.3 设$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$均为 X 上的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

则称$\underset{\sim}{B}$包含$\underset{\sim}{A}$，或称$\underset{\sim}{A}$是$\underset{\sim}{B}$的子集，记为$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。

例如，“非常小的数”这一模糊集是模糊集“小的数”的子集。

如 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$且 $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$，则 $\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$相等。

定义 1.2.4 设$\underset{\sim}{A}$为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$$

则称$\underset{\sim}{A}$为空集，记为$\varnothing$。

定义 1.2.5 设$\underset{\sim}{A}$为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$$

则称$\underset{\sim}{A}$为全集，记为 Ω。

显然有

$$\varnothing\subseteq\underset{\sim}{A}\subseteq\Omega$$

［例 1.2.5］ 设

$$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$
$$\underset{\sim}{A}=0.4/x_1+0.2/x_2+0/x_3+1/x_4$$
$$\underset{\sim}{B}=0.3/x_1+0/x_2+0/x_3+0/x_4$$

因为

$$0.3<0.4,\quad 0<0.2,\quad 0=0,\quad 0<1$$

故而得到 $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$。

定义 1.2.6 若$\underset{\sim}{A}$为论域 X 上的模糊集，称