21世纪高职高专教材

数学建模

SHUXUE JIANMO

梁炼 编著

华南理工大学出版社

21世纪高职高专教材

数 学 建 模

梁 炼 编著

华南理工大学出版社

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/梁炼编著.—广州：华南理工大学出版社，2003.9
ISBN 7-5623-1983-9

Ⅰ.数…　Ⅱ.梁…　Ⅲ.数学建模-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 067924 号

总 发 行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020-87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑：陈怀芬
印 刷 者：广东省农垦印刷厂
开　　本：850×1168　1/32　**印张**：8.5　**字数**：213 千
版　　次：2003 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～4000 册
定　　价：15.00 元

序

本教材是作者近年来在数学建模教学和组织竞赛中的经验体会及总结.教材遵循面向21世纪数学教育加强应用意识的原则,探讨数学建模的思路、方法和一般步骤,使实际问题得到更好地解决,从而开拓读者的视野,培养他们的观察力和想像力.通过书中内容的学习,读者能够提高面对实际问题时应用数学知识解决问题的能力.数模竞赛好似一面镜子,它从一个角度反映数学教学的质量和成果,竞赛结果的评定是挑选出有创造性的优秀论文,这些论文往往较好地实现了将实际问题用数学方法归结为数学问题,建立起描述各相关量之间关系的数学式,然后运用计算技术及包括计算机和相应软件在内的计算工具,快速准确地计算出符合实际问题的答案.因此,数学建模培训的一个重要环节是论文写作和案例分析.本教材给参赛队员提供了好的练习案例,对近几年竞赛题的分析整理也为初次参赛的队员提供有效的帮助.

本教材的重点放在读者面对复杂的、不规范的实际问题时,如何增长应对能力和应用教学知识解决实际问题的本领,教材中所涉及的数学知识略高于现行的大专数学教学内容.教材中的参赛案例的选择应用面广,且各具特色,涉及工业、农业、生物、环境、能源、经济及管理等实际问题,通过案例介绍解决实际问题的各种数学方法,并着重问题的分析和建模思路.

本教材可作为高职高专"数学建模"课程的教材以及参加数学建模竞赛队员的培训用书,也是大专生作毕业设计、写论文的参考书.

郝志峰

2003年6月

前　　言

数学的产生一直是和数学建模(mathematical modeling)紧密相连的,实际上,一切科学研究都是首先与模型打交道,然后才在实际系统上实现.近几十年来,特别是1985年美国开始第一届大学生数学建模竞赛(Mathematical Contest in Modeling,简称MCM),大学生数学建模竞赛便如雨后春笋在世界各国如火如荼展开,数学建模再次形成热潮.由于电子计算机的迅速发展和日益广泛的应用以及应用的不断完善,数学的应用已不再局限于物理学等传统领域,生态学、环境科学、医学、经济学、信息科学及一些综合类学科都对它提出了大量有待解决的实际研究课题.要用定量分析和定性分析相结合的方法解决这些实际问题,十分关键但又比较困难的就是建立恰当的数学模型.建立完整的数学模型的过程需要把错综复杂的实际问题有机组合起来形成简单、完整、合理的数学结构,要做到这一点,既需要丰富的想像力,又需要寻找较合适的数学工具.从某种意义上讲,数学建模是能力与知识的综合应用.我国于1992年由中国工业与应用数学学会(CIAM)举办了首届中国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling,简称CUMCM),1994年被国家教育部(原国家教委)正式列为全国大学生四大赛事之一,此后每年举行一届.1999年起分为本科组和大专组.

目前,有关数学建模的教材不少,但针对高职高专层次的数学建模教材却极少.因此,本人在原有"数学建模"讲义的基础上,总结了近几年来大学生数学建模竞赛经验和教学实践,编写了本书.

本书根据高职高专学生的特点，除了补充一些基本的应用数学的知识之外，从学生掌握的难易程度出发，在着重研究了不同背景、不同学科的数学模型构造的基础上，通过数学建模的范例，进行详细解说来展示它的精华部分，使学生容易掌握数学建模的基本方法与技巧，让学生在学习过程中能举一反三．本书对数学建模课程的开设和大学生数学建模竞赛具有一定的启发性，适合大专及高职类学生学习．

本书在编写过程中得到广州民航职业技术学院领导、高职教育研究室老师的支持和帮助；华南理工大学郝志锋教授对本书进行了审阅，提出了许多中肯的、有益的、宝贵的修改意见和建议．在此一并表示诚挚的感谢！

限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，恳请读者提出宝贵意见．

编　者

2003 年 6 月

目　　录

第一章　数学建模导言

数码时代是人类发展的一个主要趋势，而数学科学正是人类迈向数码时代的重要学科．数学建模是数学科学联接其他科学及实际问题的最重要的一个环节．建立起来的数学模型则是一座座桥梁，它对实际问题用数学思想进行理论分析和科学研究，是一门内容丰富、广泛的新兴学科．

本章介绍数学建模、数学模型基本概念及大学生数学建模竞赛的情况．

一、数学模型

1．数学模型的概念

模型是相对于原型而言的．所谓原型(prototype)就是人们在社会实践中所关心和研究的现实世界中的事物(或对象)．在科技领域常常把所考察的原型用“系统”或“事物系统”等术语代之，如经济系统、管理系统、机械系统、电力系统、通信系统、生态系统以及生命系统等．系统的观点能让人们更好地认识和把握事物．人们所关心和研究的事物或系统总是存在着矛盾，矛盾就是问题，研究事物或系统就是去解决问题．事物或系统总是处于运动变化的过程之中，如何把握它们在运动变化过程中的规律性，是研究事物或系统的根本问题．因此，进一步引申，把“现实对象”、“实际问题”、“研究对象”、“事物过程”以及“事物系统”等术语都称为事物的原型．

所谓模型(model)是指为了某个特定目的将原型所具有本质属性的某一部分信息经过简化、提炼而构造的原型替代物．一个原型，为了不同的目的可以有多种不同的模型．例如，为了制定大型

企业的生产管理计划,模型就不必反映各生产装置的动态特性,但必须反映产品的产量、销售量和库存量等变化情况.也就是说,各装置的动态特性对这种模型来说是非本质的.相反,为了实现各生产装置的最佳运行,模型就必须详细地描述各装置内部状态变化的生产过程的动态特性.这时,各装置的动态特性就变成了本质的.可见,模型所反映的内容将因其使用的目的不同而不同.实物模型、照片、图表、地图、公式及程序等统统称做“模型”.实物模型、照片、玩具等把现实物体的尺寸加以改变,看起来逼真,称形象模型;地图、电路图等在一定假设下用形象鲜明、便于处理的一系列符号代表现实物体的特征,称模拟模型;而图表、公式、程序等则用字母、数字或其他数学符号,以及由它们组成的数学式子、图形等来描述客观事物的特征及其内在联系,这就是数学模型.

数学模型(mathematical model)是今天科学技术工作者常常谈论的名词.其实,我们对于数学模型也并不陌生,例如在力学中描述力、质量和加速度之间关系的牛顿第二定律($F=ma$)就是一个典型的数学模型.还有很多很多,如计算机自动控制的炼钢过程的数学模型,根据气压、雨量、风速等建立的预测天气的数学模型,根据人口、交通、能源、污染等建立的城市规划的数学模型等.

数学模型的具体定义是什么,尽管目前并没有统一的认识,但都认为是用数学描述实际问题.通俗地讲,所谓数学模型,是指对于现实世界的某一特定对象,为了某个特定目的,进行一些必要的抽象、简化和假设,借助数学语言,运用数学工具建立起来的一个数学结构.数学模型不是原型的复制品,而是为一定的目的对原型所作的一种抽象模拟,它用数学式子、数学符号、程序及图表等刻画客观事物的本质属性与内在联系,是对现实世界的抽象、简化而又本质的描述.它源于现实,又高于现实.它或者能解释特定事物现象的现实性态;或者能预测特定对象的将来的性态;或者能提供处理特定对象的最优决策或控制等等,最终达到解决具体的实际

问题的目的.

2. 数学模型的分类及作用

(1)数学模型的分类

数学模型按照不同的分类标准有着多种分类.因为分类问题不是本课程的重点,故只列举出几种常见的分类方法,以方便叙述和阅读.

按照建立模型的数学方法分,有几何模型、代数模型、图论模型、规划论模型、微分方程模型、最优控制模型、信息模型、随机模型、决策与对策模型及模拟模型等.

按照模型的特征分,有静态模型和动态模型、确定性模型和随机模型、离散模型和连续性模型、线性模型和非线性模型等.

按照被研究对象的实际领域来分,有人口模型、环境模型、生态模型、水资源模型、再生资源利用模型、交通模型、电气系统模型、通信系统模型、机电系统模型、传染病模型、污染模型、经济模型和社会模型等.

按照人们对原形的认识过程来分,数学模型可以分为描述性的数学模型和解释性的数学模型.描述性的模型是从特殊到一般,它是从分析具体客观事物及其状态开始,最终得到一个数学模型.客观事物之间量的关系通过数学模型被概括在一个具体的抽象的数学结构之中.解释性的模型是由一般到特殊,它是从一般的公理系统出发,借助于数学客体,对公理系统给出正确解释的一种数学模型.

按照人们对事物发展过程的了解程度分,有所谓的白箱模型、灰箱模型和黑箱模型.白箱模型主要指那些内部规律比较清楚的模型,如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题,这些问题大多早已经化为比较成熟的数学问题,解决这些问题大多注重数学方法的改进、优化设计和控制等.灰箱模型主要指那些内部规律尚不十分清楚的模型,在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多

工作要做的问题，如生态学、气象学、经济学等领域中的模型.黑箱模型指一些其内部规律还很少为人们所知的模型，如生命科学、社会科学等领域的问题，这类问题多利用统计方法研究.

(2)数学模型的作用

数学模型的根本作用在于它将客观原型化繁为简、化难为易，便于人们采用定量的方法，分析和解决实际问题.正因为如此，数学模型在科学发展、科学预见、科学预测、科学管理、科学决策、调控市场经济乃至个人高效工作和生活等众多方面发挥着特殊的重要作用.

回顾科学发展史，数学模型对很多科学概念的表达、科学规律的揭示以及科学体系的形成都起到了重要作用.例如物理学中的很多重要概念，诸如瞬时速度、瞬时电流、物体受力沿曲线做功等很难用语言说清楚，而用导数、积分就清楚而准确地表达了这些概念的意义.又如历史上关于物体运动原因的探讨，开始研究时，科学家们单从质的方面寻找物体运动的原因，由亚里士多德提出的“力是产生运动的原因”，一直步入到将物体运动的原因“归结为上帝”的错误结论.以后，伽利略不纠缠于物体运动的质的分析，他从量的方面着手，即从揭示物体运动是按照什么样的数量关系处于运动状态的，才发现了物体运动定律.在石油开发中我国数学界进行了长期大量的工作，取得了很大的成绩.科学家通过分析大量的人工地震的数据，以推断地质的构造，为寻找石油、天然气的储藏位置提供依据；运用数理统计、Fourier 分析和时间序列分析等数学方法，成功地开发了具有先进水平的地震数据处理系统.

当代计算机科学的发展和广泛应用，使得数学模型的方法如虎添翼，加速了数学向各个学科的渗透，产生了众多的边缘学科.例如生物数学，它是在生物科学研究中，由其各分支运用数学模型和数学方法产生的生态数学、遗传数学、生理数学、仿生数学等内容构成的.数学在制造业中的应用也越来越广泛，不可缺少.波音 767 飞机的成功设计，与应用数学家 Garabedian 对跨音速流和激

波进行的计算密切相关，由此设计出了防激波的飞机翼型.工程设计和制造工艺主要靠计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)两大工具，而这两者又都以数学为理论基础.又以飞机设计为例，设计师必须考虑结构强度与稳定性，这是用有限元来分析的，而机翼的振动情况则需解特征值问题；为了使飞机省油与提高速度必须找到一种最佳机翼和整个机体的形状；如何为飞行员选择最优控制参数，也是必须考虑的问题.飞机设计在极大程度上以计算为基础，人们研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程.自动导航与自动着陆系统是根据卡尔曼滤波的方法设计的，而后者主要又是数学.数学模型已代替了许多的实验，既便宜、省时，又适用、安全.以前利用风洞设计飞机某一部件，若要改变某一部位，必须在机械车间建一模型；而今天只要设计一数学模型，通过键盘打进新的参数即可.实际上，从家用电器到天气预报，从通信到广播电视，从核电站到卫星，从新材料到生物工程，高科技的高精度、高速度、高安全、高质量、高效率等特点无一不是通过数学模型和数学方法并借助计算机的计算、控制来实现的.就连计算机本身的产生和进步、计算机软件技术说到底实际上也是数学技术.

军事与国防方面较著名的战例是1990年伊拉克点燃了科威特的数百口油井，称之为沙漠风暴与数学战.美国及其盟军在沙漠风暴以前，曾严肃地考虑点燃所有油井的后果.据美国《超级计算评论》杂志披露，五角大楼要求太平洋-赛拉公司研究此问题.该公司利用Navier-Stokes方程和有热损失能量方程作为计算模型，在进行一系列模拟计算后得出结论：大火的烟雾可能招致一场重大的污染事件，它将波及到波斯湾、伊朗南部、巴基斯坦和印度北部，但不会失去控制，不会造成全球性的气候变化，不会对地球的生态和经济系统造成不可挽回的损失，这样才促成美国下定决心.所以，人们说第一次世界大战是化学战(火药)，第二次是物理战(原子弹)，而海湾战争则是数学战.

总之，数学模型是运用数学的语言和工具、对部分现实世界的

信息(现象、数据等)加以翻译、归纳的产物.数学模型经过演绎、推断,给出数学上的分析、预报、决策或控制,再经过解释,回到现实世界.最后,这些分析、预报、决策或控制必须经受实际的检验,完成实践—理论—实践这一循环(如图 1-1 所示).如果检验的结果是正确或基本正确的,就可以用来指导实际,否则,要重新考虑翻译、归纳的过程,修改数学模型.

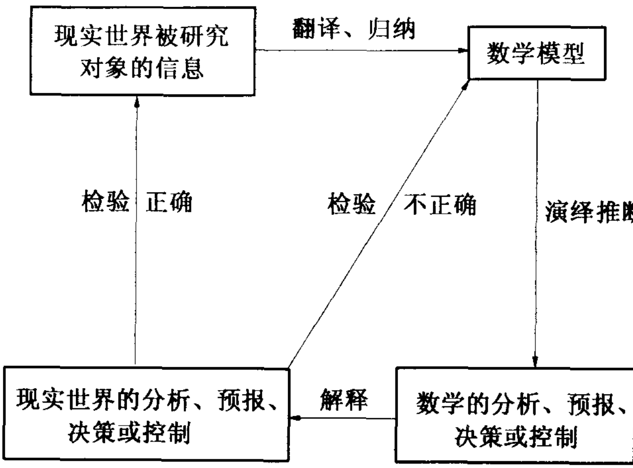

图 1-1　现实世界与数学模型的关系

二、数学建模

1. 数学建模的概念

数学建模(mathematical modeling)是指对特定的客观对象建立数学模型的过程,是现实的现象通过心智活动构造出能抓住其重要且有用的特征的表示,常常是形象化的或符号的表示,是构造刻画客观事物原型的数学模型并用以分析、研究和解决实际问题的一种科学方法.运用这种科学方法,建模者必须从实际问题出发,遵循"实践—认识—实践"的辩证唯物主义认识规律,紧紧围绕

着建模的目的，运用观察力、想像力和逻辑思维，对实际问题进行抽象、简化，反复探索，逐步完善，直到构造出一个能够用于分析、研究和解决实际问题的数学模型.顾名思义，Modeling 一词在英文中有“塑造艺术”的意思，从而可以理解从不同的侧面、角度去考察问题就会有不尽相同的数学模型，从而数学建模的创造又带有一定的艺术特点.数学建模不仅是一种定量解决实际问题的科学方法，而且还是一种从无到有的创新活动过程.数学建模的成败与人的因素密切相关.人是数学建模的主体，事物原型是数学建模的客体.在数学建模的过程中，既要发挥人的聪明才智“改造”客体、解决实际问题，又要“改造”建模者自己，从中丰富智慧、增长才干.一个成功的数学模型总是主体的能动性与客体的规律性达到高度统一的境界时的产物，因此人们常说，数学建模具有强烈的技艺性，建模者要像艺术家那样苦练功夫，才能达到高境界.

2. 数学建模的步骤

数学建模没有固定的模式.按照建模过程，一般采用的建模基本步骤如图 1-2 所示，具体如下：

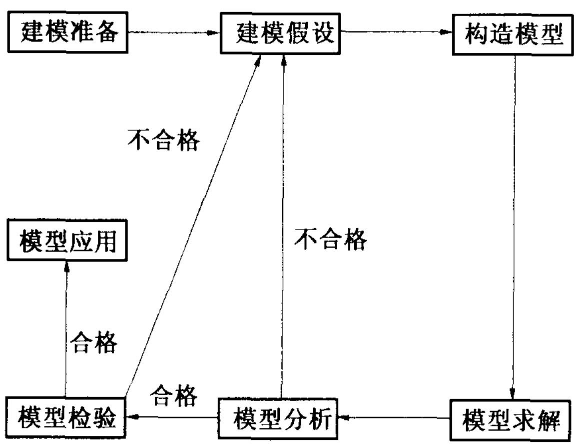

图 1-2　数学建模基本步骤示意图

(1)建模准备

数学建模是一项创新活动，它所面临的课题是人们在生产和科研中为了使认识和实践进一步发展必须解决的问题．“什么是问题？问题就是事物的矛盾．哪里有没解决的矛盾，哪里就有问题”．因此发现课题的过程就是分析矛盾的过程．贯穿生产和科技中的根本矛盾是认识和实践的矛盾，我们分析这些矛盾，从中发现尚未解决的矛盾，就是找到了需要解决的实际问题．如果这些实际问题需要给出定量的分析和解答，那么就可以把这些实际问题确立为数学建模的课题．建模准备就是要了解问题的实际背景，明确建模的目的，掌握对象的各种信息，弄清实际对象的特征．

(2)建模假设

作为课题的原型都是复杂的、具体的，是质和量、现象和本质、偶然和必然的统一体．这样的原型，如果不经过抽象和简化，人们对其认识是困难的，也无法准确把握它的本质属性．而建模假设就是根据实际对象的特征和建模的目的，在掌握必要资料的基础上，对原型进行抽象、简化．把那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来，简化掉那些非本质的因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，形成对建模有用的信息资源和前提条件，并且用精确的语言作出假设，是建模过程关键的一步．

对原型的抽象、简化不是无条件的，一定要善于辨别问题的主要方面和次要方面，果断地抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量将问题均匀化、线性化，并且要按照假设的合理性原则进行．假设合理性原则有以下几点：

①目的性原则：从原型中抽象出与建模目的有关的因素，简化掉那些与建模目的无关的或关系不大的因素．

②简明性原则：所给出的假设条件要简单、准确，有利于构造模型．

③真实性原则：假设条款要符合情理，简化带来的误差应满足

实际问题所能允许的误差范围.

④全面性原则:在对事物原型本身作出假设的同时,还要给出原型所处的环境条件.

(3)模型建立

在建模假设的基础上,进一步分析建模假设的各条款.首先区分哪些是常量,哪些是变量,哪些是已知量,哪些是未知量;然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系,建立各个量之间的等式或不等式关系,列出表格、画出图形或确定其他数学结构,选择恰当的数学工具和构造模型的方法对其进行表征,构造出刻画实际问题的数学模型.

在构造模型时究竟采用什么数学工具,要根据问题的特征、建模的目的要求及建模人的数学特长而定.可以这样讲,数学的任一分支在构造模型时都可能用到,而同一实际问题也可以构造出不同的数学模型.一般地讲,在能够达到预期目的的前提下,所用的数学工具越简单越好.

在构造模型时究竟采用什么方法构造模型,要根据实际问题的性质和建模假设所给出的建模信息而定.就以系统论中提出的机理分析法和系统辨识法来说,它们是构造数学模型的两种基本方法.机理分析法是在对事物内在机理分析的基础上,利用建模假设所给出的建模信息或前提条件来构造模型;系统辨识法是对系统内在机理一无所知的情况下利用建模假设或实际对系统的测试数据所给出的事物系统的输入、输出信息来构造模型.随着计算机科学的发展,计算机模拟有力地促进了数学建模的发展,也成为一种构造模型的基本方法.这些构模方法各有其优点和缺点,在构造模型时,可以同时采用,以取长补短,达到建模的目的.

(4)模型求解

构造数学模型之后,再根据已知条件和数据分析模型的特征和结构特点,设计或选择求解模型的数学方法和算法,这里边包括