仁华学校奥林匹克数学系列丛书

人大附中 编

仁华学校奥林匹克数学

RENHUAXUEXIAOAOLINPIKESHUXUE

课本

初中三年级

中国大百科全书出版社

人大附中远程教育网网址：
http://www.rdfz.com

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

- 仁华学校奥林匹克数学课本（12册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练导引·小学部（2册）
- 仁华学校奥林匹克数学思维训练教程（4册）
- 仁华学校奥林匹克数学竞赛试题与详解·小学部（6册）
- 仁华学校奥林匹克数学测试卷（4册）

仁华学校奥林匹克物理系列丛书

- 仁华学校奥林匹克物理课本（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理试题解析（3册）
- 仁华学校奥林匹克物理实验（2册）

仁华学校奥林匹克英语系列丛书

- 仁华学校奥林匹克图解英语（4册）

ISBN 7-5000-6987-1
9 787500 069874 >

ISBN7-5000-6987-1/G·669
定价：10.00元

仁华学校奥林匹克数学系列丛书

仁华学校(原华罗庚学校)

奥林匹克数学课本

初中三年级

(最新版)

人大附中编
主编:刘彭芝

中国大百科全书出版社

总编辑：徐惟成　　社长：田胜立

图书在版编目(CIP)数据

仁华学校奥林匹克数学课本．初三年级 / 刘彭芝主编．北京：中国大百科全书出版社，2003.12
ISBN 7-5000-6987-1

Ⅰ.仁… Ⅱ.刘… Ⅲ.数学课—初中—数学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第117488号

仁华学校奥林匹克数学课本（初三年级·最新版）

主　　编：刘彭芝
责任编辑：简菊玲
装帧设计：何　茜
责任印制：徐继康

出版发行：中国大百科全书出版社
（北京阜成门北大街17号　100037　68315606）
http://www.ecph.com.cn
排　　版：北京百科创新文化咨询中心
印　　刷：北京建筑工业印刷厂

版　　次：2004年1月第1版
印　　次：2004年1月第1次印刷
印　　张：9.375
开　　本：880×1230　1/32
字　　数：224千字
印　　数：1-10000
ISBN 7-5000-6987-1/G·669
定　　价：10.00元

顾　问： 王　元　裘宗沪
冯克勤　陈德泉

主　编： 刘彭芝

副主编： 莫颂清

编　撰： 莫颂清　李珞珈　颜华菲
尚　强　邓　均　王健民
童　欣　陈健苍　蔡克民
王德庆　孙泽君　于负稳
尚红军　裴世坤

序

这套丛书是北京仁华学校的教学用书。

北京仁华学校是人大附中的超常教育实验基地。其前身为北京市华罗庚学校，2003 年 12 月改用新名（为叙述方便起见，下文涉及“北京市华罗庚学校”或“华校”的一律改用新名）。仁华学校的办学目的是探索科学实用、简单易行的鉴别与选拔超常儿童的方法，探索具有中国特色的超常教育模式，为国家大面积早期发现与培养现代杰出人才开辟一条切实可行的途径。在这里，数百位优秀教师精心执教，一批批超常儿童茁壮成长。仁华学校全体师生决心在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族的伟大复兴甘当马前卒。

超常教育与早期教育为当今世界各国所重视。近年来，我国的众多有识之士投身超常教育事业，也取得了可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步，但同时也是一个复杂而全新的教育课题。无论在历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长的环境不佳，特别是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育。因而，必须更新教育观念和教学模式，这样才能把大批聪慧儿童培养成为知识经济时代的栋梁之材。我们认为，超常儿童是具有良好的智力和非智力个性特征的统一体，是遗传与环境共同作用下的产物。基于此种看法，北京仁华学校的超常

教育，以尊重个性和挖掘潜力为基本原则，强调选拔与培养相结合，不缩短学制而注重学生综合素质的全面提高。

仁华学校分为小学部、初中部和高中部。小学部属校外培训性质，招收小学三至六年级的学生，招生时间定在每年9月或10月，入学后每周学习一次。初中部和高中部属常规中等教育，纳入人大附中建制，每个年级设4－6个实验班。仁华学校初中部和高中部的生源分别主要来自小学部和初中部，同时面向全市招生。

仁华学校在办学过程中，逐渐形成了自己独特的课程体系。在必修课中，我们把数学作为带头学科，并以此促进物理、化学、生物、外语、计算机等其他学科的发展。这是因为，数学作为研究现实世界中数和形的一门基础科学，不仅对人类社会的进步和国家的建设发挥着关键的作用，而且对训练人们的思维能力具有重要的价值。此外，仁华学校还开设有现代少年、科学实践、社会实践、心理导向、创造发明和生物环保等特色课，以及汽车模拟驾驶、网页设计、天文观测、电子技术、几何画板、艺术体操、篆刻和摄影等选修课。华校全新的课程设置，近而言之，是希望学生能够增强学习兴趣，开阔知识视野；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下坚实而全面的科学文化基础。

仁华学校在办学过程中，还逐渐形成了一支思想新、业务精、肯吃苦、敢拼搏的教师队伍。这其中既有多年工作在教学第一线的中小学高级和特级教师，又有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，还有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们着眼于祖国的未来，甘做人梯，为超常教育事业辛勤耕耘，是仁华学校藉以成长、引以自豪的中流砥柱。

实践证明，仁华学校对超常儿童的培养方略是可取的。十余年来，仁华学校为高等学校输送了大量全面发展、学有特长并具备创新精神和高尚品德的优异人才。已毕业的16届实验班学生全部考取重点大学，其中进入北京大学和清华大学的人数约占总数的68%，保送生约占25%。不仅如此，还有近3000人次学生在区、市、国家乃至世界级的学科竞赛中获奖夺魁，数量位居北京市重点中学之首。仁华学校的学生在全国雷达表青少年科学英才竞赛中获一、二、三等奖各一次，在全俄罗斯数学竞赛中获两枚金牌、一枚银牌，在国际物理邀请赛中获一枚银牌，在国际信息学奥林匹克竞赛（IOI）中获一枚铜牌，在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获满分金牌2枚和银牌1枚。近200人在各种发明比赛中获奖，其中几十人获全国及世界创造发明比赛的金奖、银奖，并取得五项国家专利。还有33人次在全国科学论文评比中获一、二、三等奖。此外，实验班的同学在艺术体育等方面也成绩斐然。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实践，使得一批又一批英才脱颖而出，这足以显示仁华学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

仁华学校超常教育的实践和成果已引起全国和国际教育界的关注。华校现在是中国人才研究会超常人才专业委员会副理事长单位，其超常教育研究课题曾荣获北京市“八五”普教科研优秀成果二等奖。仁华学校先后有数十位师生参加了国际超常儿童教育学术会议，在各种国际会议上宣读论文三十余篇，并同五十多个国家和地区从事超常教育的学校及研究机构建立了友好往来或合作研究关系。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验基础之上的。我们组织编写的这套“北京市

华罗庚学校奥林匹克系列丛书”的作者大部分都是原华校的骨干教师，开创了荟萃专家编书的格局。另外还有数位曾经在国际数学奥林匹克竞赛（IMO）中获得金牌和银牌的大学生和研究生参加撰写。这支由学生组成的特别劲旅将他们学习的真切感受和新鲜经验表达出来，使得本丛书独具一格。综合而言，展现在读者面前的这套丛书集实用、新颖、通俗、严谨等特点于一身，我们将其奉献给中小学教师、学生及家长，希望能博得广大读者的喜爱。此套丛书涉及数学、英语、物理和计算机等学科，目前已经出版和即将出版的有四十余册。

俗云：“一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。”仁华学校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。“合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。”遥望未来，让我们同呼志士之言：为中国在21世纪成为科技强国而献身。

作为本系列丛书的主编，借这套丛书再次出版的机会，我再次以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意，恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

写于2001年1月

修改于2003年12月

目　录

目　录

第 1 讲　整数问题选讲(一)

在学完初中的代数后,有关整数的问题愈加丰富．在过去讨论过的数字特征以及整除基本性质的基础之上,又加入了因式分解、方程和方程组、二次方程求根、韦达定理和不定方程等内容．整数还可以同几何问题结合,在勾股数组、比例性质或涉及坐标平面等综合性较强的问题中出现．

另外,数学归纳原理、不等式、数列和数组的内容,也在整数杂题中有所反映．

整数杂题的内容,分为两讲讲述．

除所介绍过的整除性质、同余性质、奇偶数运算和质因数的基本关系外,还应熟悉:

1. 因式分解．特别是一些常用公式如:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3\pm b^3=(a^3\pm b^3)(a^2\mp ab+b^2)$

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

……

把字母代人特殊整数,即可在某些场合求出因数．

2. 二次方程求根公式及韦达定理．

设方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $x_1,x_2,(x_1>x_2)$

则 $x_1=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},x_2=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

$x_1+x_2=-p$,

$x_1\cdot x_2=q$,

$x_1-x_2=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{p^2-4q}$,

3. 基本不等式关系(字母代表正数):

①平均不等式．$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 或 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

②$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

③$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

它们常用于与整数有关的不等关系证明中．

简单的数列求和：

①$\sum\limits_{i=1}^{n} i=\frac{1}{2}n(n+1)$;

②$\sum\limits_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

②$\sum\limits_{i=1}^{n} i(i-1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$.

例1 从1到100的自然数中，每次取两个数，要它们的和大于100，有多少种取法(两数不得相同)?

解： 从1到100的自然数中，每次取两个数，必有一个较小的．又这两数之和要大于100，下面逐一列举较小数的取值情况：

较小数是1的，只有1种取法，即{1,100}；

较小数是2的，只有2种取法，即{2,100}，{2,99}；

……

较小数是50的，有50种取法，即{50,100}，…{50,51}；

较小数是51的，有49种取法，即{51,100}，…{51,52}；

……

较小数是99的，有1种取法，即{99,100}.

所以共有取法：

$$1+2+\cdots+50+49+48+\cdots+2+1=\sum_{i=1}^{50} i+\sum_{i=1}^{49} i=2500 \text{ 种}.$$

例2 n是自然数，求证：

$$\sqrt{2\cdot\sqrt{3\cdots\sqrt{n}}}<3 \qquad (n\geqslant 2)$$

证明：利用不等式 $n^2>n^2-1=(n+1)(n-1)$

知 $3>\sqrt{2\times 4}$，而 $4>\sqrt{3\times 5}$,

代入上式即 $3>\sqrt{2\times\sqrt{3\times 5}}$.

同理进行下去,有:

$$3>\sqrt{2\times4}>\sqrt{2\sqrt{3\times5}}>\cdots$$
$$>\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{(n-1)(n+1)}}}$$
$$>\sqrt{2\sqrt{3\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}.$$

例3 下面是一个三位数除八位数的算式:

$$\begin{array}{r}
\times\times8\times\times \\
\times\times\times\,\overline{)\times\times\times\times\times\times\times\times} \\
\underline{\times\times\times\quad\quad\quad\quad\quad} \\
\times\times\times\times\quad\quad\quad \\
\underline{\times\times\times\quad\quad\quad} \\
\times\times\times\times \\
\underline{\times\times\times\times} \\
0
\end{array}$$

求出除数.

解: 设除数是 d,由除式形式可知,商应为 $\overline{\times080\times}$ 形式.

$8d$ 是三位数,$\because$ $8d<100$, $d\leqslant124$,

商的末位乘以 d 是四位数,$\therefore$ 商的末位是9.

易见商的首位必是8,$\therefore$ 商是80809.

由 $80809\times d\geqslant10000000$ 知 $d\geqslant124$ $\therefore$ 除数是124.

补充说明:对这样形式上很复杂的题目,要善于找出题目内在条件加以推导,注意数字大小之间的关系.

例4 某一小组有四个工人,问起他们各自的年龄,其中一个人答道:"我们四个人的年龄全都不一样大,如果把我们的年龄相加,那一共是129岁;另外我们中有3个人的年龄是平方数,倒退15年,我们当中也有3个人的年龄是平方数."

他们四个人现在的年龄各为多少?

解: 由题意,设四个人的年龄分别为 a^2、b^2、c^2、d,

其中 a、b、c、d 都是自然数.

则:$a^2+b^2+c^2+d=129$ (1)

$a^2>15, b^2>15, c^2>15, d\geqslant15$

对于 a^2、b^2、c^2,只有以下几种可能:

16、25、36、49、64、81、100、121

由 a、b、c、各不相同,$d\geqslant15$,知

$a^2+b^2+d\geqslant16+25+15=56,\Longrightarrow c^2\leqslant73$

同理 $a^2\leqslant73$,$b^2\leqslant73$

$\therefore$ a^2、b^2、c^2 的取值只可能是 16、25、36、49、64. 倒退 15 年,四位工人中也有三个人年龄为完全平方,而以上 5 个数中,只有 16 − 15 和 64 − 15 还是完全平方,$\therefore$ 有两位工人年龄分别是 16 和 64.

代入(1)得:$d=49-b^2$,及 $b^2=25$、36、49 之一,又因 $d-15$ 是平方数,易知 $b^2=25$,$d=24$.

$\therefore$ 四个工人现在的年龄分别是 16 岁、24 岁、25 岁和 64 岁 .

例 5 设 a、b、c、d 是互不相同的四个整数,r 是方程 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$ 的整数根,试证明:

$4r=a+b+c+d$.

证明:因 r 是方程的整数根,

$\therefore$ $(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=4$,

a、b、c、d 是互不相同的整数,$\therefore r-a,r-b,r-c,r-d$ 也是互不相同的整数,且都是 4 的因子 .

4 的因子只有 $\pm1,\pm2,\pm4$,并且易证 $r-a,r-b,r-c,r-d$ 中不能有为 ±4 的 .

$\therefore$ 这四个数必为 $\pm1,\pm2$.

$\therefore$ $(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)$

$\quad=1+(-1)+2+(-2)=0$

即 $4r=a+b+c+d$.

例 6 证明:如果三个相邻整数的中间一个是完全立方数,那么它们的乘积一定能被 504 整除 .

证明:设三个连续整数是 $n^3-1,n^3,n^3+1,(n\in N)$

即要证明:$504\mid(n^3-1)n^3(n^3+1)$.

$504=7\times8\times9$,记 $f(n)=(n^3-1)n^3(n^3+1)$.

① 当 $7|n$,则 $7|n^3 \Longrightarrow 7|f(n)$.

当 $7\nmid n$,由费尔马小定理,$7|n^6-1=(n^3+1)(n^3-1)$,

$\therefore\ 7|f(n)$

② 若 $2|n \Longrightarrow 8|n^3 \Longrightarrow 8|f(n)$,

若 $2\nmid n$,则 n^2 为 $8k+1$ 形式,即 $8|n^2-1$.

$\therefore\ 8|n^3\cdot(n^2-1)(n^4+n^2+1)=f(n)$

③ 若 $3|n \Longrightarrow 9|f(n)$,

若 $3\nmid n$,则 $(n,9)=1$,

而 $\varphi(9)=6$, $\therefore\ 9|n^6-1 \Longrightarrow 9|f(n)$.

综合①②③,以及 7、8、9 中任二数互质,得:

$7\times8\times9=504|f(n)$.

例 7 求满足方程 $x^3+7y=y^3+7x$ 的整数解 x 和 y,且 $x>y>0$.

解:将原方程变形为:$x^3-y^3=7(x-y)$

即:$(x-y)(x^2+xy+y^2-7)=0$

由 $x>y>0$ 知:$x^2+xy+y^2=7$

$\therefore\ x^2<x^2+xy+y^2=7 \Longrightarrow x\leqslant2$

又 $x>y\geqslant1$. $\therefore\ x=2$

代入可以解得 $y=1$.

$\therefore$ 满足方程的整数解是:$\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$

例 8 证明:对任意整数 n,n^2+3n+5 不能被 121 整除.

证明:用反证法.假设存在整数 n 和 m,使得

$n^2+3n+5=121m$.

解关于 n 的方程:$n^2+3n+5-121m=0$.

得 $n=\dfrac{-3\pm\sqrt{11(44m-1)}}{2}$.

$\because\ n$ 是整数,$\therefore\ 11(44m-1)$是完全平方.

$\therefore$ 存在整数 k 使 $11(44m-1)=(11k)^2$