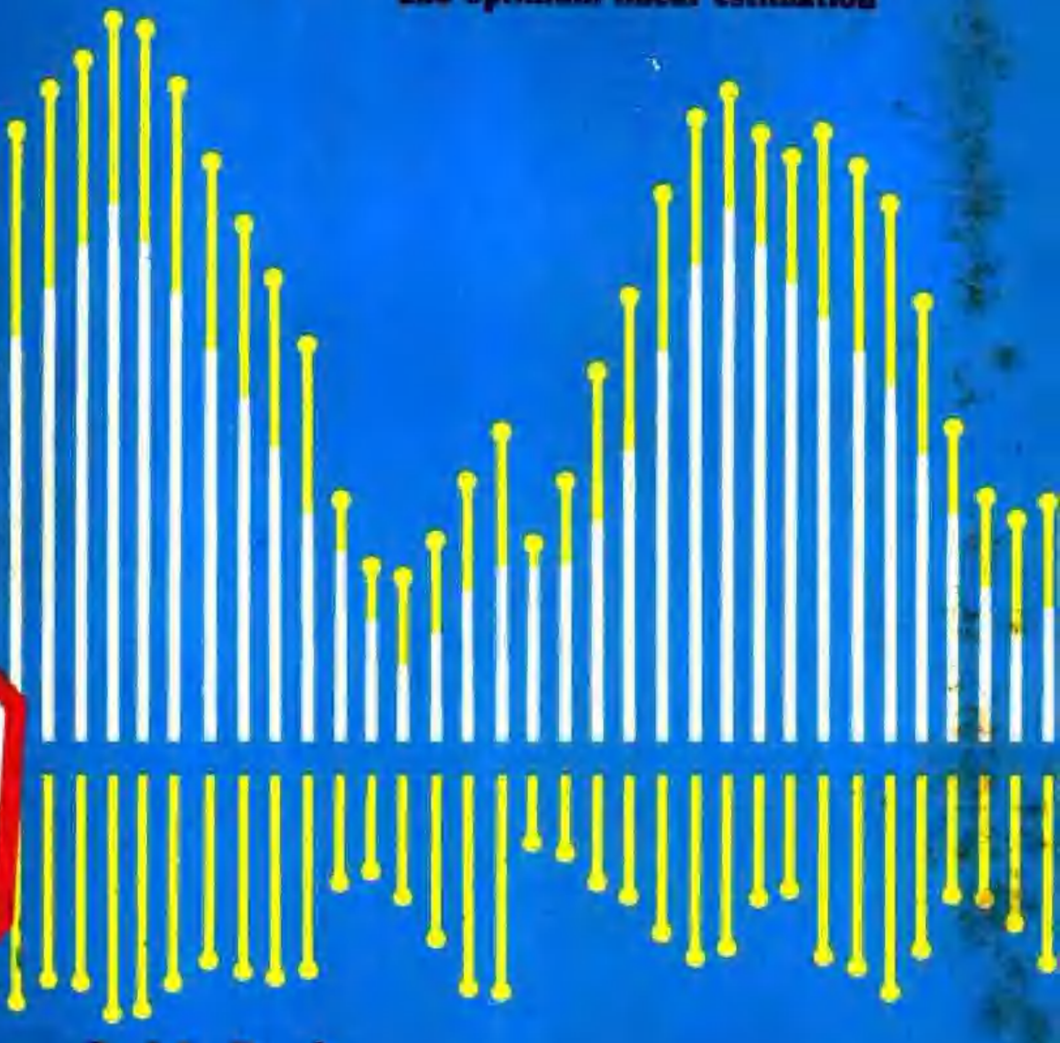
大專教材

數位及卡爾曼濾波器

Digital and Kalman Filtering

An introduction to discrete-time filtering and optimum linear estimation



S. M. Bozic

Department of Electronic and Electrical Engineering
University of Birmingham

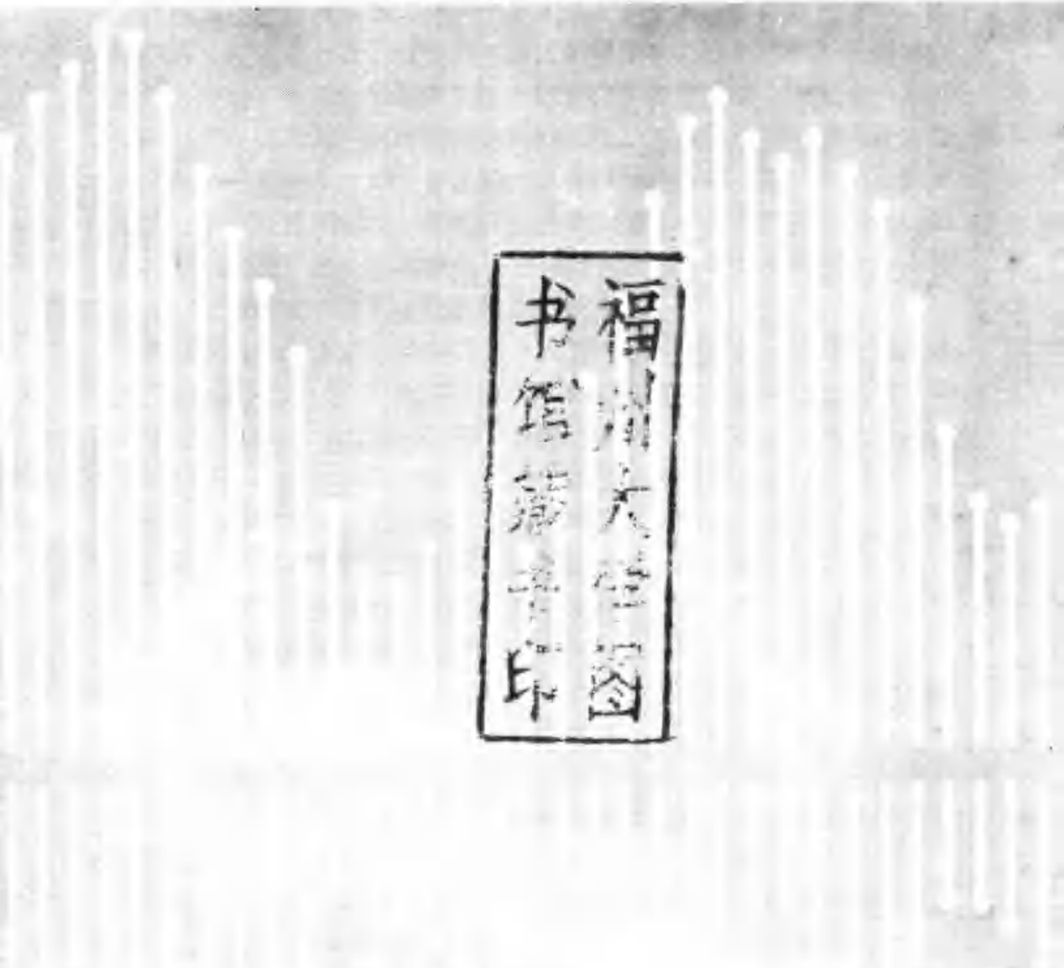
江海明譯著

大專教材

數位及卡爾曼濾波器

Digital and Kalman Filtering

An introduction to discrete-time filtering and optimum linear estimation



S. M. Bozic

Department of Electronic and Electrical Engineering
University of Birmingham

江海明譯著

中華民國七十五年四月出版

數位及卡爾曼濾波器

原著者：Bozic, Svetozar Mile
譯著者：江海明
出版者：復漢出版社
地址：台南市德光街六五－一號
郵政劃撥〇〇三一五九一－三號
發行人：沈岳林
印刷者：國發印刷廠

B平裝一六〇元
精裝二〇〇元

本社業經行政院新聞局核准登記局版台業字第〇四〇二號

序

數位電子計算機的強大功能已經大大促進了數位信號處理技術（即時間序列分析）在包括工程技術以及諸如醫學和經濟學各種不同領域中的應用。因此，在當前的專業文獻中經常出現數位濾波，卡爾曼（Kalman）濾波以及其它處理技術方面的術語。本書包括兩部份內容，目的在于對數位濾波和卡爾曼濾波給予比較概論性介紹。第一部份介紹與電機工程學中常規理解相一致的濾波運算和頻域中特定的濾波運算。第二部份則在最優（最小均方誤差）的意義下對帶有噪聲的數據進行濾波處理，以便從噪聲中提取有用的數據信號。

數位濾波是本書要討論的第一方面的內容，但這部份只限于對離散時間濾波進行介紹，它是數位濾波器和其它各類濾波器得以實現的共同理論基礎。離散時間濾波器的實際實現可以採用採樣數據的形式（bucket-brigade delay unit 或電荷耦合器件構成），也可以用數字的形式（採用二進制邏輯電路），這些內容都不屬本書討論的範圍。另外，離散時間濾波器還可以採用差分方程描述的算法在數位計算機上進行處理。

卡曼爾濾波是本書要討論的第二方面的內容，更確切地說，這部份將介紹在離散時間域中推出的線性估計理論。盡管這部份只初步論述了數位濾波器的結構，但還是引入了它特有的術語。這部份還介紹了最小均方誤差準則以及標量維納（Wiener）濾波、向量維納濾波、標量卡爾曼濾波、向量卡爾曼濾波等。在所有這些論題中，最主要的、最有實際意義的是卡爾曼濾波算法。在大多數應用場合，這種處理都需要用數位計算機來實現。

五年來，筆者已把這本書的絕大部份內容編入了研究生用的教材。本書的敍述採用“個別教授”的形式進行的，假定讀者對基本電路理論、統計平均以及基本矩陣運算比較熟悉。書中的每個主要論題都通過大量的例題和附有答案的習題逐步引出。因此本書是一本適合研究生和大學生用的入門讀物。

伯明翰大學電子電機工程系J·A·愛德華博士與筆者進行了有益的討論，他還對編制本書的一些計算程序給予了幫助。對此筆者表示衷心的謝意！

S.M.鮑齊克

目　次

第一篇　數位濾波
Digital filtering

緒論　Introduction

雖然本篇的題目是數位濾波，但我們只限于論述數據採樣信號的時間序列。然而，本篇中所敍述的有關離散時間信號的基本理論却是一般的，也適於于數位濾波。

現需對本篇和一般信號處理領域中使用的術語進行一些說明。類比信號或稱連續時間信號的含義是信號不論在時間上還是在幅度上都是連續的。然而，連續時間這個術語僅含有自變量在取值範圍連續這個意思，並不要求幅度限制在一個有限的數值集合中（見文獻〔1〕）。離散時間的含義是信號祇對時間的離散值有定義，也就是說，時間是量化的。這種離散時間信號常常稱作採樣數據或類比採樣信號。廣泛使用的“數位化”這個術語則指時間和幅度都是量化的。因此，所謂數位系統是指這樣一種系統，在這種系統中信號被表示爲一列數，它們僅在有限集合中取值。

對本篇所用的符號進行一些說明也是很重要的。在數學上，時間的增量或減量用符號Δt 來表示。而在數位濾波器中通常用T表示採樣時間隔。輸入信號在$t = kT$時刻的採樣值記作$x(k)$，其中省略了符號T（即把T作爲單位元素），而且取k爲整數。同理，對于輸出我們也有$y(k)$。在許多論文和教科書中，特別是在數學上有關差分方程的論著中，往往把上述兩個符號表示爲x_k、y_k。本書將採用$x(k)$和$y(k)$這種表示方法，其理由是：

(1)這兩個符號是連續時間函數中大家所熟悉的記號$x(t)$和$y(t)$的直接推廣；

(2)這種表示法適合推廣到狀態變量符號，此時下標表示狀態，卽$x_1(k)$，$x_2(k)$，…；

(3)對于較複雜的標記，它也可以比較方便地進行處理，例如：$x\left(N-\frac{1}{2}\right)$。

以後我們可以看到，數位濾波包括兩方面：一是對連續時間函數進行等間距的離散時間（指一般情況）採樣，即取某離散時間過程的值；二是實現諸如離散時間延遲、乘上常數、加法等運算來得到所要求的結果。

第一章用一些簡單的且大家熟知的類比濾波器來引進離散時間的概念，同時也向大家展示了如何根據系統（例如雷達跟踪系統）運行的類型直接得到離散時間描述。然後，作爲離散時間序列的簡潔表示形式引進了Z變換，並介紹了它與拉普拉斯變換的聯繫。第二章則進一步對第一章所建立的基本概念進行推廣。首先處理離散時間系統的時間響應（差分方程），然後引進並討論傳遞函數，從Z變量到時間變量的反變換以及數位濾波器的頻率響應。這一章的結尾還介紹了數位濾波器的實現方案以及把它們劃分爲非遞歸型和遞歸型兩種基本類型的情況。這兩類濾波器的設計方法將分別在第三章和第四章中闡述。爲了說明這兩種濾波器的各種設計方法，我們還給出它們的設計實例和用計算機計算響應的過程。第五章我們回過來再對第一章中引入的幾個基本關係進行討論並論述離散時間處理中的兩個重要的內容。其一是對週期序列的離散傅力葉級數表示進行推廣，使非週期有限序列的離散傅力葉變換（DFT）也能用公式來表示。其二是引進反濾波器的概念，這在需要消除或減少數據序列中不需要部份的許多場合都是很重要的概念。我們還將引入最小誤差能量這個基本概念來對有限長度反濾波器的系數進行優化。每章的末尾都給出了大量的習題，並在書末附上這些習題的答案。

值得一提的是，本書是採用從連續時間系統（類比系統）過渡到離散時間系統（數位系統）的形式來進行論述的，這是因爲大多數學生已經用連續時間的概念學習了電機工程這門課程。當然，也可以採用另一種方法，即不通過連續時間系統而直接用離散時間的概念來學習電機工程學。這對未入門的人看來似乎是很自然的，但經過連續概念方面基本訓練後就會感到這是特別費解的了（見文獻〔2〕第VIII頁）。

第一章　離散時間濾波引論

Introduction to discrete-time filtering

1.0 引言 Introduction

在連續時間中，濾波運算往往與RC型或LC型電路聯繫在一起。因此，本章1.1節首先討論用微分方程所描述的連續時間中的兩種簡單的濾波電路（RC電路和RLC電路），然後再找出它們在離散時間中的相應方程，即差分方程。也有一些場合，如1.2節所指明的，可以直接求得差分方程。在連續時間中，我們通常用拉普拉斯變換，在複頻 s 域中描述微分方程。根據這些微分方程，我們可以直接獲得沿 $s=j\omega$ 軸的頻率響應。同樣，我們也可以通過 z 變換，把離散時間中的差分方程變換到 z 域。本章的1.3節將扼要地論述這方面的內容。最後，本章1.4節還推出了 z 域和 s 域之間的變換關係。

1.1 連續時間和離散時間分析 Continuous and discrete-time analysis

我們大家都很熟悉如何用微分方程來描述連續時間動態系統。為了說明離散時間描述方法和濾波過程，我們先考察幾個微分方程，然後把它們變換為離散時間中的相應形式，即差分方程。

圖1.1（a）是一個典型的一階RC濾波器。圖中 x 和 y 分別代表輸入電壓和輸出電壓。對于這個簡單網路，x 和 y 的關係可用微分方程表示為

$$RC\ \frac{dy}{dy}+y=x \tag{1.1}$$

若輸入一個單位階跌信號，而初始條件為零，則此微分方程的解如圖1.1（b）所示。採用後向差分的方法（見參考文獻〔3〕）可推得方程（1.1）對應的離散時間的差分方程，即

$$RC\ \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta t} + y_k = x_k$$

其中採用的是標準數學符號。解出 y_k，得

$$y_k = \frac{1}{1+\Delta t/RC}\, y_{k-1} + \frac{\Delta t/RC}{1+\Delta t/RC}\, x_k$$

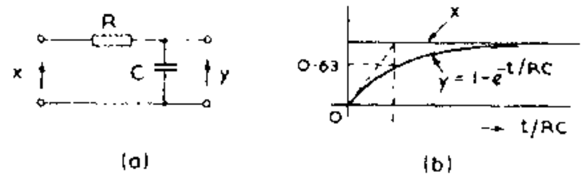


圖 1.1 (a)簡單的一階 RC 濾波器　(b)單位階躍輸入時的解

利用近似公式 $(1+\Delta t/RC)^{-1} \simeq 1-\Delta t/RC$，也就是忽略高階項，便得

$$y(k) = a_0 x(k) + b_1 y(k-1) \tag{1.2}$$

式中 $a_0 = \Delta t/RC$, $b_1 = 1 - a_0$。注意，這裡我們已經如本篇緒論所討論的那樣，把採樣符號作了改變。即用 k 代替 t ($t = k\Delta t$) 來表示離散整數時間參數。根據上述結論，我們就能夠畫出與圖 1.1 (a) 所示的連續時間系統相對應的離散時間系統，見圖 1.2 (a) 所示。圖中，三角形用來表示乘上它近旁因子的乘法運算；矩形代表延遲單元，也記作 D ($D = \Delta t$)；圓圈則表示加法。若取初始條件爲 $a_0 = \Delta t/RC = 0.1$，$b_1 = 1 - a_0 = 0.9$，$y(-1) = 0$，我們就得到圖 1.2 (b)，其中指出了用計算尺算出的開始十個點的值。

下面是一個典型的二階微分方程：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\sigma \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \tag{1.3}$$

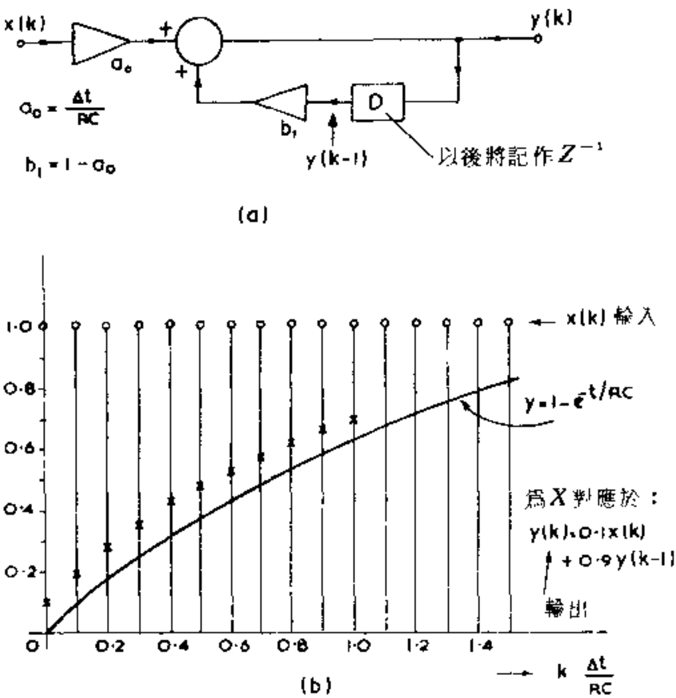


圖 1.2　(a)圖 1.1 (a)的離散時間表示(b)單位階跃輸入時的解

同樣，x 和 y 分別表示輸入和輸出。這個微分方程可以用圖 1.3（a）LRC電路的例子來說明。方程中 $\sigma = R/L$，$\omega_0^2 = 1/LC$。當輸入為單位階跌信號時，方程的解如圖 1.3（b）所示。當 $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \geq 1$ 時，系統呈弱阻尼狀態。用後向差分方法可寫出方程（1.3)的離散時間形式

$$y(k) = a_0 x(k) + b_1 y(k-1) + b_2 y(k-2) \qquad (1.4)$$

式中的係數皆為 σ 和 ω_0 的函數（具附錄第一節）圖 1.4 是二階差分方程式（1.4）的離散時間運算流程，圖中所採用的符號的意義和圖 1.2（a）完全相同。圖中設有計算離散時間的單位階跌響應，有興趣的讀者可以作為練習自行計算。

在方程（1.1）和（1.3）中，輸入變量 $x(t)$ 和輸出變量 $y(t$

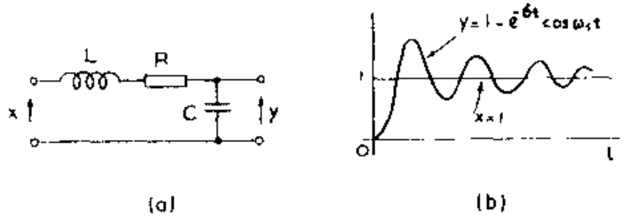


圖 1.3 (a) LRC 濾波器 (b) 階跃輸入時的解

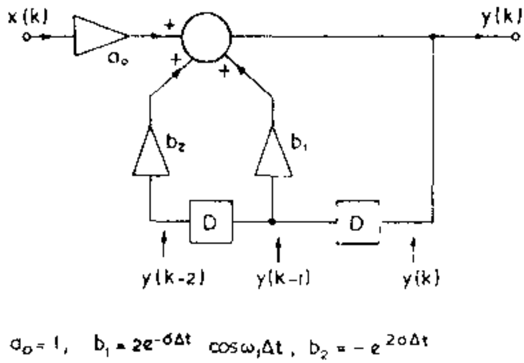


圖 1.4 圖 1.3 (a)的離散時間表示

）之間的關係是用微分方程來描述的。在連續時間系統中另一種表示它們關係的方式是卷積積分的形式，即

$$y(t)=\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\mathrm{d}\gamma \tag{1.5}$$

式中 $h(\tau)$ 表示冲激響應；$x(t)$ 是任意的輸入信號。上式的離散時間形式爲

$$y(k)=\sum_{i=0}^{k} h(i)x(k-i) \tag{1.6}$$

這種爲卷積和（ convolution summation ），通常記作 $y = h * x$（注意，$h * x = x * h$）。下面我們用簡單的方法來說明方程（1.6）的正確性。首先考慮方程（1.2）中輸入爲沖激（單位採樣沖激）時的情況，即

$$x(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}$$

然後再考慮輸入爲任意函數 $x(k)$ 時的情況。我們假設這兩種情況的初始條件爲零。

對于沖激輸入，方程（1.2）可產生如下序列：

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0) = a_0 \\ y(1) &= h(1) = a_0 b_1 \\ y(2) &= h(2) = a_0 b_1^2 \\ &\vdots \\ y(k) &= h(k) = a_0 b_1^k \end{aligned} \tag{1.7}$$

而對于任意輸入信號 $x(k)$，可得

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 x(0) \\ y(1) &= a_0 x(1) + a_0 b_1 x(0) \\ y(2) &= a_0 x(2) + a_0 b_1 x(1) + a_0 b_1^2 x(0) \\ &\vdots \\ y(k) &= a_0 x(k) + a_0 b_1 (k-1) + \cdots + a_0 b_1^k x(0) \end{aligned}$$

把上面的式子與式（1.7）的一組值相比較，有

$$y(k) = h(0)x(k) + h(1)x(k-1) + \cdots + h(k)x(0)$$

或

$$y(k) = \sum_{i=0}^{k} h(i)x(k-i)$$

這就是由式（1.6）給出的卷積和。

1.2 雷達跟踪問題的離散時間處理

Discrete-time processing in radar tracking

這是一個可以直接用離散時間公式表示的例子。圖1.5（a）是它的簡圖，摘要畫出了要討論的主要環節。用雷達波束來確定與發射天線相距 x 的目標的距離和速度。圖1.5 畫出了一組理想的發射脈衝和接收脈衝，另外還畫出了一個典型的實際接收脈衝。我們所要的信息是時間間隔 $\triangle t$ 的值，它表示無線電波傳到目標後又返回來所經歷的時間。由于各種干擾，使得實際接收信號與理想信號的形狀不完全一樣。因此實測得到的 $\triangle t_1$ 不等於理想的 $\triangle t$。所以，根據一次測量來估計距離 $x=c\triangle t_1/2$ 會產生很大的誤差（式中 c 是脈衝在空間傳播的速度）。為了減小誤差，必須週期性地每隔 T 秒發出一個脈冲，如圖1.5所示。這樣就得到距離測量值的序列：$x(0)$，$x(1)$，…，$x(k)$。一般情況下，目標是運動的，需要求的是它的速度（即距離變化率）以及下一個雷達脈冲時刻時目標的位置。

為了建立雷達數據的處理方案，我們先引進下面幾個量，即

$x(k)$：根據第 k 個雷達脈衝的回波得到的目標距離的測量值；

$y(k)$：在數據處理後得到的第 k 個雷達脈冲時刻目標的距離估計值；

$\dot{y}(k)$：在數據處理後得到的第 k 個雷達脈衝時刻目標的速度估計值；

$y_P(k)$：在數據處理後的第（$k-1$）個雷達脈衝時刻得到的第 k 個雷達脈衝時刻目標距離的預測值。

上述最後一個量可表示為：

$$y_P(k)=y(k-1)+T\dot{y}(k-1)$$

其中 T 是兩個發射脈衝之間的時間間隔。這樣，便可以建立另一個關係式：

$$y(k)=y_P(k)+\alpha[x(k)-y_P(k)]$$