21世纪高等学校数学系列教材

# 线性代数

XIANXING DAISHU

湖南省21世纪数学系列教材编写组

总主编　黄立宏

主　审　刘振海



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校数学系列教材

# 线性代数

湖南省21世纪数学系列教材编写组

**主编　　刘金旺　夏学文**

**主审　　刘振海**

**北京邮电大学出版社**

## 内 容 简 介

本教材是根据高等学校基础理论教学“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，按照国家教委制订的《线性代数课程教学基本要求》而编写的．

全书共六章，即 $n$ 阶行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值及二次型、线性空间与线性变换．每章均配有习题，书后附有参考答案．

本书可作为理工科大学及高等专科院校的数学教材或参考书，也可供综合性大学和高等师范院校非数学专业及各类成人教育的师生使用．

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/刘金旺，夏学文主编．—北京：北京邮电大学出版社，2003

ISBN 7－5635－0635－7

Ⅰ．线…　Ⅱ．①刘…②夏…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 060830 号

---

书　　名：线性代数
策 划 人：荣　华
主　　编：刘金旺　夏学文
责任编辑：陈露晓
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真：010－62282185(发行部)010－62283578(FAX)
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：国防科技大学印刷厂印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：8.75
字　　数：149 千字
版　　次：2003 年 8 月第 1 版　2003 年 9 月第 2 次印刷

---

ISBN 7－5635－0635－7/O・48　　定　价：12.00 元

如有质量问题请与发行部联系

# 21世纪高等学校数学系列教材

湖南省21世纪数学系列教材编写组

**总主编　黄立宏**

| | | |
|---|---|---|
| 高等数学(上) | 主编 | 黄立宏　周　展 |
| | 主审 | 庾建设 |
| 高等数学(下) | 主编 | 高纯一　周　勇 |
| | 主审 | 黄云清 |
| 线性代数 | 主编 | 刘金旺　夏学文 |
| | 主审 | 刘振海 |
| 概率论与数理统计 | 主编 | 韩旭里　杨润生 |
| | 主审 | 邹捷中 |

# 序

为了适应“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要，湖南省多所高等学校的数学行家们，在湖南省数学学会的指导下，根据“教育部高等院校工科数学教学大纲”的要求，编写并推出了这套数学系列教材，该系列教材包括《高等数学》（上、下）、《线性代数》、《概率论与数理统计》.

数学是严谨的科学，数学教学不但要教给学生数学知识，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，还要提高他们的数学修养，养成良好的思维品格. 一套好的教材无疑是达到上述目标的基本条件，本套教材就是遵循这一目标而编写的.

与其他教材相比，本套教材具有以下几个明显特点：

1. 科学性

内容安排上由浅入深，符合认知规律，理论严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握.

2. 先进性

本套教材充分考虑了内容的更新，选进了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料，充实教材内容，以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

3. 适用性

教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具. 所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排，以及例题、习题的选配等方面，都是从教学的实际要求出发而做出的，使其遵循教学活动自身的规律性，方便教师教与学生学.

参加本套系列教材编写的作者们都是多年从事数学教学和研究的教授、学者，他们紧紧扣住教学大纲的要求，密切联系工科院校数学教学的实际，认真研究了国内各种版本的同类教材，取长补短，编出了新意和特色. 相信这套教材在数学教学和教学改革中定能发挥相当的作用，同时也希望它在教学实践中不断地完善.

应作者之嘱托，谨作此序.

侯振挺

# 前　言

数学是科学和技术的基础，数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用．高等学校作为培育人才的摇篮，数学课程的开设也就具有其特别重要的意义．

近年来，随着我国高等教育的迅速发展，湖南省高等教育也进入了一个飞速发展时期，多所专科院校升格为本科高校．办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大．为了适应这一发展需要，经湖南省境内多所高校部分数学教师多次研究讨论，联合编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材．该系列教材包括《高等数学》(上、下册)、《线性代数》、《概率论与数理统计》．整套教材由黄立宏教授任总主编．

本系列教材是为普通高等学校非数学专业学生编写的，也可为各类需要提高数学素质和能力的人员使用．教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程严谨，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性．

《线性代数》的主要内容有：n 阶行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值与二次型、线性空间与线性变换等。本册由刘金旺、夏学文主编．参加讨论和编写的有彭向阳、赵雨清、徐立新、杨甲山、邱德华、唐小平等，长沙理工大学刘振海教授仔细审查了此书，并提出许多宝贵意见，在此表示忠心感谢．

教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见．

本系列教材编写得到湖南省数学学会的大力支持，在此一并致谢．

湖南省 21 世纪数学系列教材编写组

2003 年 7 月

# 目　录


第一章　$n$ 阶行列式 …………………………………… (1)

§1　全排列及其逆序数 …………………………… (1)

§2　行列式的定义 …………………………………… (2)

§3　对换 ……………………………………………… (5)

§4　行列式的性质 …………………………………… (6)

§5　行列式的计算 …………………………………… (10)

§6　克莱姆法则 ……………………………………… (14)

习题一 ………………………………………………… (17)

第二章　矩阵 ……………………………………………… (20)

§1　矩阵的定义 ……………………………………… (20)

§2　矩阵的运算 ……………………………………… (22)

§3　矩阵的逆 ………………………………………… (26)

§4　矩阵的分块 ……………………………………… (28)

习题二 ………………………………………………… (32)

第三章　向量组与矩阵的秩 ……………………………… (35)

§1　$n$ 维向量 ………………………………………… (35)

§2　线性相关与线性无关 …………………………… (36)

§3　线性相关性的判别定理 ………………………… (40)

§4　向量组的秩与矩阵的秩 ………………………… (44)

§5　矩阵的初等变换 ………………………………… (48)

§6　初等变换与求矩阵的逆 ………………………… (51)

§7　向量空间 ………………………………………… (55)

习题三 ………………………………………………… (58)

第四章　线性方程组 ……………………………………… (61)

§1　消元法 …………………………………………… (61)

§2　线性方程组有解判别定理 ……………………… (63)

§3　线性方程组解的结构 …………………………… (67)

习题四 ………………………………………………… (73)

**第五章　特征值与二次型** …………………………………………………… (75)
§1　向量的内积……………………………………………………………… (75)
§2　方阵的特征值和特征向量……………………………………………… (79)
§3　相似矩阵………………………………………………………………… (83)
§4　化二次型为标准型……………………………………………………… (90)
§5　正定二次型……………………………………………………………… (97)
习题五………………………………………………………………………… (101)
***第六章　线性空间与线性变换** ………………………………………… (104)
§1　线性空间的定义与性质 ……………………………………………… (104)
§2　维数、基与坐标………………………………………………………… (106)
§3　基变换与坐标变换 …………………………………………………… (108)
§4　线性变换 ……………………………………………………………… (110)
§5　线性变换的矩阵 ……………………………………………………… (112)
习题六………………………………………………………………………… (116)
**习题参考答案**……………………………………………………………… (118)

# 第一章　$n$ 阶行列式

## §1　全排列及逆序数

中学代数中，解线性方程组问题时引出了二阶和三阶行列式，它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \tag{1.2}$$

其中元素 $a_{ij}$ 的两个下标 $i$ 与 $j$ 分别表示 $a_{ij}$ 所在的行与列的序数．

注意到(1.2)式右端各项的代数和，其中的每一项是位于不同行不同列的三个数相乘，这三个数的第一个下标是按自然顺序排列的，第二个下标排列则不按自然顺序．我们不禁要问：这个代数和的项数、每一项前的符号与第二个下标的排列有无关系？为此我们引入全排列与逆序数等概念．

**定义 1**　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 $n$ 级全排列（简称排列）．

有序数组 12 和 21，由 2 个数构成，称为 2 级排列，有序数组 213 则称为 3 级排列，3 级排列的总数为 $3!=6$ 个，4321 为 4 级排列，4 级排列的总数为 $4!=24$ 个，$n$ 级排列的总数是 $n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1=n!$．

**定义 2**　在一个排列中，如果两个数（称为数对）的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么称它们构成一个逆序（反序）．一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数．

一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，一般记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

排列 12 的逆序数为 0，排列 21 的逆序数为 1，排列 231 的数对 21、31 均构成逆序，而 23 不构成逆序，因此排列 231 的逆序数为 2．同理排列 213 的逆序数

是 1，即 $\tau(213)=1$. 进一步我们有

**定义 3** 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

二级排列 12 为偶排列，21 为奇排列；三级排列 231 为偶排列，213 为奇排列.

现在我们探讨(1.1)、(1.2)式右端各项的规律：

(1.1)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列，对它们第二个下标进行观察：第二个下标由两个自然数 1 和 2 组成，只能构成两个 2 级排列：12 和 21，排列个数等于(1.1)式右端的项数，且排列 12 的逆序数为 0，对应项的符号为"+"，而排列"21"的逆序数为 1，所对应项的符号为"−".

(1.2)式右端各项的第一个下标按自然顺序排列，第二个下标由自然数 1、2 和 3 组成，构成 3 级排列共有 $3!=6$ 个：123、231、312、132、213、321，这正好等于(1.2)式右端的项数，排列为 123、231、312 的逆序数分别为 0、2、2，它们均为偶排列，对应项的符号为"+"，排列 132、213、321 的逆序数分别为 1、1、3，它们都是奇排列，对应项的符号为"−". 综上所述：(1.2)式右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里 $j_1j_2j_3$ 是 1、2、3 的一个三级排列，当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正，当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时，项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负，各项所带符号均可表示为 $(-1)^J$，其中 $J$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数. 从而(1.2)式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体三级排列求和.

## §2 行列式的定义

**定义 4** 设有 $n^2$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，排成正方阵形式

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

在不同行、不同列中取 $n$ 个数作乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，并乘以符号 $(-1)^J$（其中 $J$ 为列标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数），记为 $(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，这样的乘积有 $n!$ 项，它们的和

$$\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.3}$$

称为 $n$ 阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$a_{ij}$ 称为行列式的元素，通常也用字母 $D$ 表示行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1.4}$$

称(1.3)式为 $n$ 阶行列式的展开式或行列式的值．

**例 1**　计算 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

**解**　根据定义，$D$ 是 $4!=24$ 项的代数和，但每一项的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为 0，乘积就等于 0，所以只需计算展开式中不明显为 0 的项．由于第一行元素除 $a_{11}$ 外全为 0，故只需考虑 $j_1=1$，第二行元素中只有 $a_{21}$，$a_{22}$ 不为 0，现已取 $j_1=1$，故必须取 $j_2=2$，同理必须取 $j_3=3$，$j_4=4$，这就是说行列式展开式中不为 0 的项只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而列标排列 1234 的逆序数为 0，即此项符号为正，因此行列式 $D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$．

行列式中，从左上角到右下角的直线称为主对角线．主对角线以上的元素全为零(即 $i<j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为下三角行列式，它等于主对角线上各元素的乘积．主对角线以下的元素全为零(即 $i>j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为上三角行列式，同理可证它等于主对角线上各元素的乘积．

行列式中，除主对角线上的元素以外，其他元素全为零(即 $i\neq j$ 时元素 $a_{ij}=0$)的行列式称为对角行列式，由上面可知它等于对主角线上元素的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**例 2** 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

上面的行列式中，未写出的元素都是 0.

**证** 由于行列式的值为：$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，只需对可能不为 0 的乘积$(-1)^J a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$求和，考虑第 $n$ 行元素 $a_{nj_n}$，知 $j_n=1$，再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1,j_{n-1}}$，知 $j_{n-1}=1$ 或 $j_{n-1}=2$，由于 $j_n=1$ 知 $j_{n-1}=2$，如此类推 $j_2=n-1$，$j_1=n$，排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1)\cdots 21$，它的逆序数为 $J=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$，所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

由此可见

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

**例 3** 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2$.

**证** 记
$$D=\begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1,k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n,1} & \cdots & d_{k+n,k+n} \end{vmatrix},$$

其中

$$d_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,k);$$
$$d_{k+i,k+j}=b_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n);$$
$$d_{i,k+j}=0\quad(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n).$$

考察 $D$ 的一般项 $(-1)^R d_{1r_1}d_{2r_2}\cdots d_{kr_k}d_{k+1,r_{k+1}}\cdots d_{k+n,r_{k+n}}$，$R$ 是排列 $r_1r_2\cdots r_kr_{k+1}\cdots r_{k+n}$ 的逆序数，由于 $d_{i,k+j}=0\quad(i=1,2,\cdots,k;\ j=1,2,\cdots,n)$，因此 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 均不可大于 $k$ 值，否则该项为 0，故 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 只能在 $1,2,\cdots,k$ 中选取，从而 $r_{k+1},r_{k+2},\cdots,r_{k+n}$ 只能在 $k+1,k+2,\cdots,k+n$ 中选取，于是 $D$ 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1,q_1}b_{2,q_2}\cdots b_{n,q_n},$$

这里 $p_i=r_i,q_i=r_{k+i}-k$，$1\leqslant r_i\leqslant k$，$k+1\leqslant r_{k+i}\leqslant k+n$，$R$ 也就是排列 $p_1p_2\cdots p_k(k+q_1)\cdots(k+q_n)$ 的逆序数，以 $P,Q$ 分别表示排列 $p_1p_2\cdots p_k$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，则有 $R=P+Q$，于是

$$\begin{aligned}D&=\sum_{p_1\cdots p_k}\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^{P+Q}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}\Big(\sum_{q_1\cdots q_n}(-1)^Q b_{1q_1}b_{2q_2}\cdots b_{nq_n}\Big)\\&=\sum_{p_1\cdots p_k}(-1)^P a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{kp_k}D_2\\&=D_1D_2.\end{aligned}$$

## §3 对　换

**定义 5**　排列中，将某两个数对调，其余的数不动，这种对排列的变换叫对换，将相邻两数对换，叫做相邻对换(邻换).

**定理 1　一个排列中的任意两数对换，排列改变奇偶性．**

**证**　先证相邻对换的情形．

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$，对换 $p_i$ 与 $p_{i+1}$ 排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$，显然 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+2}\cdots p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变，仅 $p_i$ 与 $p_{i+1}$ 两数的逆序数改变：当 $p_i<p_{i+1}$ 时，经对换后，$p_{i+1}p_i$ 是逆序，新排列的逆序数增加 1，当 $p_i>p_{i+1}$ 时，$p_{i+1}p_i$ 不是逆序，新排列的逆序数减少 1，所以排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}p_{i+2}\cdots p_n$ 与排列 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}p_ip_{i+2}\cdots p_n$ 的逆序数相差 1，奇偶性改变．

下证一般对换的情形．

设排列为 $p_1\cdots p_{i-1}p_ip_{i+1}\cdots p_{i+m}p_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，对换 $p_i$ 与 $p_{i+m+1}$，把 $p_i$ 往后连续作 $m$ 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+1}p_{i+m+2}\cdots p_n$，

再把 $p_{i+m+1}$ 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换，排列变为 $p_1\cdots p_{i-1}p_{i+m+1}p_{i+1}\cdots p_{i+m}p_ip_{i+m+2}\cdots p_n$，从而实现了 $p_i$ 与 $p_{i+m+1}$ 的对换，它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成，排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性，所以两个排列的奇偶性相反．

由于数的乘法是可交换的，所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换，例如 4 阶行列式中乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 可以写成 $a_{22}a_{11}a_{44}a_{33}$，一般 $n$ 阶行列式中乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}$，其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 都是 $n$ 级排列．

**定理 2** $n$ 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},$$

其中 $S$ 与 $T$ 分别是 $n$ 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数．

**证** 该项中任意两元素互换，行下标与列下标同时对换，由定理 1 知 $n$ 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 同时改变奇偶性，于是 $S+T$ 的奇偶性不变，如果将排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12\cdots n$（逆序数为 0），排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 也随之换为 $j_1j_2\cdots j_n$（逆序数为 $J$），则有

$$(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}=(-1)^Ja_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

由定理 2 可知，行列式可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{S+T}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n}. \tag{1.5}$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列，则相应行下标排列变为 $i_1i_2\cdots i_n$，于是行列式又可定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^Ia_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{1.6}$$

其中 $I$ 为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数．

## § 4 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 $D'$ 称为行列式 $D$ 的转置行列式.

**性质 1　行列式与它的转置行列式相等.**

**证**　记

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式定义

$$D' = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^J a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} = D.$$

**性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式反号.**

**证**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 $p$、$q$ 两列得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 $D$ 与 $D_1$ 按(1.6)式计算，对于 $D$ 中任一项

$$(-1)^I a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn}$$

其中 $I$ 为排列 $i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$ 的逆序数，在 $D_1$ 中必有对应一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn}$$

(当 $j\neq p,q$ 时，第 $j$ 列元素取 $a_{ij}$，第 $p$ 列元素取 $a_{i_qq}$，第 $q$ 列元素取 $a_{i_pp}$)，其中 $I_1$ 为排列 $i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$ 的逆序数，而

$$i_1\cdots i_p\cdots i_q\cdots i_n$$

与

$$i_1\cdots i_q\cdots i_p\cdots i_n$$

只经过一次对换，由定理 1 知，$(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号，又因

$$a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_nn} = a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_pp}\cdots a_{i_qq}\cdots a_{i_nn},$$

所以对于 $D$ 中任一项，$D_1$ 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等，又 $D$ 与 $D_1$ 的项数相同，所以 $D=-D_1$.

交换行列式 $i,j$ 两行记作 $r(i,j)$，交换行列式 $i,j$ 两列，记作 $c(i,j)$.

**推论　若行列式有两行(列)元素对应相等，则行列式为零.**

**性质 3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 $k$，等于用数 $k$ 乘以此行列式.**

第 $i$ 行(列)乘以数 $k$，记作 $r(i(k))[c(i(k))]$.

**性质 4　行列式中若有两行元素对应成比例，则此行列式为零.**

**性质 5　若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和，例如**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

**则行列式 $D$ 等于下列两个行列式之和：**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质 6　把行列式某一行(列)的元素乘以数 $k$，加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.**

例如，以数 $k$ 乘以第 $i$ 行上的元素加到第 $j$ 行对应元素上[记作 $r[j+i(k)]$，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r[j+i(k)]}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{j1}+ka_{i1}) & (a_{j2}+ka_{i2}) & \cdots & (a_{jn}+ka_{in}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

**例 4**　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ a & 0 & a & b \\ 0 & a & b & a \end{vmatrix}.$$

**解**

$$D=\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ a & 0 & a & b \\ 0 & a & b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 2a & b \\ 0 & a & b & 2a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{vmatrix}$$

$$=-b^2(4a^2-b^2).$$

**例 5**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ c & a & d & b \\ a & c & d & b \end{vmatrix}.$$

**解**

$$D=\begin{vmatrix} a & c & b & d \\ c & a & b & d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \\ 0 & 0 & d-b & b-d \end{vmatrix}=0.$$