高考信息与测试

数学

乔家瑞　张　彤　编著

科学技术文献出版社

高考信息与测试

乔家瑞　张　彤　编著

科学技术文献出版社

内容简介

为配合1990年高考，中国民进系统特邀国内知名度高、高考辅导经验丰富的教师与北京市、区教研员，合作编写了一套《高考信息与测试》丛书，包括语文、生物、数学、物理、化学五册，本书是数学分册。

本书宏观地对命题进行了研究和展望，没有单纯模仿历年高考试题，但难度一致，有一定的预测性。题目内容新颖，形式多样，不仅考查数学概念、定理、公式等基础知识的运用，还注意考查数学的方法和过程，包括演绎法、归纳法、类比法和发现法的运用。

本书面向1990年和1991年高三学生，高中数学教师，教学研究人员和师范院校学生均可参考使用。

高考信息与测试　　数学

乔家瑞　张彤　编著

科学技术文献出版社出版

（北京复兴路15号）

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

●

787×1092毫米　32开本　5印张　108千字

1989年11月第1版　1989年11月第1次印刷

印数：1—18 700 册

社科新书目：238—130

ISBN 7-5023-0965-9/G·367

定　价：2.00元

前　言

为了帮助应届毕业生掌握高考命题精神，更有成效地复习与圆满地参加高考，我们组织了北京市各学科富有高考教学经验和辅导经验的教师、教研员编写了这套《高考信息与测试》丛书。主要包括三方面内容：高考命题人员的总结与展望，与教学同步的单元练习以及配合总复习的各地高考优秀预选题精选，并附全部详解与答案。

编写过程中与高考命题负责人进行了认真探讨，并请北京市教研部负责同志充分发表了意见，因此，这套书在信息方面有相当的可靠性，并在此向提供信息的同志表示感谢。

由于时间仓促，水平有限，编写中肯定存在不少缺点错误，恳请读者批评指正。

编者

1989.8.15

目　　录

高考试题分析与研究…………………………………………(1)

基础练习…………………………………………(4)

单元练习一　代数…………………………………………(4)

提示与答案…………………………………………(7)

单元练习二　代数…………………………………………(13)

提示与答案…………………………………………(18)

单元练习三　平面三角…………………………………………(24)

提示与答案…………………………………………(28)

单元练习四　平面三角…………………………………………(35)

提示与答案…………………………………………(40)

单元练习五　平面解析几何…………………………………………(47)

提示与答案…………………………………………(53)

单元练习六　平面解析几何…………………………………………(59)

提示与答案…………………………………………(67)

单元练习七　立体几何…………………………………………(75)

提示与答案…………………………………………(81)

单元练习八　立体几何…………………………………………(88)

提示与答案…………………………………………(94)

综合练习…………………………………………(101)

综合练习一…………………………………………(102)

综合练习二…………………………………………(111)

综合练习三…………………………………………(123)

综合练习四…………………………………………(134)

综合练习五…………………………………………(145)

高考试题分析与研究

普通高等院校招生统一考试是国家举办的选拔性的考试，其目的是为高等院校提供考试成绩，以利于择优录取。除此以外，这种考试还具有两个不可忽视的作用。

其一：导向作用，即引导学校按照国家的要求进行教与学，试题的内容和命题精神将渗透到日常的教学中去。其二：评价作用，即评价、检查学校的教学质量，学生的知识和能力。因此，全面而客观地认真做好高考的总结工作，对于改进教学、提高教学质量有着重大的意义。

高考数学试题一般遵循以下的三个原则：一、考查基础知识和基本技能。这是高等院校培养专门人才所必需的，也是中学数学教学的基本要求；二、考查灵活运用所学知识和技能，分析问题、解决问题的能力，这是学生所必备的能力；三、高考试题的难度必须高于毕业考试的水平，考题形成一个从易到难的梯度，从而使考生的成绩拉开一定的距离，考出真实水平，以利于准确地选拔人才。

从今年（1989年）的高考试题分析，数学试题在全面考查基础知识、基本方法的基础上，着重考查考生灵活运用基础知识，分析和解决问题的能力。所考的内容不超出中学数学大纲的要求，力求紧扣教学要求，突出基础，引导中学的数学教学摆脱"题海战术"。在这种命题思想的指导下，今年的试题中的一部分选用了课本习题或由课本习题改编的。这样做，有助于稳定中学的数学教学，使在平时的教学中注重大纲、注重课本，从而加强基础知识的教学。

今年试题内容的覆盖面大，它覆盖了教学大纲的绝大部分内容。试题各部分内容所占分值比例与教学大纲所规定的课时比例基本匹配。试题类型与去年(1988年)相同，每种类型的试题难度的安排基本上做到了由易到难，有一定的坡度。考虑到文科、理科在基础知识方面的要求不应该有太大的差别，因此今年文科、理科试题中有一半题目是相同的。

今年试题中没有偏题、怪题，考生只要真正掌握教材中所要求的内容，就能解答全部试题，取得优良成绩。在教学中要加强基础知识的教学，注意基本能力的培养，不要把大量的偏题、怪题充塞教学内容。

在考查基础知识时，今年的试题计算量较往年小，避免繁杂的运算是为了着重考查考生对概念、法则、定理的理解和掌握、运用的程度。在这个基础上，注意考查那些在中学数学中常用的、在今后学习和工作中行之有效的方法。如数形结合的方法、待定系数法、设参数求解法、因式分解的配方法、数列求和的方法、对称中的最基本的方法等等。与此同时，也考查了这些知识的相互渗透和综合。试题不但注重考查三个能力（计算能力、逻辑思维能力、空间想象能力），而且注意考查思考是否全面、周密，思路是否清晰、明白，计算是否准确、迅速。

今年高考数学试题的难度稍高于去年，其原因是去年试题偏易，题量过小，得分率过高。根据在全国范围内对考生成绩进行抽样的统计，数学平均分理科为86.9分，文科为87.3分（文科、理科满分都是120分），在分值分布直方图上，峰值在105分左右。在选拔性考试中，考生平均分偏高、高分段过分集中是不正常的。所以，今年数学试题加大了题量，适

当地加深了难度。从整体上看，1989年的数学试题照顾到了中学教学的现状，难易程度和题量大小都很适中。今后的命题力求保持试题的相对稳定性，避免出现大起大落的现象。因此，认真总结1989年的高考工作，对指导高考的复习工作具有重大的现实意义。

基础练习

单元练习一　代数

一、选择答案：

1.设A,B,C为三个集合，则$A\subseteq B$或$A\subseteq C$是$A\subseteq(B\cup C)$的（　　）。

（A）充要条件；(B) 必要但不充分条件；(C) 充分但不必要条件；(D) 既不必要也不充分条件。

2.设$1<x<a$，$A=(\log_a x)^2$，$B=\log_a x^2$，$C=\log_a\log_a x$，则它们的大小顺序是（　　）。

（A）$A>B>C$；(B) $A>C>B$；(C) $C>A>B$；(D) $B>A>C$。

3.二项式$(1-a)^{4n+1}$的展开式中，系数最大的项是(　　)。

（A）第$2n$项；(B) 第$2n+1$项；(C) 第$2n+2$项；(D) 第$2n+1$项和第$2n+2$项。

4.四名男生和四名女生坐成一排照相，男女相间的坐法共有（　　）种。

（A）$P_4^4P_5^4$；(B) $2P_4^4$；(C) $2P_4^4P_4^4$；(D) $P_4^4P_4^4$。

5.设$x>0$，$y>0$，在下列不等式中，不正确的是（　　）。

（A）$x^2+y^2\geqslant2xy$；(B) $x^2+y^2\geqslant2|xy|$；

(C) $\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\geqslant x+y$;(D) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{x+y}$。

6.如果数列 $\{(2^n)^{\lg b}\}$ ($n\in N$，b是常数)既是等差数列，又是等比数列，则b的值应为（　　）。

(A) 1;(B) 2;(C) 3;(D) 4。

7.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，如果$m+n=p+q$，其中m,n,p,q是自然数，则下列各式中正确的是（　　）。

(A) $\frac{a_m}{a_q}=\frac{a_p}{a_n}$;(B)$a_m+a_n=a_p+a_q$;(C)$a_m-a_n=a_p-a_q$;
(D) $a_m\cdot a_p=a_n\cdot a_q$。

8.复数$1-\sqrt{3}i$的辐角主值是（　　）。

(A) $-\frac{\pi}{3}$;(B) $-\frac{\pi}{6}$;(C) $\frac{11\pi}{6}$;(D) $\frac{5\pi}{3}$。

9.设复数Z满足$2|Z|+12i=3Z+1$，则Z等于(　　)。

(A) $-1+12i$;(B) $-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$;(C)$3+4i$;(D)$3+4i$或$-\frac{21}{5}+4i$。

10.设复数Z满足$|Z+1|^2-|Z+i|^2=1$，则Z在复平面上表示的图形是（　　）。

(A) 直线;(B)双曲线;(C) 椭圆;(D) 抛物线。

二、填空：

1.函数$f(x)=\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{(x-3)\lg(x+2)}$的定义域是______。

2.已知$f(x)$的定义域是$x\in(0,1)$，则$f(\lg x)$的定义域是_____。

3.函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+3)$的单调递增区间是______。

4. 复数$Z=\frac{1+i\mathrm{tg}15^\circ}{1-i\mathrm{tg}15^\circ}$的三角形式是 ____。

5. 已知复平面上一个正方形相对的两个顶点是 (0,1)和(2,5)，则另外两个顶点的坐标分别为 ___和___。

6. 设$P_n^m=272$，$C_n^m=136$，则$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$展开式中含$x^m$的项是第__项。

7. 从1-9这九个数字中任取两个分别作对数的底数与真数，共有__个不同的对数值。

8. 已知数列的前n项和$S_n=5n^2+3$，则它的通项公式$a_n=$____。

9. 在等差数列中，$S_{10}=20$，$S_{20}=10$，则$S_{30}=$____。

10. 正数x满足不等式$\sqrt{x}<2x$的充要条件是____。

三、简答下列各题：

1. 求$y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数。

2. 解不等式$x^{\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x-5}{x+4}}>x^2$。

3. 画出函数$y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{-n}-x^n}{x^{-n}+x^n}$ $(n\in N)$的大致图象。

4. 设z为虚数，且$|z|=1$，证明$\frac{z-1}{z+1}$是纯虚数。

5. 复平面内的点z_1对应的复数是$z_1=4-3i$，z_2对应的复数是$z_2=6+3i$，把线段z_1z_2逆时针绕z_1旋转150°到z_1z_3，求z_3所对应的复数。

6. 求$\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^n$的展开式中含$xy$项的系数。

7. 把圆周12等分，从这12个分点中，每连3个分点可作

一个三角形，求其中有多少个直角三角形。

8. 求从1到200之间所有个位数字是1的整数之和。

9. 求 $(1+a)^3+(1+a)^4+(1+a)^5+\cdots+(1+a)^{15}$ 的展开式中含 a^3 的项的系数。

10. 已知 $a, b, c\in R^+$，求证

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

四、证明不等式 $\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}$。

五、已知二次函数 $y=a(a+1)x^2-(2a+1)x+1(a\in N)$。

1. 求该函数的图象被 x 轴截得的线段长。

2. 用数学归纳法证明当 a 依次取1，2，3，…，n 时，图象在 x 轴上截得的 n 条线段长的和是 $\frac{n}{n+1}$.

3. 求当 $n\to\infty$ 时所有线段的和。

六、求证 $(C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots)^2+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\cdots)^2=2^n$。

七、在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{n}{a_n}+1$，求证 $\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n}+1$ $(n\in N, n\geqslant2)$。

八、在平面上有 n 个圆，其中每两个圆都交于两个不同点，并且每三个圆不交于同一点。问n个圆把平面分成多少个不连通的部分，并证明你的结论。

提示与答案

一、

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	B	C	D	A	A	D	C	A

二、1. $\{x\mid -2<x\leqslant4$，且 $x\neq-1$，$x\neq3\}$. 2. 由 $0<\lg x<1\Rightarrow$

$\lg 1<\lg x<\lg 10 \Rightarrow 1<x<10$。 3. 当$x<-3$时，$(x-1)(x+3)$是单调递减的，因此，当$x\in(-\infty,-3)$时，$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+3)$是单调递增的 $(a=\frac{1}{2}<1)$。 4. $z=\frac{\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ}=(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)^2=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ+2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ\cdot i=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$。5. 设$B(x,y)$，则$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$所对应的复数分别为$2+4i$与$x+(y-1)i$，由$(2+4i)(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=x+(y-1)i$，得$x=3, y=2$，所以B点坐标为 (3，2)。同理可求D (−1，4)

6. 由$P_n^m=272$，$C_n^m=136$得$n=17$，$m=2$。因为$T_{k+1}=(-1)^k\cdot x^{17-k}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=(-1)^k\cdot x^{17-\frac{3k}{2}}$，令$17-\frac{3k}{2}=2$，所以$k=10$，即第11项含$x^2$。7. $P_8^2+1-4=53$。注意$\log_2 4=\log_3 9$，$\log_4 2=\log_9 3$，$\log_9 4=\log_3 2$，$\log_4 9=\log_2 3$，所以要减去4。8. 由$a_n=S_n-S_{n-1}=5n^2+3-5(n-1)^2-3=10n-5$，但$a_1=s_1=3$，所以$a_n=\begin{cases}8 & (n=1),\\ 10n-5 & (n\geqslant 2).\end{cases}$

9. −30。10. $\sqrt{x}<2x\ (x>0)\Rightarrow 4x^2-x>0\Rightarrow x>\frac{1}{4}$。

三、1. $y=-\sqrt{x-1}\ (x\geqslant 1)\Rightarrow y^2=x-1\Rightarrow y=x^2+1\ (x\leqslant 0)$ 2. 由$\frac{x-5}{x+4}>0$及$x>0$得$x>5$。又$y=x^a\ (x>1)$是增函数，所以$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{x-5}{x+4}>2=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$，即$\frac{x-5}{x+4}<\frac{1}{2}$，解之，得$x<14$，因此$5<x<14$ 3. $|x|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{-n}-x^n}{x^{-n}+x^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=1$;

$|x|=1$时, $x^{-n}+x^{n}\neq0$, $x^{-n}-x^{n}=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{-n}-x^{n}}{x^{-n}+x^{n}}=0$;

$|x|>1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{-n}=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{-n}-x^{n}}{x^{-n}+x^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{-2n}-1}{x^{-2n}+1}$

$=-1$.

图象如1—1所示。

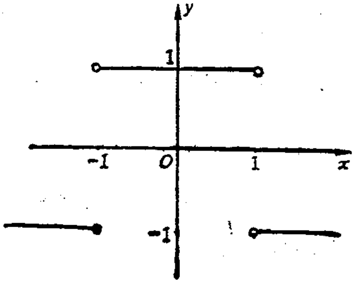

图1-1

4. ∵ z为虚数,

∴ $z\neq1$, 即$\frac{z-1}{z+1}\neq0$。

$$\because=\frac{z-1}{z+1}+\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$

$$=\frac{z-1}{z+1}+\frac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1}$$

$$=\frac{|z|^2+z-\overline{z}-1+|z|^2-z+\overline{z}-1}{(z+1)(\overline{z}+1)}=0,$$

$\therefore=\frac{z-1}{z+1}$是纯虚数。

5. $\overrightarrow{z_1z_2}$所对应的复数是 $(6-4)+(3+3)i=2+6i$, $\overrightarrow{z_1z_3}$所对应的复数是

$(2+6i)(\cos150^\circ+i\sin150^\circ)$

$=(2+6i)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=(-3-\sqrt{3})+(1-3\sqrt{3}i)$,

如图1—2所示。

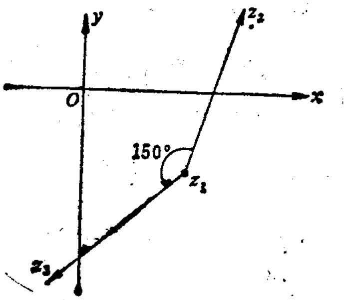

图1-2

由$\overrightarrow{z_1z_3}=\overrightarrow{oz_3}-\overrightarrow{oz_1}$，得

$\overrightarrow{oz_3}$ 所对应的复数是

$(-3-\sqrt{3}+4)+(1-3\sqrt{3}-3)i=(1-\sqrt{3})+(-2-3\sqrt{3})i$。

6. 设第$k+1$项含xy。

则$T_{k+1}=C_n^k\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}\right)^{n-k}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^k=C_n^k\,x^{\frac{4n-7k}{6}}\cdot y^{\frac{-2n+5k}{6}}$。

令$\frac{4n-7k}{6}=1$，$\frac{-2n+5k}{6}=1$，得$n=12$，$k=6$。

∴ 含xy项的系数为$C_{12}^6=924$。

7. 60个。8. 1920。 9. 原式$=\frac{(1+a)^3[(1+a)^{13}-1]}{1+a-1}=\frac{1}{a}$ $[(1+a)^{16}-(1+a)^3]$。显然当$(1+a)^{16}$的展开式中含a^4的项，即原式含a^3的项。

∴ $C_{16}^4=1820$。

10. 由$a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ $(a,\ b\in R^+)$。

∴$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{b^2+c^2}\geqslant\frac{b+c}{\sqrt{2}}$，$\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\frac{c+a}{\sqrt{2}}$

因此 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}\,(a+b+c)$。

四. 设$f(x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}$ $(x\neq 0)$

∵ $x>0$时，$1-2^x<0$，

∴ $f(x)<0$，即有$\frac{x}{1-2^x}<\frac{x}{2}$。

又∵ $f(x)-f(-x)=\frac{x}{1-2^x}-\frac{x}{2}-\frac{-x}{1-2^{-x}}+\frac{-x}{2}$

$=\frac{x}{1-2^x}+\frac{x\cdot 2^x}{2^x-1}-x=x-x=0$，

$\therefore\ f(x)$为偶函数。

因此 $f(-x)=f(x)<0$。即$x<0$时，$\dfrac{x}{1-\ 2}<\dfrac{x}{2}$也成立.

五、 1. $\Delta=(2a+1)^2-4a(a+1)=1$，图象被$x$轴截得的线段长$d=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a(a+1)|}=\dfrac{1}{a^2+a}\ (a\in N)$。

2. $a=1$时，$d_1=\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}$，

$a=2$时，$d_2=\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$，

………………………………

$a=n$时，$d_n=\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$。

将上面n个式子相加，得

$$S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1}$$。

3. $S=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$。

六、 $\because\ (1+i)^n=C_n^0+C_n^1i+C_n^2i^2+C_n^3i^3+C_n^4i^4+C_n^5i^5$

$$+C_n^6i^6+\cdots$$

$$=C_n^0+C_n^1i-C_n^2-C_n^3i+C_n^4+C_n^5i-C_n^6+\cdots$$

$$=(C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots)+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots)i,$$

两边取模的平方，得

$$(C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots)^2+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots)^2=2^n。$$

七、 1. $n=2$时，$\sqrt{2}<a_2<\sqrt{2}+1$，但$a_2=\frac{1}{a_1}+1=2$，显然成立。

$n=3$时，$\sqrt{3}<a_3<\sqrt{3}+1$，但$a_3=\frac{2}{a_2}+1=2$，显然成立。

2. 假设$n=k$时命题成立，即$\sqrt{k}<a_k<\sqrt{k}+1$。

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k}+1}<\frac{1}{a_k}<\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$\frac{k}{\sqrt{k}+1}<\frac{k}{a_k}<\frac{k}{\sqrt{k}}.$$

$$\frac{k+\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}+1}<\frac{k}{a_k}+1<\frac{k+\sqrt{k}}{\sqrt{k}}=\sqrt{k}+1.$$

即 $$\frac{k+\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}+1}<a_{k+1}<\sqrt{k}+1.$$

$$\because a_{k+1}<\sqrt{k}+1<\sqrt{k+1}+1,$$

$$a_{k+1}>\frac{k+\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}+1}>\frac{k}{\sqrt{k+1}+1}+1=\sqrt{k+1}-1+1=\sqrt{k+1}.$$

$$\therefore \sqrt{k+1}<a_{k+1}<\sqrt{k+1}+1.$$

因此对于$n\in N$，$n\geqslant 2$时命题都成立。

八、 一个圆把平面分成两部分，记作$f(1)=2$。

两个圆把平面分成4部分，比原来增加2部分，记作$f(2)=4=f(1)+2$。

三个圆把平面分成8部分，比原来增加4部分，记作$f(3)=8=f(2)+4$。

四个圆把平面分成14部分，比原来增加6部分，记作$f(4)=14=f(3)+6$。

可见$f(n)=f(n-1)+2(n-1)$。

$$\begin{aligned}\therefore f(n)&=2+2+4+6+\cdots+2(n-1)\\&=2+2[1+2+3+\cdots+(n-1)]\\&=2+n(n-1)\end{aligned}$$