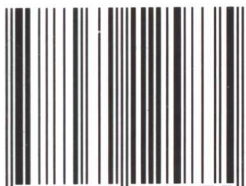


流体结构互动理论 及其应用

■ 张立翔 杨柯 著

(O-1879.0101)

ISBN 7-03-012583-5



9 787030 125835 >

ISBN 7-03-012583-5

定价：42.00 元

流体结构互动理论及其应用

张立翔 杨 柯 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是对作者从事(管道)流体结构相互作用研究的总结,同时也对国外相关研究进行了综述。全书共10章,内容包括流体结构互动理论的数学、力学基础,线性及非线性建模方法,频域、时域分析理论及分析方法,互动系统的几个基本变分原理,互动效应的分析、试验测试及利用互动效应调控水击压力波动的应用,以及非线性互动系统的力学行为及其解的稳定性分析方法等。

本书可供航空航天、石油化工、水利电力、机械以及流体工程等相关专业的科技人员、大专院校师生和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

流体结构互动理论及其应用/张立翔,杨柯著. —北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-012583-5

I. 流… II. ①张…②杨… III. 管道流动-流体力学 IV. O357.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第125045号

责任编辑:刘剑波 彭 斌 姚 晖/责任校对:柏连海

责任印制:吕春珉/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年3月第一版 开本:B5(720×1000)

2004年3月第一次印刷 印张:20 1/4

印数:1—2 000

字数:393 000

定价:42.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前 言

流体结构相互作用会诱发结构振动、噪声、系统振荡,降低系统运行可靠度,恶化工作环境,甚至导致系统破坏等,例如,飞行器、船舶以及大型流体机械的流固耦合振动和稳定性问题、核反应堆流体系统的安全性问题、管阵系统的噪声控制问题、质量传输中的系统稳定性及超常压力控制问题等均与流体结构的相互作用密切相关,且具有非线性动力学系统的力学行为。因此,作为流体力学、结构动力学以及非线性科学交叉的一门学科,流体结构互动理论对研究和解决众多工业领域中面临的复杂力学问题不仅具有重要的学术意义,而且具有广阔的工程应用前景和价值。

流体与其周围物体的相互作用问题作为经典流体力学研究的范畴,已具有悠久的历史,但随着科学技术发展的需要,源于经典的流体结构互动理论已发展成为一门多学科交叉的前沿性学科。作者在过去 10 余年的研究过程中,结合管道系统,在流体结构互动的基础理论、计算方法、试验以及工程应用等方面开展了工作,同时也积累了大量的相关文献和资料,并在此基础上对相关领域的研究成果进行总结,撰写成本书,供对此感兴趣的读者参考。

全书共 10 章,在内容安排上力求反映相关领域的最新成果和研究的发展动向。首先对流体结构互动理论相关的力学和数学基础进行了概述,并按内容层次分别在第一、第九章撰写;第二章介绍了流体结构互动系统线性、非线性建模的理论和方法;第三、第四章研究了线性流体结构互动系统频域分析的理论和方法,并结合试验以及计算分析了互动系统的基本特性;第五章讨论线性流体结构互动系统的时域分析方法,并重点介绍了分析液体压力波动的行波叠加法和考虑液体压缩性的激波模拟法;第六、第七章给出了流体结构互动系统的几个基本变分原理以及利用基本力学原理分析系统的动力学特性的方法;第八章介绍利用互动效应调控系统压力波动的试验和在实际工程中的应用;第十章涉及非线性互动系统力学行为以及解的稳定性问题的研究,较全面地介绍了非线性互动系统的定性理论和分析方法。

在本书完稿之际,作者要感谢中国工程院院士、哈尔滨工业大学教授黄文虎先生的指导,本书的相当一部分内容就是基于第一作者在黄文虎先生指导下完成的博士学位论文写成的;感谢荷兰 Eindhoven 理工大学数学与计算机科学系 A S Tijsseling 博士在与作者合作研究期间给予的帮助及提供的大量参考文献和研究资料;感谢英国 Dundee 大学土木工程系 A E Vardy 教授对作者在苏格兰期间给予的指导和对第三、第四章核心内容的认真审阅和精心修改,作者是在 Vardy 教

授的指导下走上了流体结构互动领域的研究之路;感谢昆明理工大学张洪明副教授、云南省水利水电勘测设计研究院杨影丹高级工程师、云南怒江电力集团公司汪正军副总经理以及我们的研究生在应用试验中给予的帮助和支持;最后,还要感谢国家自然科学基金 50079007 项目、英国 SERC GR/J54857 项目、水利部重点水利科技 SZ9830 项目、云南省自然科学基金 97E003G 项目给予的经费资助,以及云南怒江电力集团在应用试验研究方面给予的支持。另外,本书引用了大量的文献,其中一部分为研究资料或内部资料,未能一一列出,在此对所引用文献的作者表示感谢。

本书第三章 3.8、3.9 节,第四章 4.3、4.4 节,第五章 5.1~5.5 节,第六章以及第七章由杨柯完成,其余章节由张立翔完成。全书由张立翔统稿。

由于本书作者水平有限,书中的错误和疏漏在所难免,恳请读者指正。

张立翔 杨 柯

2003 年 9 月于昆明理工大学

目 录

前 言

第一章 流体结构互动理论的力学基础	1
1.1 固体系统的动力学描述	1
1.1.1 系统的定义	1
1.1.2 线性模态动力学	3
1.1.3 非线性模态动力学.....	7
1.2 流体运动的描述.....	14
1.2.1 运动方程.....	14
1.2.2 求解方法.....	17
1.2.3 湍流问题.....	20
1.3 流体结构互动的基本原理.....	25
第二章 流体结构互动模型	34
2.1 管道中的水击问题.....	34
2.1.1 经典水击理论	35
2.1.2 耦合水击理论	37
2.2 经典水击模型.....	41
2.3 线性互动模型.....	42
2.3.1 流体运动的描述	42
2.3.2 管道运动的描述	45
2.3.3 液固界面条件	46
2.3.4 轴向运动 4-方程模型	50
2.4 管道横向运动的 4-方程模型	54
2.5 弯管的运动方程.....	59
2.6 多管互动模型.....	63
2.7 非线性互动模型.....	65
2.7.1 管道变形状态的描述	66
2.7.2 系统运动状态描述	69
2.7.3 系统动能和势能	70
2.7.4 管道运动方程	73
2.7.5 流体控制方程	78
2.7.6 全耦合非线性互动模型	85

2.7.7 模型比较	86
第三章 线性互动频域分析	89
3.1 概述	89
3.2 运动的时域描述	92
3.3 运动的频域描述	94
3.3.1 经典系统的频域描述	95
3.3.2 互动系统的频域描述	97
3.4 定解条件	99
3.5 运动方程的频域解	100
3.6 传递矩阵	100
3.7 确定边界约束状态矩阵	101
3.7.1 轴向运动边界条件	101
3.7.2 横向运动边界条件	103
3.8 传递矩阵解法	104
3.8.1 场传递矩阵	104
3.8.2 点传递矩阵	105
3.8.3 传递矩阵法	106
3.9 多跨管道	108
3.9.1 多跨管道的场传递矩阵	108
3.9.2 流体变量的场传递矩阵	109
3.9.3 流体的点传递矩阵及整体传递矩阵	111
3.9.4 多跨管的最终解	111
第四章 互动频域分析方法的应用	113
4.1 剪力和弯矩互动分析	113
4.1.1 互动效应分析	114
4.1.2 系统的色散和耗散特性	116
4.1.3 特征向量矩阵	121
4.1.4 频率响应分析	122
4.2 流体结构互动分析	126
4.2.1 色散方程与转换矩阵	127
4.2.2 频率响应分析	129
4.3 传递矩阵法的应用	134
4.4 多跨管的分析	139
4.4.1 情况 1	139
4.4.2 情况 2	139
4.5 互动效应的比较分析	143

第五章 线性互动时域分析	152
5.1 基本方程及其解耦变换	152
5.2 定解条件	154
5.3 定解条件的分段描述	156
5.3.1 定解条件的分段定义	156
5.3.2 分段函数的逻辑表达	157
5.4 递推确定待定函数	158
5.4.1 待定函数的分段求解	158
5.4.2 函数的替换问题	159
5.4.3 解的最终形式	159
5.5 在前几个时间段内方程的解	161
5.6 激波模拟分析法	164
5.6.1 可压缩液体状态运动的描述	164
5.6.2 可压缩液体压力波动的状态方程	167
5.6.3 状态方程的特性分析	168
5.6.4 波-波互动分析	171
5.6.5 试验验证	173
第六章 互动系统的几个基本变分原理	179
6.1 互动模型的对称化处理	179
6.2 泛函与边界条件	181
6.3 Hamilton 变分原理	182
6.4 最小转换能定理	184
6.5 Gurtin 变分原理	184
6.6 互等功定理	185
6.6.1 时域中互等功定理	185
6.6.2 频域中互等功定理	187
第七章 互动系统的模态特性分析	188
7.1 互动系统固有特性的变分公式	188
7.2 互动系统驻值势能原理	189
7.3 互动系统固有振动的虚功原理	189
7.4 互动系统振型的正交性	190
7.5 互动系统固有特性的 FEM 模型	191
7.6 互动系统的耦合振子	193
7.7 耦合共振特性	195
7.8 耦合共振效应	196

第八章 互动效应的试验及其应用	198
8.1 互动效应的试验和比较	198
8.1.1 长短管试验	198
8.1.2 RPV 系统的比较	200
8.2 气垫装置的试验	202
8.3 高压输水长管道系统压力控制试验	203
8.3.1 试验系统	204
8.3.2 试验目的	206
8.3.3 试验工况	207
8.3.4 测试方法	207
8.3.5 传感器、数采系统的标定	209
8.3.6 信号处理方法	212
8.3.7 试验实测结果	213
8.3.8 沿管线上波动参数分析比较	228
第九章 非线性动力学基础	233
9.1 Lyapunov 稳定性定义.....	233
9.2 线性化系统	235
9.2.1 矩阵 A 为自治情况	235
9.2.2 矩阵 A 为周期变化情况	235
9.2.3 矩阵 A 为非周期变化情况	236
9.3 Lyapunov 直接法.....	236
9.4 中心流形法	237
9.5 规范形法	239
9.6 极限环的一般理论	240
9.6.1 极限环的稳定性	241
9.6.2 极限环存在的条件	241
9.7 结构稳定性与分岔理论	243
9.7.1 Hopf 分岔	246
9.7.2 同宿与异宿分岔	251
9.7.3 极限环复眼分岔	253
9.8 平均法	255
9.9 Lyapunov-Schmidt 法	258
第十章 互动系统动力稳定性分析	260
10.1 运动方程的无量纲形式.....	260

10.2	定常流线性化系统解的稳定性分析·····	262
10.2.1	横向振动问题·····	263
10.2.2	两端支承系统·····	269
10.2.3	悬臂梁系统·····	270
10.3	非定常流线性化系统解的稳定性分析·····	271
10.4	确定模态函数·····	281
10.5	非线性稳定性分析·····	290
10.5.1	中心流形·····	295
10.5.2	应用例子·····	298
参考文献	·····	305

第一章 流体结构互动理论的力学基础

根据物质构成的不同,可以将一个力学系统分成固体系统、流体系统以及流固系统。由单一固体物质构成的力学系统用固体力学的理论和方法描述,由流体物质构成的力学系统用流体力学的理论和方法描述,而当系统由固体和流体两种物质同时组成,或需同时考虑流体运动和固体结构振动的相互影响时,也即需要考虑两种物质运动过程中的动力相互作用时,则力学系统应使用流体结构互动的理论和方法描述。

1.1 固体系统的动力学描述

1.1.1 系统的定义

设有如图 1-1 所示的由 N 个质量块组成的质量-弹簧系统(m_0 为约束端),在任意 i 和 j 两个质量块之间的连接刚度用弹簧刚度系数 k_{ij} 表示,系统振动过程中弹簧的作用力有势,势函数为 $\Pi_{ij}(z)$,则弹簧恢复力 $F_{ij}(z)$ 与势函数的关系为 $F_{ij}(z) = \partial \Pi_{ij} / \partial z$,并有 $F_{ij}(z) = -F_{ij}(-z)$,其中 z 表示弹簧的伸长,或压缩变形。

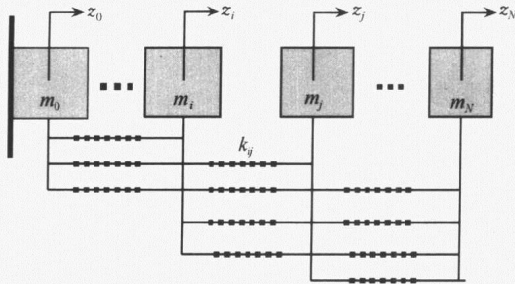


图 1-1 N 自由度质量-弹簧系统示意图

如果每个质量块间均通过弹簧相互连接,那么 N 个质量块构成的系统的弹簧数量为 $N(N+1)/2$,因此一般情况下将由 N 个质量块和 $N(N+1)/2$ 个弹簧构成的系统称为 N 个自由度的质量-弹簧系统。为便于讨论,设系统是一保守系统(暂不考虑系统耗散),当无外力作用时,系统处于某一平衡的位形状态,相对于此平衡位形的振动定义为自由振动;当有外力作用时,系统的振动则为强迫振动。

设系统的势函数为

$$\Pi = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \Pi_{ij}(z) \quad (1-1)$$

若系统的势函数在任意给定的区域内光滑可微,且一阶导数可表示为

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \Pi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \sum_{j=1}^N a_{ij} z_j + \bar{P}_i(z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (1-2)$$

式中, $\bar{P}_i(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 为一非线性函数,则系统运动方程可描述为

$$m_i \ddot{z}_i = \frac{\partial}{\partial z_i} \Pi(z_1, z_2, \dots, z_N) + r_i(t) \quad (1-3a)$$

或

$$m_i \ddot{z}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} z_j + \bar{P}_i(z_1, z_2, \dots, z_N) + r_i(t) \quad (1-3b)$$

式中, $r_i(t)$ 为系统的外激励。根据式(1-3b),如果 $r_i(t) = 0$,系统不显含时间变量,定义系统为自治系统,反之为非自治系统。

若系统方程线性部分的系数矩阵行列式 $|a_{ij}| \neq 0$,系统称为可线性化系统,反之为不可线性化系统;更进一步,如果非线性函数 $\bar{P}_i(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 可以表示为

$$\bar{P}_i(z_1, z_2, \dots, z_N) = \epsilon_i Q_i(z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (1-4)$$

式中, $|\epsilon_i| \ll |a_{ij}|$,且函数 $Q_i(z_1, z_2, \dots, z_N)$ 有界,则系统称为弱非线性系统,否则系统为强非线性系统。

对于线性自治或非自治系统,其相应的振动分别称为正规模态自由振动或定常强迫振动,系统的运动可用模态动力学理论和方法描述。

为便于分析和讨论,对系统方程做标准变换,即令

$$x_i = \sqrt{m_i} z_i \quad (1-5)$$

则式(1-3a)表示的系统变为

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi \left(\frac{x_1}{\sqrt{m_1}}, \frac{x_2}{\sqrt{m_2}}, \dots, \frac{x_N}{\sqrt{m_N}} \right) + \frac{r_i(t)}{\sqrt{m_i}} \quad (1-6)$$

或简化并用相同符号表示为

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi(x_1, x_2, \dots, x_N) + r_i(t) \quad (1-7)$$

原系统化为单位质量系统在 N 维坐标 (x_1, x_2, \dots, x_N) 构成的位形空间中运动所具有的形式。

设式(1-7)表示的单位质量系统的解为 $x_i = x_i(t)$,且其中任意自由度对应的解 $x_k = x_k(t)$ 的反函数存在,即 $t = t(x_k)$ 存在,则可将系统的解表示为

$$x_i = x_i(x_k) \quad (1-8)$$

所描述的运动称为系统在位形空间中的迹线,其方程称为系统的迹线方程。注意到

$$\ddot{x}_i = \frac{dx_i}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \frac{dx_i}{dx_i}, \text{ 则式(1-7)又可表示为}$$

$$\int \dot{x}_i dx_i = \int \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_i + \int r_i(x_k) dx_i \quad (1-9)$$

积分并对系统中所有自由度求和得系统能量平衡关系为

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i^2 = \Pi(x_1, x_2, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^N E_i(x_i) + C \quad (1-10)$$

式中, C 为积分常数。

如果式(1-10)表示的函数满足 Lipschitz 条件, 则任意自由度系统在位形空间中运动的迹线存在, 且连续可微, 并且都通过位形空间的原点, 那么必存在这样的时刻 t_0 使得 $\dot{x}_i(t_0) = 0$, 即

$$\left[\Pi(x_1, x_2, \dots, x_N) + \sum_{i=1}^n E_i(x_i) + C \right] \Big|_{t=t_0} = 0 \quad (1-11)$$

该方程代表系统振动过程中的能量平衡关系, 在某一能量级别下, 在相应的位形空间中形成了一个封闭的、光滑的边界面, 一般称做 Lipschitz 面, 如图 1-2 所示为 3 个自由度系统的 Lipschitz 面, 为一在三维空间中的蛋形封闭曲面。在位形空间中的所有振动解的迹线, 起点为位形空间的原点, 终点为 Lipschitz 面上的某一点, 并与 Lipschitz 面正交, 交点称为不动点。因此, 如果系统迹线在这区间严格单调, 则将系统的振动定义为调和振动(或称同步振动), 显然, 线性振动一定是调和振动; 非线性系统的振动可能是调和振动, 也可能不是调和振动。如果是调和振动, 相应的非线性振动称为类振动(similar vibration), 即与线性系统相似的振动, 否则称为非类振动(nonsimilar vibration)^[1]。

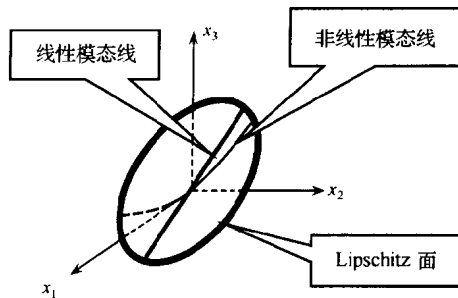


图 1-2 3 自由度系统的 Lipschitz 面与模态线

1.1.2 线性模态动力学

模态分析技术是描述线性动力系统解系特性的理论基础, 也是十分有效的分析工具, 在线性动力系统的分析中被普遍地使用, 具有十分重要的地位。

为不失一般性, 我们用迹线的概念描述线性系统的模态运动。事实上, 我们知道, 线性自治系统的调和振动实际就是该系统的模态振动, 因此, 也可以把与模态振动相应的位形空间中的迹线称做模态线。进一步可以证明, 线性自治系统的模态

线是直线,而非线性系统的模态线是曲线。如图 1-2 所示表示了 3 个自由系统的 Lipschitz 面与模态线。

对于如图 1-2 所示的三自由度线性系统,其自由度分别记为 (x_1, x_2, x_3) , 在三维空间中系统的等势面可以表示为

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = C^* \quad (1-12)$$

这是一个中心位于坐标原点的封闭曲面,也即为该系统的 Lipschitz 面。相应的第 n 阶模态振动表示为

$$x_1 = X_{1n} \cos(\omega_n t) \quad (1-13a)$$

$$x_2 = X_{2n} \cos(\omega_n t) \quad (1-13b)$$

$$x_3 = X_{3n} \cos(\omega_n t) \quad (1-13c)$$

式中, X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} 为振动的振幅; ω_n 为振动角频率。由于模态振动是调和振动,根据模态的不变特性,有

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{X_{2n}}{X_{1n}} = c_{x_2 x_1}^n \quad (1-14a)$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{X_{3n}}{X_{1n}} = c_{x_3 x_1}^n \quad (1-14b)$$

则在 Lipschitz 面内 $x_2 = c_{x_2 x_1}^n x_1$ 与 $x_3 = c_{x_3 x_1}^n x_1$ 的交线即为系统第 n 阶模态的模态线。显然,两平面的交线是一条过原点的直线。对于三自由度系统,有 3 个正规模态,因此这样的直线有 3 条,也可将其分别定义为 Lipschitz 面的 3 根主轴线。如果系统是非线性的,且为非类振动,则相应的模态线是两曲面 $x_2 = \varphi(x_1)$ 与 $x_3 = \phi(x_1)$ 的交线,一般是曲线。

将式(1-7)表示的保守线性系统的运动方程去掉等号右端的激励项变为

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi(x) = \Pi_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1-15)$$

引入状态变量 z (已不是前面用过的描述弹簧变形的变量 z), 将系统方程式(1-15)变为在状态空间中的 $2N$ 个一阶微分方程,用矩阵形式表示为

$$\dot{z} = f(z) = Jz \quad (1-16)$$

式中, $z_{2i-1} = x_i, z_{2i} = \dot{x}_i; f_{2i-1} = z_{2i}, f_{2i} = \Pi_i$; 矩阵 J 定义为变换函数 f 的 Jacobian 矩阵,为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_{2N}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial z_{2N}} \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

由振动力学的理论可知,如果系统为保守系统,则 Jacobian 矩阵 $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{\Pi}_{,ij} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,

如果系统为非保守系统, 则 $J = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{\Pi}_{,ij} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$, 其中矩阵 \mathbf{B} 为耗散矩阵(也可包含陀螺力在内), \mathbf{I} 为单位矩阵。

对于给定的初始条件 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{Z}$, 当 $t = \tau$ 时, 式(1-16)有惟一解 $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau, t, \mathbf{Z})$, 其中 $-\infty < t < +\infty$ 。相反, 如果在 $\tau = t$ 处给定初始条件 $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{z}$, 则 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\tau, t, \mathbf{z})$ 也惟一确定。因此, 如果将 $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau, t, \mathbf{Z})$ 看做是一个将大 \mathbf{Z} 映射成小 \mathbf{z} 的映射, 而 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\tau, t, \mathbf{z})$ 是一个将小 \mathbf{z} 映射成大 \mathbf{Z} 的反映射, 那么, 式(1-16)就是一个相空间中的拓扑映射, 则系统的能量积分存在, 并且可以表示为

$$-\Pi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = H = \text{const.} \quad (1-18)$$

式中, $\|(\cdot)\|$ 是 Euclidean 距离函数; H 是系统的总能量。当 Euclidean 距离函数为零时, 系统处于最大势能位形, 即 $\Pi + H = 0$, 系统在相空间中的所有可能的轨迹均以最大势能位形为边界, 换言之, 式(1-16)能满足系统所有可能的轨迹函数。

如果将 \mathbf{x} 和 $\dot{\mathbf{x}}$ 相应的幅值记为 \mathbf{X} 和 $\dot{\mathbf{X}}$, 则由能量守恒式(1-18), 显然有

$$-\Pi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = -\Pi(\mathbf{X}) + \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{X}}\|^2 \quad (1-19)$$

将式(1-19)对 \mathbf{X} 和 $\dot{\mathbf{X}}$ 微分得

$$\mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{Z}} \quad (1-20)$$

式中

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_N}{\partial X_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial X_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial X_N} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial X_N} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_N}{\partial X_N} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{X}_1} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial \dot{X}_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{X}_1} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_N}{\partial \dot{X}_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \dot{X}_N} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial \dot{X}_N} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial \dot{X}_N} & \cdots & \frac{\partial \dot{x}_N}{\partial \dot{X}_N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_N \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial X_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial \Pi}{\partial X_N} \end{bmatrix}$$

可以证明, 矩阵 \mathbf{D}_1 的逆存在, 故有

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{D}_1^{-1} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{J} \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{D} \dot{\mathbf{Z}} \quad (1-21)$$

进一步有

$$\mathbf{z} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D} \dot{\mathbf{Z}} = \Phi \dot{\mathbf{Z}} \quad (1-22)$$

对照经典振动力学中模态分析理论, 如果将 Lipschitz 面形成的边界约束理解为系统可能的运动幅值, 则只要 $\dot{\mathbf{Z}}$ 给定, 系统的解就可以惟一确定, 因此式(1-22)实际上表示了一种坐标变换, 即相当于线性模态理论中的几何坐标 (\mathbf{z}) 与模态坐标 ($\dot{\mathbf{Z}}$) 之间的关系式, 而变换矩阵则为模态振型矩阵 (Φ)。

对于有阻尼的非保守系统或者是陀螺系统,则将式(1-22)代入式(1-16),同样可构造得到 $2N \times 2N$ 阶的特征值问题

$$\mathbf{J}\bar{\mathbf{z}} = \lambda\bar{\mathbf{z}} \quad (1-23)$$

对于一般系统,应按复模态问题处理。对于小阻尼系统,设所有的特征值均为复数,且无重根,记 N 个复共轭特征解为 $(\lambda_i, \bar{\mathbf{z}}_i)$ 和 $(\lambda_i^*, \bar{\mathbf{z}}_i^*)$, 星号代表共轭,利用坐标变换,可得 $2N$ 个不耦合的一阶方程为^[2,3]

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{A} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_1^*, \dots, \lambda_i, \lambda_i^*, \dots, \lambda_N, \lambda_N^*\} \quad (1-24)$$

引入一个分别由特征向量实部和虚部构成列的矩阵,即

$$\Phi' = [\text{Re}\bar{\mathbf{z}}_1, \text{Im}\bar{\mathbf{z}}_1, \dots, \text{Re}\bar{\mathbf{z}}_i, \text{Im}\bar{\mathbf{z}}_i, \dots, \text{Re}\bar{\mathbf{z}}_N, \text{Im}\bar{\mathbf{z}}_N] \quad (1-25)$$

式中, Re 和 Im 分别表示特征向量 $\bar{\mathbf{z}}_i$ 的实部和虚部。若令 $\mathbf{z} = \Phi'\eta$, 则式(1-16)又可变换为两两解耦的一阶方程

$$\dot{\eta} = \Lambda'\eta, \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} \text{Re}\lambda_1 & \text{Im}\lambda_1 & & & & \mathbf{0} \\ -\text{Im}\lambda_1 & \text{Re}\lambda_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \text{Re}\lambda_N & \text{Im}\lambda_N \\ \mathbf{0} & & & & -\text{Im}\lambda_N & \text{Re}\lambda_N \end{pmatrix} \quad (1-26)$$

这些方程相应于复共轭特征值对相关的小阻尼模态。因此,可将相应的模态动力学定义在由复共轭特征向量的实部和虚部张成的二维子空间上。这样,第 i 个小阻尼模态运动由第 i 个成对的一阶方程(由两个方程组成,称为方程对)所定义的耗散系统组成,称为振子方程,特征值的实部 $-\text{Re}\lambda_i = \xi_i\omega_i$ 和虚部 $\text{Im}\lambda_i = \omega_i\sqrt{1-\xi_i^2}$ 。因此,对于小阻尼系统,用模态坐标表示可得 $2N$ 个成对的一阶方程为

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{J}\Phi\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -\omega_1^2 & -2\xi_1\omega_1 & & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -\omega_N^2 & -2\xi_N\omega_N \end{pmatrix} \mathbf{Z} \quad (1-27)$$

式中

$$\begin{aligned} -\omega_k^2 &= \alpha_{11} + \sum_{j=2}^n \alpha_{1j}(a_{1j})_k + \sum_{j=2}^n \beta_{1j}(b_{1j})_k \\ -2\xi_k\omega_k &= \beta_{11} + \sum_{j=2}^n \alpha_{1j}(a_{2j})_k + \sum_{j=2}^n \beta_{1j}(b_{2j})_k \end{aligned} \quad (k=1, \dots, N) \quad (1-28)$$

式中, ω_k 为第 k 阶正规模态相应的角频率; ξ_k 为第 k 阶正规模态相应的阻尼比。由此,相应的位形空间成为与第 k 阶模态对应的模态子空间,对应的运动可用模态动力学的振子方程描述为