高等学校经济管理学科 数学基础辅导丛书

□ 主编 刘书田

微积分
学习辅导与解题方法

■ 冯翠莲 刘书田 编著

高等教育出版社

高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书

主编 刘书田

微积分学习辅导与解题方法

冯翠莲 刘书田 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导与解题方法/冯翠莲,刘书田编著.北京:高等教育出版社,2003.12

(高等学校经济管理学科数学基础辅导丛书/刘书田主编)

ISBN 7-04-012936-1

Ⅰ.微... Ⅱ.①冯...②刘... Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第091982号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销	新华书店北京发行所
印　　刷	北京二二〇七工厂

开　　本	850×1168　1/32	**版　　次**	2003年12月第1版
印　　张	23.125	**印　　次**	2003年12月第1次印刷
字　　数	590 000	**定　　价**	28.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

内容提要

本书是高等学校经济类、管理类各专业学生学习《微积分》课程的辅导教材。内容包括一元函数微积分，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程。

本书强调对基本概念、基本理论内涵的理解及各知识点之间的相互联系。选题广泛、典型，既有基本题，又有综合题、提高题，用"讲思路举例题"与"举题型讲方法"的方式来揭示解题规律与思维方法，以使读者融会贯通，举一反三，达到正确理解、巩固所学知识和灵活运用；纠正在运算方法、运算过程中常犯的错误；掌握解题思路、解题方法；提高逻辑推理和分析判断能力；提高解题技巧。

本书每章有小结并配有自测题；自测题附有参考答案与解法提示。

本书是经济类、管理类学生学习期间和报考研究生前的必备读物，是颇具有特点的教学参考书。对参加自学考试、专升本考试和成人教育的读者是一本无师自通的自学指导书。

前　言

《高等学校经济管理学科数学基础》系列辅导丛书包括三个分册："微积分学习辅导与解题方法"、"线性代数学习辅导与解题方法"和"概率论与数理统计学习辅导与解题方法"，是财经类、管理类大学本科生学习《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》时起到辅导教材作用的用书。本系列辅导丛书适应高等教育新形势下教改的精神，以教育部颁布的《经济数学基础》大纲为准，紧密结合经济类、管理类面向21世纪的课程教材，是编写者数十年教学经验的积累。

本系列辅导丛书选题广泛、典型，并有针对性。例题编排以内容为准，以题型归类。用"讲思路举例题"与"举题型讲方法"的思维方式，揭示具有共性题目的解题思路；概括题型特征，归纳解题方法。讲述例题，着重分析题目条件与结论之间的逻辑关系；着重讲述解题思路的源头；注意讲述解题技巧。还通过例题指出在运用解题方法时和解题过程中易犯的错误。使读者达到融会贯通、举一反三的境地；提高逻辑推理和分析判断能力。使读者实现掌握解题思路、解题方法由继承性向创造性跃进。阅读本系列辅导教材，可以深入理解、巩固提高和灵活运用所学知识，可以思路畅通，实现纵向深入，横向跨越，提高解题能力。

学习数学就必须解题。解题要以自己的实践过程来实现。书中有些例题解题步骤书写简略，望读者在阅读这些例题时，要边看、边思索、边推导，思索由前一式如何过渡到后一式，推导后一式的结果如何由前一式而得。特别是本系列辅导丛书，每章之后都配有自测题（书后附有参考答案与解法提示），望读者能独立完成

自测题，并能有新的解题方法和捷径。本系列辅导教材以小结形式概括本章的知识点、重点、难点以及掌握本章内容需要特别注意的方面。还阐明本章内容与前后各章内容的联系，以使知识科学化、系统化。

本系列辅导丛书，可作为非数学类本科生学习大学数学用书，可作为报考经济类、管理类硕士研究生应试复习大学数学用书，可作为授课教师的教学参考书，也可作为参加自学考试、专升本考试和成人教育的读者的学习指导书。

本系列辅导丛书，经统一策划，集体讨论，分工执笔，相互审阅书稿的反复推敲而成的。系列辅导教材由刘书田任主编，其中，《微积分学习辅导与解题方法》由冯翠莲、刘书田主笔，由高旅端、王中良审阅书稿；《线性代数学习辅导与解题方法》由王中良主笔，由高旅端、冯翠莲、刘书田审阅书稿；《概率论与数理统计学习辅导与解题方法》由高旅端主笔，由王中良、冯翠莲、刘书田审阅书稿。

在辅导丛书的编写过程中，汲取了同行专家提出的许多宝贵建议；得到了高等教育出版社的有关领导和负责同志的协助和支持，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，望读者指正。

编者

2003年7月

目　　录

第一章 函 数

§1.1 函数概念

1. 函数定义

在理解函数定义时，应掌握以下三个问题：确定函数的定义域；判定两个函数是否相同；正确运用函数记号，会求函数值.

(1) 求函数的定义域

思路 当函数 $y=f(x)$用解析表达式给出，而又没给出自变量的取值范围时，要求函数的定义域，就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

对于表示应用问题的函数关系，其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

(2) 判定两个函数相同

思路 由于对应法则 f 和定义域D 是确定一个函数的要素，因此，当两个函数用不同的解析表达式表示，而其定义域 D 和对应法则f 都相同时，它们是同一函数.

(3) 求函数值

思路 当函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 用解析表达式表示时，若 $x_0\in D$，将表达式中的 x 代以 x_0，便得到该函数在自变量取 x_0时的函数值，记作 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$，或 $y(x_0)$.

2. 确定分段函数的定义域和函数值

思路 由于分段函数是用两个或两个以上的解析表达式表示一个函数，且对于不同的解析表达式，自变量的取值范围又不相

同，因此，分段函数的定义域是自变量 x 各个取值范围之总和. 求函数值 $f(x_0)$ 时，要根据 x_0 所在的取值范围，用 $f(x)$ 相应的表达式来求 $f(x_0)$.

3. 反函数

当函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上是**单调函数时**，它存在**单值的反函数** $\boldsymbol{x=f^{-1}(y)}$. 习惯上，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. 若 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，则

$$y=f(f^{-1}(y)),x=f^{-1}(f(x)).$$

(1) 反函数的图形　在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线；而 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(2) 求反函数的**程序**

首先，由已知函数式 $y=f(x)$ 解出 x，得到关系式 $x=f^{-1}(y)$；

其次，将字母 x 与 y 互换，便得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

(3) 求函数的值域

函数 $y=f(x)$ 存在反函数，其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域就是 $y=f(x)$ 的值域.

4. 复合函数

设 $y=f(u),u\in D_f,u=\varphi(x),x\in D_\varphi$，则

$$y=f(\varphi(x)),x\in D=\{x\mid\varphi(x)\in D_f,x\in D_\varphi\}\neq\varnothing$$

是由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. 其中称 $f(u)$ 为**外层函数**，$\varphi(x)$ 为**内层函数**，u 为**中间变量**.

(1) 在 $f(x),\varphi(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 这三个函数中，若知其二，便可求得其三.

1° 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$，求 $f(\varphi(x))$ 的**思路**　将 $f(x)$ 中的 x 代换以 $\varphi(x)$ 即得 $f(\varphi(x))$；

2° 已知 $f(x)$ 和 $f(\varphi(x))$ 求 $\varphi(x)$ 的**思路**　将已知 $f(x)$ 中的 x 换成 $\varphi(x)$ 得 $f(\varphi(x))$ 的表达式，并令其等于已得出的

$f(\varphi(x))$的表达式,从而求得 $\varphi(x)$. 解出 u(即消去外层函数)即得 $u=\varphi(x)$;

3° 已知 $\varphi(x)$和 $f(\varphi(x))$求 $f(x)$的**思路有二 变量替换法**:令 $u=\varphi(x)$,求得 $x=\varphi^{-1}(u)$,将其代入 $f(\varphi(x))$表示式中的 x 即得 $f(u)$,再将 u 换成 x 得 $f(x)$;**直接表示法**:将 $f(\varphi(x))$的表示式设法表示成 $\varphi(x)$的函数,然后将 $\varphi(x)$换成 x 即得 $f(x)$.

(2) 若 $f(x)$为分段函数,$\varphi(x)$为分段函数或为初等函数,求复合函数 $f(\varphi(x))$或 $\varphi(f(x))$时,可采取先内后外或先外后内的分析法.

例 1 (1) $y=e^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$的定义域是______;

(2) 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $y=f(x^2)+f(e^x)$的定义域是______.

解 (1) 由 $e^{\frac{1}{x}}$知,$x\neq0$;由 $\arcsin\ln\sqrt{1-x}$知,有

$-1\leqslant\ln\sqrt{1-x}\leqslant1$, $e^{-1}\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant e$, $1-e^2\leqslant x\leqslant1-e^{-2}$,

故所求定义域是$[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

(2) 易求得函数 $f(x)$的定义域是$(-1,1)$,由此,有

$$\begin{cases}-1<x^2<1,\\-1<e^x<1,\end{cases}\text{因 } x^2\geqslant0,\ e^x>0,\text{故}\begin{cases}0\leqslant x^2<1,\\0<e^x<1,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-1<x<1,\\-\infty<x<0,\end{cases}\text{所求定义域为}(-1,0).$$

例 2 设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$的定义域是$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$,则 $g(x)=($ $)$.

(A) $\sin x$ (B) $\cos x$ (C) $\tan x$ (D) $\cot x$

解 按题目所给条件,在$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$内必有 $g(x)\geqslant0$,只有 $\sin x$ 满足这个条件.

$\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $\cot x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义;$\cos x$ 在

$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$内非正．选(A)．

例 3 判定下列各对函数是否相同，并说明理由．

(1) $y=\ln(6-x-x^2)$与 $y=\ln(3+x)+\ln(2-x)$；

(2) $y=\arctan(\tan x)$与 $y=x$；

(3) $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}$与 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$．

解 (1) 相同．定义域都是$(-3,2)$，且对应法则相同：按对数性质，有 $\ln(6-x-x^2)=\ln(3+x)+\ln(2-x)$．

(2) 不相同．定义域不同：前者是 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$；而后者是$(-\infty,+\infty)$．

(3) 不相同．定义域都是$[-1,0)\cup(0,1]$；但对应法则不同：$y=\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}$与 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，当 $x\in[-1,0)$时对应不同的值．

例 4 设不恒为零的函数 $f(x)$，对任意实数 x_1,x_2都满足

$$f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，试推证下列各式成立：

(1) $f(0)=1$； (2) $f(x)=f(-x)$； (3) $f(x+\pi)=-f(x)$；

(4) $f(x+2\pi)=f(x)$； (5) $f(2x)=2f^2(x)-1$．

分析 本例应根据已知等式按所需要推证的等式恰当选取 x_1,x_2的值．

证 (1) 在已知等式中，令 $x_1=0,x_2=0$，得

$$2f(0)=2f(0)\cdot f(0)，即 f(0)=1 或 f(0)=0．$$

由 $f(0)=0$ 可推得 $f(x)$恒为零，与题设矛盾，舍去．故有 $f(0)=1$．

(2) 在已知等式中，令 $x_1=-x, x_2=x$，得

$f(-x)+f(x)=2f(0)\cdot f(-x)$，即有 $f(x)=f(-x)$.

(3) 在已知等式中，令 $x_1=x+\pi, x_2=x$，得

$$f(x+\pi)+f(x)=2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

即

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

(4) 在已知等式中，令 $x_1=x+2\pi, x_2=x+\pi$，得

$$f(x+2\pi)+f(x+\pi)=2f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

即 $\quad f(x+2\pi)=-f(x+\pi)$，也即 $f(x+2\pi)=f(x)$.

(5) 在已知等式中，令 $x_1=2x, x_2=0$，得

$f(2x)+f(0)=2f(x)\cdot f(x)$，即 $f(2x)=2f^2(x)-1$.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & -2<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2^x, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求 $f^{-1}(x)$.

解 求分段函数的反函数时，只要分别求出各区间段相对应函数表达式的反函数的表达式及其自变量的取值范围即可.

由 $y=\dfrac{x}{2}, -2<x<1$，得 $x=2y, -1<y<\dfrac{1}{2}$；

由 $y=x^2, 1\leqslant x\leqslant 2$，得 $x=\sqrt{y}, 1\leqslant y\leqslant 4$；

由 $y=2^x, 2<x\leqslant 4$，得 $x=\log_2 y, 4<y\leqslant 16$.

将以上各式中的字母 x 与 y 互换，得所求的反函数

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}2x, & -1<x<\dfrac{1}{2},\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ \log_2 x, & 4<x\leqslant 16.\end{cases}$$

例 6 设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$，则 $f^{-1}(3)=$ ______.