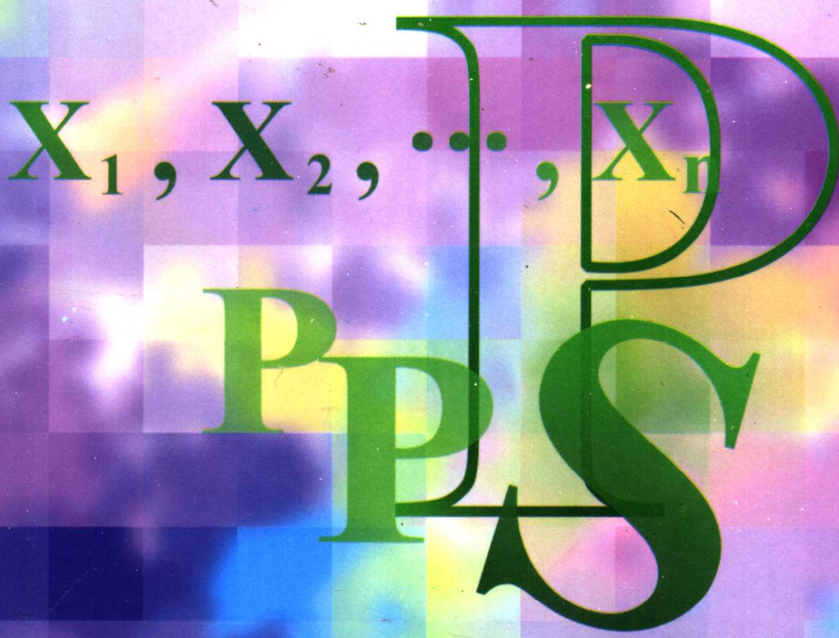
国家工科数学课程教学基地教学参考书

概率统计复习指南



电子科技大学应用数学系 编

电子科技大学出版社
UESTC PUBLISHING HOUSE

国家工科数学课程教学基地教学参考书

概率统计复习指南

电子科技大学应用数学系　编

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计复习指南/电子科技大学应用数学系编．一成都：电子科技大学出版社，2000.7

ISBN 7—81065—449—7

Ⅰ．概… Ⅱ．电… Ⅲ．①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料

Ⅳ．O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 30526 号

内容简介

本书是电子科技大学应用数学系编《概率论与数理统计》的配套教材．内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析及试验设计．各章分基本要求、内容提要、典型例题三部分．书后的附录一是近几年电子科技大学概率统计课程的部分试题及解答；附录二是近五年全国硕士研究生入学考试概率统计试题及解答。

本书适于高校本科生、自考生以及报考研究生者作复习应试之用。

概率统计复习指南

电子科技大学应用数学系　编

出　　版：电子科技大学出版社　（成都建设北路二段四号　邮编 610054）
责任编辑：王仕德
发　　行：新华书店经销
印　　刷：西南冶金地质印刷厂
开　　本：787×1092　1/16　印张　12.125　字数　296　千字
版　　次：2000 年 7 月第一版
印　　次：2003 年 8 月第三次印刷
书　　号：ISBN 7－81065－449－7/O・14
印　　数：7001—11300 册
定　　价：14.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计性规律的一门数学学科，它在自然科学、社会科学和生产实践中有着广泛的应用，它是高等学校一门重要的基础课．多年来的教学实践表明，不少学生在学习这门功课时感到比较困难．我们编写的《概率统计复习指南》，作为电子科技大学应用数学系编写的《概率论与数理统计》的配套教材，就是为了帮助读者深入理解基本概念，掌握基本理论和方法，提高分析问题和解决问题的能力．

附录一是电子科技大学近几年概率统计课程期末考试试题及解答．帮助读者按课程的基本要求检查自己的知识掌握情况．

附录二是近五年全国硕士研究生入学统一考试概率统计试题及解答，为报考研究生的读者提供参考资料．

本书各章的执笔者是唐应辉（第一、二章）；徐全智（第三、四、五章）；朱济生（第六、七、八章）；朱宏（第九、十章）．全书由朱济生主编并负责统稿．

书中不妥以至错误之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

一、基 本 要 求

1. 了解随机试验及其样本空间．

2. 理解随机事件的概念，熟练掌握事件之间的关系与基本运算．

3. 理解事件频率的概念，了解随机现象的统计规律性．

4. 理解古典概率的定义，会进行一般古典概率的计算．

5. 了解概率的公理化定义，熟练掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行概率计算．

6. 理解条件概率的概念，熟练掌握乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，能够灵活应用这些公式进行概率计算．

7. 理解事件独立性的概念，会利用事件的独立性进行概率计算．

二、内 容 提 要

（一）随机事件

1. 随机现象

客观现象大致可分为两大类：确定性现象和非确定性现象．而有的非确定现象，虽然在个别试验中其结果呈现不确定性，但大量重复试验（在相同条件下）其结果又具有某种规律性，称这种非确定性现象为随机现象．而概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的数学学科．

2. 随机试验与随机事件

随机试验是指具有如下特征的试验：(1)试验可以在相同的条件下重复进行；(2)试验前能明确所有可能的结果（不止一个）；(3)在一次试验结束之前，不能准确知道是哪一个结果会出现．随机事件就是指在随机试验中可能发生，也可能不发生的事情．

必然事件：在试验中必然发生的事情，常用 Ω 表示．

不可能事件：在试验中必然不发生的事情，常用符号 ϕ 表示．

把必然事件和不可能事件作为特殊的随机事件，对我们研究问题是有益的．

3. 基本事件与样本空间

在试验 E 中必发生一个且仅发生一个的最简单事件，称为试验 E 的基本事件．在一个试验 E 中，其基本事件满足：(1)在任何一次试验中，这些基本事件中至少有一个发生；(2)在任何一次试验中，这些基本事件中又只有一个发生．

由若干个基本事件复合而成的事件，称为复合事件．

对试验 E 中的每一个基本事件，用一个只包含一个元素 ω 的单元素集合 $\{\omega\}$ 表示，称这个元素 ω 为一个样本点．由全体样本点构成的集合，称为试验 E 的样本空间，常用 Ω 表示．

因此，试验 E 的每一个基本事件就一一对应样本空间 Ω 的一个样本点，这样，我们就把试验 E 的事件与样本空间 Ω 的某个子集联系起来了．

4. 事件的关系与运算

①包含关系．如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于 B，或称事件 B 包含 A. 记为 $A\subset B$.

显然，对任意一个事件 A，都有 $\phi\subset A\subset\Omega$.

若 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

②和事件(也称事件的并). 在事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，这本身也是一个事件，这事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，或称为事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$. 与此类似，在 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 在可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生，叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

③积事件(也称事件的交). 事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件叫做事件 A 与事件 B 的积事件，也称事件 A 与事件 B 的交，记为 $A\cap B$，或 AB. 与此类似，n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件，叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生的事件，叫做 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

④互不相容事件．如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或称事件 A 与事件 B 互斥．

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若其中任意两个事件都互不相容则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容．

显然，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则容易推知其中任意 s 个($2\leqslant s\leqslant n$)事件的交 $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s}=\phi$，所以，若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两不相容，也称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容．

而可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容是指事件列中的任意有限个事件互不相容．

容易推知，同一个试验中的所有基本事件是互不相容的．

⑤对立事件．如果事件 A 与事件 B 中必然有一个发生，但又不能同时发生，即

$$A\cup B=\Omega,\text{且 } AB=\phi$$

则称 A 与 B 互为对立事件，或称 A 与 B 互为逆事件．一般地，事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$，因此 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\phi$.

⑥差事件．事件 A 发生而事件 B 不发生的这一事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$.

由于试验 E 的事件与样本空间 Ω 的某个子集存在对应关系，所以事件的关系和运算类似集合论中集合的关系和运算，如表 1-1 所示．

表 1-1

记号	集合论	概率论
Ω	空间，全集	样本空间，必然事件
ϕ	空集	不可能事件
ω	元素	基本事件
A	Ω 的子集	事件
$\overline{A}$	A 的余集	A 的对立事件
$A\subset B$	A 是 B 的子集	A 发生，则 B 必发生
$A=B$	A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A\cup B$	A 与 B 的和集	事件 A 与 B 至少有一个发生
$A\cap B$	A 与 B 的交集	事件 A 与 B 同时发生
$A-B$	A 与 B 的差集	事件 A 发生而 B 不发生
$A\cap B=\phi$	A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

在进行事件运算时，常用到下述运算规律：

①交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

②结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

③分配律：$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)(A\cup C)$，$A\cap(B-C)=AB-AC$；

④重叠律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$；

⑤吸收律：如果 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$，作为特殊情况，有 $A\cup\Omega=\Omega$，$A\cap\Omega=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$；

⑥差化积：$A-B=A\overline{B}$；

⑦德・摩根公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，而且 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$；$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i$.

注意，在事件的运算中，运算的顺序规定如下：第一“逆”，第二“交”，第三“并”或“差”，但如有括号，则先执行括号里的运算.

（二）概率

1. 直观意义：对某试验 E 的每一个随机事件 A，都有一个确定的实数 $p=P(A)$ 与之对应，用它来表示相应事件 A 出现的可能性大小，称为事件 A 的概率.

事件 A 的概率 $P(A)$ 是对事件 A 发生的可能性大小的客观量度.

2. 概率的统计定义：对于一个试验 E，在相同的条件下重复做了 n 次，事件 A 出现了 m 次，则称 $f_n(A)=\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

一个事件 A 发生的频率，不仅依赖于试验的总次数，而且依赖于那一分组试验，但是，当试验总次数 n 充分大时，$\frac{m}{n}$ 稳定在某个确定的值 p 附近，这一性质我们称为频率的稳定

性，而这个确定的值 p 称为事件 A 发生的概率.

3. 古典概率的定义：设 E 为一个古典概率模型的试验，A 为其中任一个基本事件，则由

$$P(A)=\frac{A\text{ 所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

确定的数值称为事件 A 发生的古典概率.

4. 几何概率的定义：设样本点(基本事件)的全体(即样本空间)是一个有限区域 Ω(一维是长度有限；二维是面积有限；三维是体积有限；等等)，如果样本点落在 Ω 内的任何区域 G 中的概率与区域 G 的大小(一维是长度；二维是面积；三维是体积等)成正比，则在区域 Ω 内任取一点，它落在区域 G 内的概率 p 等于

$$p=\frac{G\text{ 的大小}}{\Omega\text{ 的大小}}$$

该概率就称为几何概率.

5. 概率的公理化定义：设函数 $P(A)$ 的定义域是试验 E 的所有事件组成的集合，且满足以下三条：

(1)(非负性)对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)(规范性)对样本空间 Ω，$P(\Omega)=1$；

(3)(可列可加性)对 E 的互不相容的可列多个事件 $A_1,A_2,\cdots A_n,\cdots$，有 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

(三)概率的性质及四个重要的公式

1. 概率具有的基本性质

(1) $P(\phi)=0$；

(2)(有限可加性)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是试验 E 的 n 个互不相容事件，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$；

(3)对任何事件 A，$P(A)+P(\overline{A})=1$；

(4)(单调性)设事件 A 和 B 满足 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

2. 概率的加法公式

对任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

当 A 与 B 互不相容，即 $AB=\phi$ 时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

推广到任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的情形，有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2A_3\cdots A_n)$$

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时，即有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

即为概率的有限可加性.

3. 条件概率的定义与性质. 乘法公式

若 $P(B)>0$,则概率

$$\frac{P(AB)}{P(B)}$$

称为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率,记为 $P(A|B)$,即

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\qquad P(B)>0$$

在 $P(A)>0$ 条件下,同理可定义在 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\qquad P(A)>0$$

由于条件概率是一个事件发生的概率,所以它具有事件概率的所有性质,例如:

(1)对任何事件 A,$0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$;

(2)$P(\Omega|B)=1$,$P(\phi|B)=0$

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容,则

$$P[(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\,|B]=P[\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i|B)]=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i|B);$$

(4)$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1$;

(5)$P[(A_1\cup A_2)\,|B]=P[(A_1|B)\cup(A_2|B)]=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$;

乘法公式:

设 A 和 B 为试验 E 的两个事件,若 $P(B)>0$,则

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$$

同理,若 $P(A)>0$,则

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

推广到任意有限个的情形:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是试验 E 的 n 个事件,若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

4. 全概率公式

设试验 E 的样本空间为 Ω,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 E 的一组事件,若满足

(1)$B_i\cap B_j=\phi$,$i\neq j$,(i、$j=1\sim n$),即 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 互不相容;

(2)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个有限划分,也称为有限剖分.

注意,一个样本空间 Ω 的有限划分不惟一,例如 A 与 $\overline{A}$ 是 Ω 的一个有限划分;只有有限个基本事件的试验 E 的全体基本事件是样本空间 Ω 的一个有限划分. 但是,若 Ω 的有限划分确定后,做一次试验 E,事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中有且只有一个发生.

另外,上述的有限划分可以推广到事件组是可列无穷多个事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$的情形,但此时称为 Ω 的可列无穷划分,而不是有限划分.

全概率公式:设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个有限划分,且 $P(B_i)>0$,$i=1,2,\cdots,n$,而 A 是试验 E 中的任一个事件,则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

当 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

5. 贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 Ω，A 是 E 中任一个事件，$P(A)>0$，而 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个有限划分，且 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)\cdot P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P(A|B_i)},\quad j=1\sim n$$

当 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是 Ω 的一个划分时，且 $P(B_i)>0,\quad i=1,2,\cdots$，则

$$P(B_j|A)=\frac{P(B_j)\cdot P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)\cdot P(A|B_i)},\quad j=1,2,\cdots$$

6. 事件的独立性与性质

设事件 A 和 B 是试验 E 的两个事件，若

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

则称 A 与 B 相互独立.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是试验 E 的 n 个事件，若其中任意两个事件都独立，即

$$P(A_iA_j)=P(A_i)\cdot P(A_j),\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

又设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为试验 E 的 n 个事件，若对任意的 $s(1<s\leqslant n)$个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s}$，即 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_s})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_s})$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

注意，此处 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n>2)$的相互独立与其两两独立是不同的，由 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的相互独立性，可以推出它们两两独立，但是，由两两独立不能推出相互独立. 这一点与 n 个事件的互不相容和两两互不相容有区别.

事件的独立性具有下列重要性质：

设事件 A 与 B 相互独立，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则

(1)$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$；

(2)A 与 $\overline{B}$；$\overline{A}$ 与 B；$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也分别相互独立；

(3)将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意 s 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s}(s>2;1<i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n)$换成它们的对立事件，所得的 n 个事件$\underbrace{\cdots,\overline{A}_{i_1},\overline{A}_{i_2},\cdots,\overline{A}_{i_s},\cdots}_{n\text{个}}$也相互独立.

最后，作为本章基本内容的结束，我们指出，事件的互不相容性在求和事件的概率时很重要，而事件的相互独立性在求积事件的概率时也很重要，而且要灵活运用上述四个重要的公式及概率的有关性质.

三、典型例题

例 1 设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 分别表示下列各事件：(1) A,B,C 中至少有一个发生；(2) A,B,C 中恰有一个发生；(3) A,B,C 中不多于一个发生．

解 (1) $A\cup B\cup C$；(2) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；(3) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

例 2 在十个数字 1,2,…,10 中任取一个数，以 $A=\{2,3,4\}$ 表示取得 2，或 3，或 4；$B=\{3,4,5\}$ 表示取得 3，或 4，或 5；$C=\{5,6,7\}$ 表示取得 5，或 6，或 7. 问下列各事件分别表示什么：(1) $\bar{A}B$；(2) $\bar{A}\cup B$；(3) $\overline{AB}$；(4) $\overline{A\,\overline{BC}}$；(5) $\overline{A(B\cup C)}$.

解 (1) $\bar{A}B=\{1,5,6,7,8,9,10\}\cap\{3,4,5\}=\{5\}$

(2) $\bar{A}\cup B=\{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

(3) $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}=\{1,5,6,7,8,9,10\}\cup\{1,2,6,7,8,9,10\}$

$=\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$

(4) $\overline{A\,\overline{BC}}=\overline{A(\bar{B}\cup\bar{C})}=\overline{A\bar{B}\cup A\bar{C}}=\overline{A\bar{B}}\cap\overline{A\bar{C}}$

$=\{1,5,6,7,8,9,10\}$

(5) $\overline{A(B\cup C)}=\overline{\{3,4\}}=\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$

例 3 化简 $(A\cup B)(A\cup\bar{B})$.

解
$$
\begin{aligned}
(A\cup B)(A\cup\bar{B}) &= AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}\\
&= A\cup A\bar{B}\cup BA\cup\phi = A\cup A\bar{B}\cup BA\\
&= A
\end{aligned}
$$

例 4 证明 $(A-AB)\cup B=A\cup B$

证明
$$
\begin{aligned}
(A-AB)\cup B &= A(\overline{AB})\cup B\\
&= A(\bar{A}\cup\bar{B})\cup B\\
&= A\bar{A}\cup A\bar{B}\cup B\\
&= A\bar{B}\cup B\\
&= A\bar{B}\cup(AB\cup B)\\
&= (A\bar{B}\cup AB)\cup B\\
&= A\cup B
\end{aligned}
$$

例 5 试问：$(A\cup B)-A=B$，成立吗？

解 $(A\cup B)-A=(A\cup B)\bar{A}=A\bar{A}\cup B\bar{A}=\bar{A}B$

因为 $\bar{A}\neq\Omega$（一般），所以 $(A\cup B)-A\neq B$.

例 6 抛掷两颗骰子，观察向上一面点数的情况，试构造样本空间．

解 用 (i,j) 表示：第一颗骰子的点数为 i，而第二颗骰子的点数为 j，则样本空间 Ω，用矩阵表示为

$$
\begin{bmatrix}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,6)\\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & (2,6)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
(6,1) & (6,2) & (6,3) & \cdots & (6,6)
\end{bmatrix}
$$

其中共有 36 个样本点．

例 7 考查例 6 的试验，但着眼于两点数的和，试构造其样本空间.

解 由于在该例中关心的试验结果是两颗骰子出现点数之和，故样本空间 Ω 为：

$$\Omega=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

例 8 盒中有 5 个球，其中 2 个红球、3 个白球，无放回地从中任取二次，每次取一个球，求：

(1)所取二球均为白球的概率 p_1?

(2)所取二球中至少有一个为白球的概率 p_2?

解(一) 无放回地取二次球，等价于一次任取两球，因此共有取法 $n=C_5^2=10$

(1)二球均为白球，相当于从 3 只白球中任取二只的组合数，故 $m=C_3^2=3$，则

$$p_1=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$$

(2)因为{至少一个白球}={一白一红}+{二白}，因此

$$p_2=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{9}{10}$$

由于{至少一白}与{二只均红}互为对立事件，所以

$$p_2=1-p\{\text{二只均红}\}=1-\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{9}{10}$$

解(二) 从 5 只球中取二次，每次取一只不放回．第一次有 5 只可取，第二次有 4 只可取，共有取法

$$n=P_5^2=5\times4=20$$

(1)二球均为白球，第一次有 3 只可取，第二次有 2 只可取，故

$$m=P_3^2=3\times2=6$$

则

$$p_1=\frac{m}{n}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

(2){至少一白球}与{二只均为红球}互为对立事件，故

$$\begin{aligned}p_2&=1-P\{\text{二只均为红球}\}\\&=1-\frac{P_2^1\cdot P_1^1}{20}=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

解(三) 设 A_i 表示第 i 次取出白球，$i=1,2$，则

(1)$p_1=P\{A_1A_2\}=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$

(2)$p_2=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)$

$=1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{10}$

例 9 掷六颗均匀的骰子，求每颗骰子呈现不同点数的概率.

解 此题要一一列出样本空间的样本点是很麻烦的，但是，为了求概率可不需要列出样本点，只要知道样本点的总数 n 即可．由排列组合知识知 $n=6^6$.

而所求概率的事件 A:"每颗骰子呈现不同的点数"所含样本点的个数 $m=6!$，于是，所求概率为

$$p=\frac{6!}{6^6}=\frac{5!}{6^5}$$

例 10 某年级五个小班进行班与班之间的篮球比赛，比赛采用单循环制（即两个不同班赛一场）. 求

(1)一共进行多少场比赛?

(2)前三场中甲班出场两次的概率?

解 (1)由于进行比赛的两个班没有顺序关系，所以这是组合问题，因此按单循环制共进行比赛的场数为

$$C_5^2=10 \quad (场)$$

(2)由于前三场比赛可以是任意两个班比赛构成前三场，所以基本事件总数为 $C_{10}^3=120$ 种. 而在前三场比赛中，甲班出场两次的组合种数共有 $C_4^2\cdot C_6^1=36$ 种，其中 C_4^2 表示甲所进行的四场比赛中的任意两场在前三场中出现的可能种数，C_6^1 表示在不含有甲班的六场比赛中可以是任意一场处于前三场. 于是前三场比赛中甲班出现两次的概率为

$$p=\frac{C_4^2\cdot C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$$

例 11 从 1,2,3,4,5 这五个数字中有放回地抽取三个数，求所得三数之和为 8 的概率.

解 这是古典概型问题，基本事件总数 $n=5^3$，而"三数之和为 8"有下列四种情形:

(1)1,2,5:共 6 种;

(2)1,3,4:共 6 种;

(3)2,2,4:共 3 种;

(4)2,3,3:共 3 种.

因此所求的概率为

$$p=\frac{6+6+3+3}{5^3}=\frac{8}{125}$$

例 12 一部五卷的选集，按任意顺序放到书架上，试求下列事件的概率:(1)第一卷及第五卷分别在两端;(2)第一卷及第五卷都不在两端.

解 本例要考虑 5 本书逐本放到书架上去的顺序，因此采用无重复的排列方法求解. 5 本书按任意顺序放到书架上的排法有 5! 种，因此基本事件总数 $n=5!$

(1)第一卷及第五卷分别在两端，那么第一卷及第五卷分别在两端的排法有 2! 种，而第二、第三，第四卷在中间的排法有 3! 种，配合起来的排法共有 $2!\times 3!$，从而

$$p_1=\frac{2!\times 3!}{5!}=\frac{1}{10}$$

(2)若第一卷与第五卷都不在两端，则在两端的只可能是第二、三、四卷中的 2 本，有 P_3^2 种排法，余下的 3 本在中间，有 3! 种排法，配合起来共有 $P_3^2\cdot 3!$ 种排法，从而

$$p_2=\frac{P_3^2\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$$

例 13 设袋中有 a 只黑球、b 只白球.

(1)采用不放回抽取的方式从中摸出 n 只球，求其中恰有 k 只黑球的概率;

(2)采用放回抽样方式从中摸球 n 次，求其中恰有 k 次摸得黑球的概率.

解 (1)这种情况下关心的是摸出的 n 只球中含有黑球的个数而与摸球的顺序无关，且采用不放回抽样方式摸球，因此采用无重复的组合方法求解.

从 $a+b$ 只球中摸出 n 只球的组合种数为 C_{a+b}^n，即基本事件总数为 C_{a+b}^n. 而摸出的 n 只球中恰有 k 只黑球，就是从 a 只黑球中摸出 k 只，从 b 只白球中摸出 $n-k$ 只，其组合种数为 $C_a^k \cdot C_b^{n-k}$，从而所球的概率为

$$p_1 = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \max(n-b,0) \leqslant k \leqslant \min(n,a)$$

(2)这种情况下就要考虑球的顺序，是哪 k 次摸得黑球. 由于采用放回抽样方式，所以基本事件总数为 $(a+b)^n$. 而 n 次中恰有 k 次摸到黑球有 C_n^k 种选法，每一次摸球时黑球在 a 个球中摸，白球在 b 个球中摸，因此 n 次中恰有 k 次摸得黑球的排列种数为 $C_n^k a^k b^{n-k}$，从而所求的概率为

$$p_2 = \frac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}$$

例 14 设有 r 个人($r \leqslant 365$)，并设每人的生日在一年 365 天中的每一天的可能性是均等的. 问:此 r 个人有不同生日的概率是多少?

解 r 个人都以等可能的机会在 365 天中的任意一天出生，故基本事件总数为 365^r，而“r 个人有不同生日”这一事件包含的基本事件数为

$$P_{365}^r = 365 \times 364 \times \cdots \times (365 - r + 1)$$

故所求概率为

$$p = \frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365 - r + 1)}{365^r}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{r-1}{365}\right)$$

当 r 较小时，$p \approx 1 - \frac{1}{365} - \frac{2}{365} - \cdots - \frac{r-1}{365} = 1 - \frac{r(r-1)}{730}$，如 $r=2$ 时，得“两人有不同生日”的概率为

$$p \approx 1 - \frac{2}{730} = 0.997$$

例 15 设两人相约于下午 1 时到 2 时之间在某地会面，先到者等候另一人半小时，过时就离去，求这两人能会面的概率.

解 与会面问题有关的变量是两人到达的时刻. 用 x, y 分别表示两人到达的时刻，因为两人都在下午 1 时到 2 时之间到达，故 x 和 y 的变化范围为: $1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2$，即样本空间是边长为 1 的正方形 Ω.

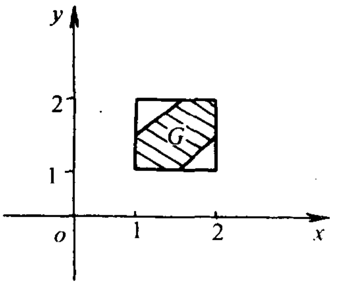


图 1.1

又因两人到达时刻相差不超过半小时才能会面，所以会面的充要条件为

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{2}$$

即当样本点 (x, y) 落在两直线

$$y = x + \frac{1}{2}, \qquad y = x - \frac{1}{2}$$

之间，并在正方形 Ω 内的阴影部分时，两人才能会面，于是，两人能会面的概率为

$$p=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}$$

例 16 设线段 AC 的长为 $2l$，B 是 AC 的中点，今在 AB 上任取一点 D、在 BC 上任取一点 E，以 D，E 为分点，把 AC 分成 AD，DE，EC 三线段，求以 AD，DE，EC 为边能构成三角形的概率．

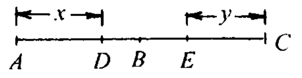


图 1.2

解 以 x，y 分别表示 AD，EC 的长，则 DE 的长为 $2l-x-y$. x 和 y 的变化范围为

$$0<x<l,\qquad 0<y<l$$

即样本空间为边长是 l 的正方形 Ω. 以 AD，DE，EC 为边能构成三角的充要条件是

$$AD+EC>DE,\qquad DE+EC>AD,\qquad AD+DE>EC$$

即

$$x+y>l,\qquad 0<x<l,\qquad 0<y<l$$

当样本点 (x,y) 落在由三条直线

$$x+y=l,\qquad x=l,\qquad y=l$$

所围成的三角形区域 G 内时，以 AD，DE，EC 为边就能构成三角形，从而所求的概率为

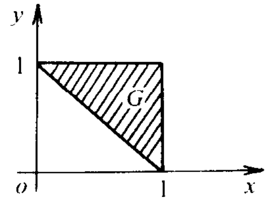


图 1.3

$$p=\frac{G\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\frac{l^2}{2}}{l^2}=\frac{1}{2}$$

例 17 甲、乙、丙三人各自独立地向同一目标射击一次，三人的命中率分别为 0.5，0.6，0.7，求目标被击中的概率．

解 设 A 表示"目标被击中"这一事件，B_1，B_2，B_3 分别表示甲、乙、丙各自击中目标，则

$$A=B_1\cup B_2\cup B_3$$

为求 $P(A)$，先求 $P(\overline{A})$. 而

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(\overline{\bigcup_{i=1}^{3}B_i})=P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)\\&=P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{B}_3)\\&=(1-0.5)(1-0.6)(1-0.7)\\&=0.06\end{aligned}$$

故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=0.94$$

例 18 将两颗均匀的骰子同时抛掷一次，已知两个骰子的点数之和是奇数，求两个骰子的点数之和小于 8 的概率．

解 设 $A=\{$点数之和是奇数$\}$，$B=\{$点数之和小于 8$\}$，则所求概率为条件概率 $P(B|A)$. 而由古典概率，有

$$P(A)=\frac{18}{36},\qquad P(AB)=\frac{12}{36}$$