现代固体力学理论及应用

许金泉　丁浩江　著

浙江大学出版社

现代固体力学理论及应用

许金泉　丁皓江　著

浙江大学出版社

内容简介

本书以参数分析和性能评价为主线，详细地介绍了固体力学的基本理论，及固体力学在新材料领域的应用与发展，着重介绍了一些新的力学现象的分析与评价的基本思路。本书共分七章：第一章绪论介绍固体力学的基本方法及发展趋势；第二章及第三章介绍弹性和塑性理论及对应的强度评价方法；第四章介绍断裂力学理论及其在工程中的应用；第五章、第六章分别介绍新兴的界面力学及复合材料力学的理论，并介绍一些关于新材料强度评价的最新成果；第七章简单介绍粘弹性的应力分析方法。

本书可作为力学类、机械类、土木类、材料类专业的研究生有关课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

现代固体力学理论及应用

许金泉　丁皓江　著

责任编辑　陈子饶

*　　*　　*

浙江大学出版社出版

浙江大学出版社电脑排版中心排版

（杭州玉古路20号　邮政编码310027）

德清第二印刷厂印刷

浙江省新华书店发行

*　　*　　*

开本：787×1092　1/16　印张：15.5　字数：397千

1997年5月第1版　1997年5月第1次印刷

印数：0001－1000

ISBN 7-308-01902-0/O・209　　定价：15.50元

前　　言

计算机的普及和发展，强烈地冲击着像固体力学这样的“古老”学科。不仅其本身的研究内容要求有新的“血液”，其教学方式也必然要发生相应的变化。从应力分析的角度来看，以往颇感棘手的问题，现在有可能借助于不断改善的数值分析软件包和界面程序，方便地求得数值解。而这些软件包和界面程序，往往是一个“黑匣子”，给一个输入就能得到一个分析结果，并不需要太多的力学知识。因此，今后应力分析方面的研究重点，无疑将向数值计算方法的完善与发展方向移动，教学中也必将更多地介绍一些通用计算程序的使用方法。此外，如果将固体力学的主要内容，仅局限于应力分析的话，显然也不适应发展的需要。由于各种高性能的新型材料，如复合材料等，不断地被开发应用，其实用化的重大障碍往往是没有相应的强度评价方法。特别是现在新型材料已跨过了只作为功能材料的时代，广泛地被用作承载构件，更何况一些新型材料，本来就是以高强度为目的而开发的。在这样的工程背景下，新材料的强度评价方法，无疑地将是今后固体力学的研究重点之一。然而，新型材料中往往存在着许多新的力学现象，要建立新材料的强度评价方法，首先必须以理论分析和实验的手段，阐明新的力学现象的本质。从这个角度来讲，理论分析仍然十分重要并将继续发展下去。但理论分析显然只在阐明新的力学现象的本质时才是必不可少的，强度评价方法一经确立，则完全可用数值计算的方法，来计算评价所需要的力学参数。因此，理论分析与数值分析之间的关系，是相互促进，相互完善的关系。正如钱学森(1995 年)所说，力学“是用理论，通过具体数字计算解答一个个实际问题”，而“今日力学是一门用计算机计算去回答一切宏观的实际科学技术问题，计算方法非常重要，另一个辅助手段是巧妙设计实验”。

本书是作者近几年来讲授“固体力学基础”研究生课的基础上加工整理而成的。在内容安排上，力求能对读者处理新的力学现象有所启迪。因此，从形式到内容，都作了一些改革的尝试，如有不妥之处，敬请广大读者批评指正。

本书可作为力学类、机械类、土木类、材料类专业的研究生教材，也可作为力学专业本科高年级学生的参考书。作者还特别希望，本书能为有关工程技术人员提供一些有价值的参考。

在全书的编写过程中，得到了浙江大学固体力学研究所姜菊生同志的支持，硕士研究生许为群、王正月等也参加了部分图表的绘制工作，在此一并表示感谢。

许金泉　丁皓江

1996 年 9 月于求是园

目　　录

第一章 绪 论

§1.1 固体力学的研究对象[1]~[3]

固体材料是最广泛应用的材料。在各类器械中，作为承载构件的材料，必定是固体材料。因此，研究固体材料在各种形式的载荷作用下的力学响应及性能，是各类器械的设计、制作乃至应用的基础。固体力学的内容，可以说是包罗万象，材料力学、弹性力学、塑性力学等一切以研究固体材料的力学响应及性能评价为主要内容的学科，都可认为是固体力学的分支。我们认为，固体力学的内容，实质上可以分成两个方面，一是求取材料的力学响应的方法，即应力分析技术(最终求得的参数，不一定局限于应力)；二是性能评价(强度评价)的方法。这两个方面既相对独立又相互联系，前者是后者的基础，后者是前者的目的，根据后者的需要，前者必须提供相应形式的参数，如应力、应变、应力强度因子等。随着计算机的迅速发展和普及，高性能的数值计算软件不断出现，并不断地得到发展和完善，固体力学理论研究的重点，有逐渐向性能评价方面移动的趋势。然而，由于应力分析是性能评价的基础，所以有关应力分析的知识，仍然是十分重要和不可缺少的，并且要完善和发展现有的数值分析软件，也离不开这方面的扎实基础。

材料的性能评价又可分成两个方面，一是确立或选择适当的评价参数，即确立以何种形式的参数来描述具体问题的力学响应的本质或主要特征；二是确定与该评价参数相对应的材料极限值(强度极限)。对于一些较简单的问题，可以说基本上已有现成的性能评价方法，因而一般并不涉及强度评价方法是如何建立的，而只是将它视作既成事实。但是，由于工程实际中不断出现新的力学问题，特别是新材料不断地被开发和应用，这些传统的强度评价方法，往往无法作出正确的评价，而必须建立新的强度评价方法，来满足工程实际的需要。因此，在新材料的性能分析及评价方面，评价准则是要靠我们力学工作者去建立的，而不是已知的。正因为如此，有关强度评价方面的研究，将在固体力学中占有越来越重要的地位。

§1.2 材料的失效形式[2]

当材料的力学响应——应力、应力强度因子等达到某个极限值时，该材料就不能满足正常的工作要求，甚至产生断裂等事故，此时称为材料开始失效(Failure)。显然，失效开始条件是强度评价最基本的依据。材料的失效形式，根据具体的使用情况和设计要求，是多种多样的，但主要地可分为以下三种形式：

一、断裂

在载荷或残余应力的作用下，材料突然或较快地分离成 2 个或 2 个以上的部分，称为断裂(fracture)。断裂是机械构件中最为常见的失效形式，根据断裂前变形量的大小，又可分为脆性断裂(brittle fracture)、颈缩断裂(rupture)和延性断裂(ductile fracture)三种情况：脆性断裂指断裂发生前基本上没有明显的塑性变形的情况；颈缩断裂则指断裂前有很大的塑性变形，以至于因塑性流动而使断裂时断裂截面的面积接近于零的情况。脆性断裂和颈缩断裂是断裂的两种

极限情况。位于两者之间的断裂，即断裂发生前有明显的塑性变形的情况，称为延性断裂。

二、过大的变形

构件产生过大的变形，以至不能满足正常的工作要求，也是材料失效的常见形式。这类失效可以是弹性变形或塑性变形引发的，弹性变形过大时通常称为刚度不足，塑性变形过大时称为塑性流动。

三、失稳

受压构件在压力达到某个临界值时，会突然产生较大的弯曲，使构件偏离正常的工作位置，或引起强裂振动，或导致构件断裂，这类失效形式称为失稳。

必须指出，后面两种失效形式，在进行材料的性能评价时，必须考虑构件的几何形状与约束条件，评价参数的极限值并不是一个材料常数，而是与外部条件有关的；对于断裂，则评价参数的极限值一般为一材料常数，与受载形式或几何形状无关。

§1.3 爱因斯坦记号法

为了今后叙述上的方便，我们先简单介绍一下爱因斯坦记号法，亦称张量表示法。

一、关于坐标系的基本规定

记三个正交的坐标轴为(x_1, x_2, x_3)，以(u_1, u_2, u_3)表示位移分量，以$\sigma_{11}, \sigma_{22}\cdots\cdots$等表示应力分量。采用这样的规定后，我们就可方便地用u_j来表示j方向的位移，以σ_{ij}来表示对应的应力。这里j与ij称为下标变量，显然通过下标变量的变化，可以用简单、统一的形式来表示对应的物理量。另外，必须指出的是，在固体力学中采用爱因斯坦记号法时的坐标系，一般是笛卡尔直角坐标系，因此，(u_1, u_2, u_3)即表示(u, v, w)，σ_{11}即表示σ_x，ε_{11}即表示ε_x，等等。

二、总和规则

在许多公式中，我们常常会遇到同类物理量相加的形式，为了使表达式更为简洁，规定在同一项中重复出现两次的下标变量，必须在下标变量的定义域内重复取和，例如：

$$b_i = a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots\cdots \tag{1.1}$$

对于只出现一次的下标，通常称为自由下标，则不必取和。当出现两对重复出现两次的下标时，上述规则仍然有效，例如：

$$a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{1.2}$$

即对两种下标均取和。显然，重复出现的下标变量的符号，可以是任意的，即

$$a_{ij}x_j \equiv a_{ik}x_k \tag{1.3}$$

对于重复出现3次以上的下标，一般不能应用上述规则，例如$\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_ic_i$并不能用$a_ib_ic_i$来表示。

三、偏导数表记法

关于坐标的偏导数，可用下标“,”来表示，而对应的坐标则用其对应的下标变量，例如：

$$r_{i,j} = \frac{\partial r_i}{\partial x_j} \quad , \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j}, \cdots \tag{1.4}$$

“,”后表示偏导对象的下标变量，仍然服从上述总和规则，例如：

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \tag{1.5a}$$

因为j出现了两次，故上式即表示：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\cdots+b_1=0\\ \sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}+\cdots+b_2=0\end{aligned}\right\}\tag{1.5b}$$

在固体力学中，一般掌握以上介绍的标记法就够用了，如果要进一步了解这方面的知识，可参阅有关张量分析方面的书籍[4]。

§1.4 固体力学的基本方法

如§1.1节所述，固体力学的内容可分为应力分析与强度评价两个方面，每个方面都有其特有的分析、解决问题的思路，即所谓的基本方法。

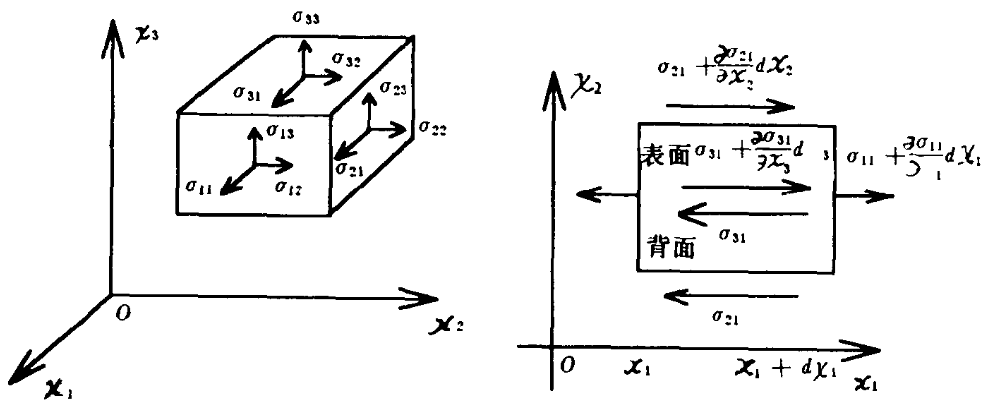
§1.4.1 应力分析的基本方法

应力分析的基本思路是通过3组基本方程，求取满足边界条件的具体问题的解。所谓基本方程，是指以下3组方程。

一、运动方程

这是一组考虑应力单元体的受力平衡条件而得到的方程，因此也称为力学方程或平衡方程。考虑图1.1所示的应力单元体在 x_1 方向的平衡条件，得

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1dx_2dx_3+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_1dx_2dx_3+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_1dx_2dx_3 + b_1dx_1dx_2dx_3=\rho\ddot{u}_1dx_1dx_2dx_3\tag{1.6}$$



(a) 3维应力单元体及应力分量　　(b) x 方向的应力成分

图1.1　应力单元体的受力分析

这里 b_i 为 i 方向的体积力，ρ 为密度，化简后得

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}+b_1=\rho\ddot{u}_1\tag{1.7}$$

同理可得 x_2、x_3 方向的平衡方程，采用爱因斯坦记号法，可将三个方向的平衡方程统一地描述成如下形式：

$$\sigma_{ij,j}+b_i=\rho\ddot{u}_i\tag{1.8}$$

再考虑力矩的平衡条件，得

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\tag{1.9}$$

这说明应力张量是对称的。换言之，对称的应力张量自动满足力矩平衡方程，故平衡方程一般指(1.8)式。另外，$\ddot{u}_i$ 为 i 方向的运动加速度：当其不为零时，称为动力问题；当其为零时，则不管

单元体的速度是否为零，都称为静力问题。本组基本方程的方程数，3 维问题时为 3，二维问题时为 2。

二、应变位移关系

这是一组考虑物体变形前后的位置关系的方程，因而也称为几何方程。如图 1.2 所示，设变形前 P 点的位置为 x_i，Q 点为 $x_i+\Delta x_i$，变形后的位移函数为 $u_i(x_j)$，则变形后 P^* 的位置为 x_i+u_i，Q^* 点的位置为 $(x_i+\Delta x_i)+u_i(x_j+\Delta x_j)=x_i+\Delta x_i+u_i+\Delta u_i$，故变形前后线段 PQ 的长度为

$$|PQ|^2=\Delta x_i\Delta x_i,\quad |P^*Q^*|^2=(\Delta x_i+\Delta u_i)(\Delta x_i+\Delta u_i) \tag{1.10}$$

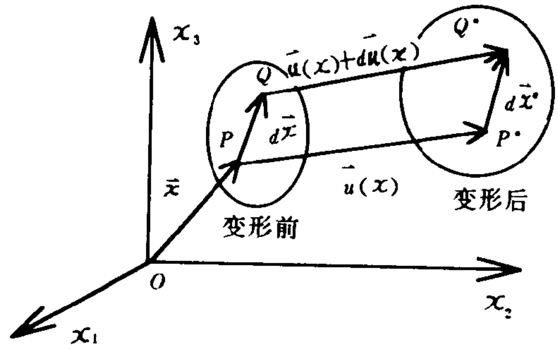


图 1.2　物体中线段的变形

故线段的长度的平方差为：

$$|P^*Q^*|^2-|PQ|^2=2\Delta x_i\Delta u_i+\Delta u_i\Delta u_i \tag{1.11}$$

根据全微分的概念，有

$$\Delta u_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Delta x_j \tag{1.12}$$

代入(1.11)式得

$$\begin{aligned}|P^*Q^*|^2-|PQ|^2&=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\Delta x_i\Delta x_j\\&=(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\Delta x_i\Delta x_j\end{aligned} \tag{1.13}$$

定义：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \tag{1.14}$$

显然 ε_{ij} 表示了线段 PQ 的变形程度，称为格林应变(Green strain)。当 u_i 相对于物体的几何尺寸足够小时(即小变形条件)，略去高阶微量，由(1.13)式和(1.14)式可得

$$2|PQ|\cdot\Delta|PQ|=2\varepsilon_{ij}\Delta x_i\Delta x_j=2\cdot\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\Delta x_i\Delta x_j \tag{1.15}$$

即 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$，称为柯西应变或应变。显然 $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$，即应变张量也是对称的。由(1.15)式可知，这里的应变概念与材料力学中的应变概念是一致的，通过命坐标增量 Δx_1、Δx_2、Δx_3 中的一个或两个为零，可得

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{11}=\varepsilon_x,\varepsilon_{22}=\varepsilon_y,\varepsilon_{33}=\varepsilon_z\\&\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\gamma_{xy},\varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\gamma_{yz},\varepsilon_{13}=\frac{1}{2}\gamma_{xz}\end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

式中，ε_x、ε_y、ε_z 和 γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{xz} 为材料力学中的应变，特别地，γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{xz} 称为工程剪应变，是应变张量中的剪应变分量的两倍。

特别指出，本书只限定于讨论小变形问题，即应变为柯西应变：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1.17}$$

对于大变形问题，应采用格林应变或真应变的定义。

本组基本方程的方程数：3 维问题时为 6；2 维问题时为 3。

三、应力应变关系

这是一组关于物体的变形和应力状态之间的关系的方程，反映了材料的物性，故也称为物

理方程，或本构关系。与前面的两组基本方程不同，本构关系不仅受温度等环境的影响，而且也与材料的承载能力(如屈服等)、变形特性有关。这组方程原则上必须通过实验测得，但对于常见材料，往往已有现成的形式。本构关系最一般的形式为：

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \text{ 或 } \{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \tag{1.18}$$

这里$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\ \sigma_{22}\ \sigma_{33}\ \sigma_{23}\ \sigma_{31}\ \sigma_{12}\}^T$，$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}\ \varepsilon_{22}\ \varepsilon_{33}\ \varepsilon_{23}\ \varepsilon_{31}\ \varepsilon_{12}\}$称为应力列阵和应变列阵。$[C]$称为材料的刚度矩阵，$[S] = [C]^{-1}$称为材料的柔度矩阵。对于匀质弹性材料，$[C]$和$[S]$均为常数矩阵，一般情况下，则有可能包含应力或应变的偏导数等，因为本构关系是与材料和具体的问题密切相关的。特别地，对于各向同性的弹性材料，根据广义虎克定律，本构关系可表述为：

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ll}\delta_{ij} \tag{1.19}$$

或

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{ll}\delta_{ij}] \tag{1.20}$$

式中，λ，μ称为Làme常数，与杨氏模量E和泊松比ν有如下的关系：

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad ,\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \tag{1.21}$$

其中，μ常称为剪切弹性模量。δ_{ij}称为Kronecker的δ函数，其值为：当$i = j$时，$\delta_{ij} = 1$；当$i \neq j$时则$\delta_{ij} = 0$。

本组基本方程的方程数：3维问题时为6；2维问题时为3。

以上3组基本方程，3维问题时共有方程15个，2维时有8个。而未知函数的个数：3维问题时有位移分量3个、应力分量和应变分量各6个，共计15个；2维问题时有位移分量2个、应力分量和应变分量各3个，共计8个。因此，方程数与未知函数的个数相同，在有恰当的边界条件时，理论上可求得各未知函数。应力分析的基本任务，实际上就是求取满足边界条件的上述基本方程的解。

§1.4.2 建立强度评价方法的基本思路

关于强度评价方法，迄今都通过实验方法来建立强度评价的经验准则，随着新材料的不断出现及有关经验的积累，目前情况已有所改变。这是因为在新材料中，新的力学现象的本质往往需要用新的参数来描述，而在确立新的参数的时候，必然要涉及到它与材料失效之间的关系以证明其可用性，也就是说必须先根据经验作一些理论方面的分析，然后通过实验来加以验证。为了建立新材料、新问题的强度评价方法，巧妙地设计实验非常重要，但在此之前，必须有一个基本的方法或思路。值得注意的是，通常将强度准则作为既成事实而被应用，但实际上这是要靠力学工作者建立的。

一、确定评价的基本参数

在材料力学中，我们用应力、应变的最大值，或其某种形式的组合，与被称为材料强度的一个特定的常数作比较，来进行强度评价。这就是说，将应力或应变作为评价的基本参数。对于各向同性且无缺陷的弹性材料，实验结果表明上述评价方法是行之有效的。但对于新型材料，如异种结合材料、复合材料等，以及带有裂纹等缺陷的材料，利用上述方法建立的经验准则一般带有试件形状和载荷形式的依存性(而这恰恰是带有普遍性的强度准则所必须避免的)，有时甚至是根本无法建立强度准则的。这说明，在这类问题中，应力或应变本身并不适宜于用作强度评价的基本参数，因此，首先必须解决用何种基本参数的问题。一般来说，作为基本参数的物理量，应具备以下性质：(1) 基本参数确定以后，应力场和位移场能唯一地确定，至少是应力场

和位移场的主要特征能唯一地确定;(2) 具有比较简单的量纲;(3) 基本参数的个数应尽量少。

但并不是所有具有上述性质的物理量都可作为基本参数的,最终决定是否能用作基本参数,还要看利用它能否建立有效的强度准则。

二、建立强度评价准则

如何利用基本参数来进行正确的强度评价呢?这就需要对同类问题建立具有普遍意义的强度准则。建立准则时,一般须考虑引起材料失效的主要因素及失效的具体形式,并假定基本参数或其某种组合形式达到一个特定的值(称为临界值)时,材料开始失效。该临界值通常称为材料的强度,必须具有与物体的几何形状和受载方式无关的特性,即必须是一个材料常数。顺便指出,材料强度是指材料的承载能力,实际上是一个笼统的概念,根据描述问题的基本参数的不同,材料强度的涵义也十分广泛,如拉伸强度、断裂韧性、疲劳极限等。但是,对于压杆稳定的临界值,是一个例外,它不但与材料本身有关,而且还与约束的形式有关。这类临界值,实际上不能称为材料强度,而应称为材料的几何强度。

三、实验验证

所假定的失效条件,虽然是基于某些经验或某些考察结果的基础上的,但正确与否,仍然只能通过实验来验证。这里就有一个如何巧妙设计实验的问题,以使实验结果不受试件的几何尺寸,试验条件等非本质因素的影响。

以上三个方面,并不是相互割裂的,而是相互联系,互为因果的。为了建立正确的强度评价方法,有时需要反复做以上三方面的工作(确定评价的基本参数、建立强度评价准则、实验验证),不断地修正和完善强度准则。

§1.5 固体力学的发展趋势

由于新材料的不断开发及其应用的增多,利用新材料制成的构件性能分析日趋重要。因此,近年来固体力学在新材料的评价方法方面得到了较大的发展,出现了一些新的学科分支,如界面力学、复合材料力学等。另一方面,由于"传统"的固体力学的主要内容是应力分析,而这一部分的工作往往可用不断发展和完善的数值计算程序来完成,因而也有些人错误地认为固体力学已没有什么可以发展的了。

我们认为,固体力学是一门既"老"又"新"的学科,其应力分析部分的内容今后将与计算科学密不可分,因此开发有效的计算方法将成为这方面的主要发展方向。目前,线性分析的数值计算软件(包括界面程序)已基本完善,非线性分析的软件尚在发展之中。应力分析的这个发展趋势,必将对固体力学的研究方法、教育方式产生巨大的影响。高性能的数值分析软件,一方面使我们易于求得应力分析的数值结果,另一方面也易使一部分力学工作者沦为仅仅是"黑匣子"的使用者,不需要太多的力学知识。相反,在新材料的性能评价方面,由于离散化了的数值结果,难以反映问题的本质所在,必须先以理论分析的方法,掌握问题的全貌,建立相应的强度准则后才能利用数值分析的结果,而这却要求研究者具有更深更扎实的理论基础,因此,有关应力分析的理论,在这方面仍然具有十分重要的意义。

固体力学的另一个重要发展方向,我们认为应该是解决新材料的性能评价问题,由于现代工业对材料的要求越来越高,使用条件也越来越苛刻,需考虑的因素也越来越多,因此常常出现现有的应力分析技术难以应用,或者现有的强度评价方法难以适用的情况。这就要求我们,

能够熟练地运用固体力学的知识，寻求解决新问题的方法，从而推动固体力学的发展。

§1.6 本书的构成

如前所述，固体力学的内容十分广泛，本书不可能覆盖其各个分支。本书选材的指导思想：一是详细介绍固体力学的基本理论，特别是今后固体力学发展过程中必不可少的基础知识；二是介绍一些新的学科分支，以使读者易于把握固体力学发展的概貌。本书的第二章介绍弹性论的基本理论，并提供一些考虑材料强度评价方法的思路。第三章介绍弹塑性力学的内容。第四章介绍断裂力学的参数分析方法及强度评价方法。第五章介绍新兴的界面力学的基本理论，提供结合材料的强度评价方法及其思路。第六章介绍复合材料的力学分析，从宏观和细观两个方面，阐述复合材料的应力分析和强度评价的基本方法。第七章介绍粘弹性力学基础。

由于篇幅关系，有关数值计算方面的内容，未能录入本书，如有需要请阅读本章参考文献[7]。

参考文献

[1] 冈村编. 强度解析学. 日本オーム社，1985
[2] 横堀著. 材料强度学. 日本技报堂出版社，1986
[3] 杜庆华等著. 应用固体力学基础. 高教出版社，1987
[4] 黄克智等著. 张量分析. 清华大学出版社，1986
[5] 谢贻权等著. 弹性力学. 浙江大学出版社，1988
[6] 钱学森. "我对今日力学的认识". 力学与实践，1995，17(4)，1
[7] 丁皓江等编. 弹性和塑性力学中的有限单元法(第二版). 机械工业出版社，1992