

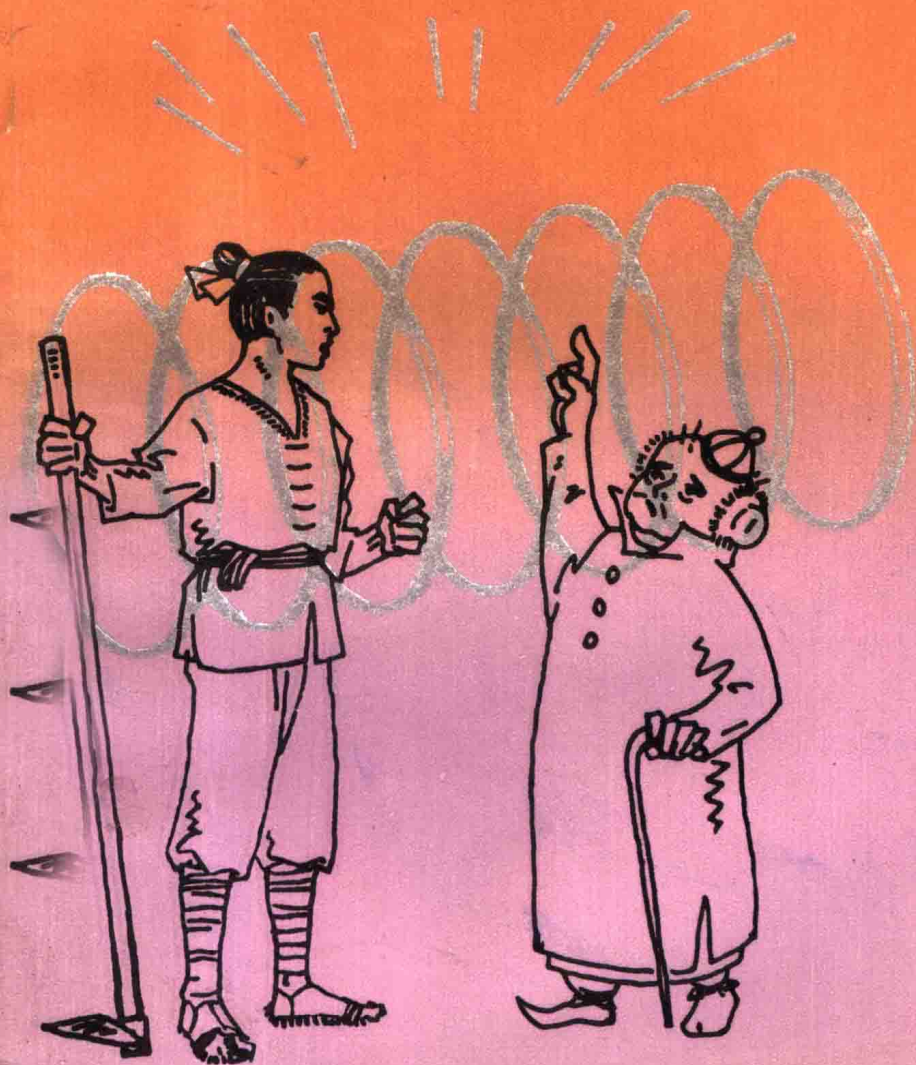


SHUXUE AIHAOZHE TIYUAN

13

数学爱好者题苑

(初中二年级)



数学爱好者题苑

陈敏贤 赖祖正编

福建教育出版社

数学爱好者题苑(初中二年级)

陈敏贤 赖祖正编

出版: 福建教育出版社

发行: 福建省新华书店

印刷: 三明市印刷厂

787×1092毫米 32开本 4.125印张 106千字

1984年12月第一版 1984年12月第一次印刷

书号: 7159·900 定价: 0.46元

编 者 的 话

本《题苑》为初中阶段的爱好数学的学生而编，旨在帮助他们打好坚实的数学基础，进一步提高能力、发展智力，增进对数学的学习兴趣。全套共三册，每个年级一册。

编者在长期教学实践中，积累了不少“好题”，近几年又翻阅了一些国内外较新的习题资料。在这基础上，遵循下述四个原则来精选题目：

- (1) 参照目前通用的初中数学教材和教学要求；
- (2) 切合初中学生的认识能力和智力发展水准；
- (3) 强调科学性、思考性和趣味性；
- (4) 力求一题一型，类型的面要广、重复度要小。

对于入选的题目，我们都给出解答。紧要之处，着意加注，作些分析、启示，或点明通法。对趣味数学题，我们强调应用数学知识和方法给予科学的说明或论证。这有助于增强学生运用数学知识的能力。

教师在指导课外数学兴趣小组活动（包括参加数学竞赛）时，本书可以提供参考资料；对于高中学生、社会青年的学习，本书也有一定的参考价值。

承蒙福建教育学院刘用绥老师审阅并帮助整理了书稿，谨此表示感谢。

编 者

1983年2月于福州三中

问题部分

1. 如果运算 $x \odot y$ 被定义为: $x \odot y = (x+1)(y+1) - 1$, 那末以下哪一个是错的:

(A) 对于所有实数 x 和 y , $x \odot y = y \odot x$;

(B) 对于所有实数 x , y 和 z ,

$$x \odot (y+z) = x \odot y + x \odot z;$$

(C) 对于所有实数 x , $(x-1) \odot (x+1) = x \odot x - 1$;

(D) 对于所有实数 x , $x \odot 0 = x$;

(E) 对于所有实数 x , y 和 z ,

$$x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z.$$

2. (已知 $x-y = \frac{1}{2}$, $x^2+y^2=1$, 求 x^2-y^2 的值.

3. 已知一个分数的分母和分子的和为33, 它的平方根为1.24 (精确到0.01), 求这个分数.

4. 正有理数 a_1 是 $\sqrt{3}$ 的一个近似值, 设 $a_2 = 1 + \frac{2}{a_1+1}$.

(1) 证明: $\sqrt{3}$ 介于 a_1 和 a_2 之间;

(2) 证明: a_2 比 a_1 更接近于 $\sqrt{3}$;

(3) 写出比 a_2 更接近于 $\sqrt{3}$ 的另一个有理近似值;

(4) 分析研究上述结论, 提出一种求 $\sqrt{3}$ 的有理近似值的方法.

5. 把 $\sqrt{5}$ 记作 a , 它的小数部分记作 b , 求 $a - b^{-1}$ 的值.

6. a, b 是满足 $0 < a - b\sqrt{2} < 1$ 的自然数, 设 $(a + b\sqrt{2})^3$ 的整数部分为 α , 小数部分为 β ,

(1) 求证: α 是奇数, 且 $(a - b\sqrt{2})^3 = 1 - \beta$;

(2) 设 $\alpha = 197$, 求 a, b .

7. 设 a 与 b 均为正数, 求证: $\sqrt{2}$ 必在两数 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+2b}{a+b}$ 之间.

8. 已知 $c > 1$, 求证: $\sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ 总是小于 $\sqrt{c} - \sqrt{c-1}$.

9. x 取怎样的实数值时, 下面等式成立?

$$|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$$

10. 当 $x = \frac{2}{\sqrt{3}-1}$ 时, 求 $y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 1$ 的值.

11. 已知 $Q = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, 求

(1) $Q^3 - 9Q$ 的值;

(2) 求证: $\sqrt{3}$ 可用系数为有理数的 Q 的三次式表示.

12. 求满足 $\sqrt{\frac{21}{4}} + 3\sqrt{3} = x + \sqrt{y}$ 的有序有理数时 (x, y) .

13. 设 $-5 < x < 5$,

$$y = \frac{\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} + \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}{\sqrt{\frac{5+x}{5-x}} - \sqrt{\frac{5-x}{5+x}}}$$

写出用 y 表示 x 的等式.

14. 若 $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$,

$$\text{求 } \sqrt{\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}} - \sqrt{ab} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

15. 当 $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$ 时,

$$\text{求 } y = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} \text{ 的值.}$$

16. 已知 $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$ ($a > 0$, $b > 0$),

$$\text{化简 } \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}.$$

17. 化简:

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} + x - 1} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1}{x} \right) \quad (0 < x < 1).$$

18. 已知 $a > 1$, 求证:

$$\sqrt[3]{a + \frac{a+8}{3} \sqrt{\frac{a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+8}{3} \sqrt{\frac{a-1}{3}}} = 2.$$

19. 计算:

$$\frac{(1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + \cdots + n \times 2n \times 4n)}{(1 \times 3 \times 9 + 2 \times 6 \times 18 + 3 \times 9 \times 27 + \cdots + n \times 3n \times 9n)}.$$

20. 化简:

$$\frac{\sqrt{3x^{\frac{3}{2}}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{4}{3}} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3x} + 10\sqrt{3x^{\frac{5}{3}}} + 25x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{1 - 2x^{-1} + x^{-2}}} \quad (x > 1).$$

21. 化简,

$$\left[\frac{a + a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{4}} + a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}} + b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} + 2a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \cdot (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b}) + \frac{3\sqrt{b}(a^{\frac{1}{4}} - b)}{a^{-\frac{1}{4}}(a^{\frac{1}{4}} - \sqrt{b})} \right]^{-\frac{1}{4}} + (\sqrt[4]{a} + \sqrt{b})^{-1}.$$

22. 已知 a, b 为整数, 且 $\frac{2\sqrt[3]{4} - b}{\sqrt[3]{4} - a\sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{4} + 1$,

求 a, b 的值.

23. 求满足 $P^k - P^{k-1} = 4$ 的正整数 P 和 k 的值.

24. 求满足关系 $c = 9a^3 = 28b^2$ 的最小数 c (a, b 是正整数).

25. 有甲、乙二人同解一个一元二次方程, 甲抄错常数项所得的根为 8 及 2; 乙抄错一次项系数, 所得的根为 -9 及 -1, 试求原方程及原方程的根.

26. 设 a, b, c 都是实数, 且 $(x+a)(x+b) + (x+b)(x+c) + (x+c)(x+a)$ 能表为 x 的一次式的完全平方, 试证:

$$a = b = c.$$

27. 求满足下列方程 x, y 的实数值,

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 6x + 14y + 10 = 0.$$

28. k 是什么数, 多项式 $kx^2 - 2xy - 3y^2 + 3x - 5y + 2$ 能分解成一次因式.

29. 如果: $a^2 + ab + b^2 = 0, a^2 + ac + c^2 = 0, b \neq c$,

求证: $b^2 + bc + c^2 = 0$.

30. 已知 a 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的根,

求证: α 也是方程 $x^4 - 3x - 2 = 0$ 的根。

31. 已知 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 都是有理数, 且 $a \neq 0$) 的一个根, 求证: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 也是方程的根。

32. 已知方程 $x^3 + (m-1)x^2 + (2-m)x - 2 = 0$ 的一个根是 1, 另两个根的平方和为 5, 求 m 的值及另两根。

33. 方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根的比为 $3:4$, 判别式为 $2-\sqrt{3}$, 求此方程的两根。

34. 已知 x 的二次方程 $x^2 - 2ax + 4a^2 - 6a = 0$ 有两个整数解, 试求: a 的一切实数值。

35. 若方程 $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ 与 $x^2 + 2cx - b^2 = 0$ 有一个相同的根, 且 a, b, c 为正数, 求证: a, b, c 为直角三角形的三边。

36. 确定 m 的值, 使方程组

$$\begin{cases} 2mx + 8y = 3m + 1, \\ 3x - (m-8)y = m-3 \end{cases}$$

的解中, x 与 y 的值相等。

37. 设方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 的两根为 $1-a_1, 1+a_1$,

($a_1 \neq 0$), 方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 的两根为 $\frac{3}{a_1} - 1$,

$1 - \frac{2}{a_1}$, 又设方程 $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ 的两根相等, 求

a_1, b_1, c_1 的值。

38. 设方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$, 只有一个公共的正根, 试求这公共根, 并证明: $a + b + c = 0$.
39. 若 $ax^2 + bx + c = 0$, $a'x^2 + b'x + c' = 0$ 两方程有公共根, 则它的系数之间应满足什么关系?
40. 已知 $|a| = 1$, b 为整数, 问 a 、 b 为何值时, 方程 $ax^2 - 2x + (5 - b) = 0$ 有两个负实数根.
41. 设方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的两根为正数, 求证: 当 $m \geq c$ 时, 方程 $cy^2 + (b - 2mc)y + 1 - bc = 0$ 的根是正数.
42. 已知: $ax^2 + bx + c$ 能被 $2ax + b$ 所整除,
试证: $ax^2 + bx + c = k(2ax + b)^2$.
43. n 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = 3x + n \end{cases}$$

中的 x 的二值相等, 此时, x 与 y 的值为何?

44. k 为何值时, 方程 $(k^2 - 1)x^2 - 6(3k - 1)x + 72 = 0$ 有两个不相等的正整数根.
45. 已知 a 、 b 是除 1 以外没有公约数的二整数, 若方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 2 和 α , 方程 $bx^2 + cx + a = 0$ 的两根为 3 和 β ,
(1) 求 a 、 b 、 c 的值;
(2) 以 α 、 β 为两根, 求作一个一元二次方程.
46. 已知方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($abc \neq 0$), 且 $mnb^2 = (m + n)^2 \cdot ac$ ($mn \neq 0$), 求证: 方程的两根的比为 $m : n$ 或 $n : m$.
47. 证明: 方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 当 a 、 b 、 c 均为奇数时, 无整数根.

48. 已知二次方程 $x^2 + 3x + a + 3 = 0$ 的两个根是整数,

(1) 证明: 方程的一个根是奇数, 另一根是偶数;

(2) 证明: a 是负奇数;

(3) 当方程两个根的符号相同时, 试求 a 的值和两个根.

49. 已知方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的两根是 α, β , 且

$$f(n) = \alpha^n + \beta^n,$$

(1) 试用 a, b 表示 $f(3)$;

(2) 求 $f(n+2) + af(n+1) + bf(n)$ 的值.

50. 设 x 为实数, 试证 $(x^2 - bc)(2x - b - c)^{-1}$ 的值不能介于 b 与 c 之间.

51. 解方程

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0.$$

52. 解方程 $\frac{1}{x+2} + \frac{x^2+a}{x^2-4} = 1 - \frac{2}{x-2}.$

53. a 是什么值时, 方程

$$1 + \frac{2a+1}{x(x-3)} = \frac{3}{x-3}$$

只有一个实根, 并求这个实根.

54. 若方程

$$\frac{(a+1)(b+1)}{x+1} + \frac{(a-1)(b-1)}{x-1} = \frac{2ab}{x}$$

无解, 且 $a \neq b$, 试求: $a^2 + ab + b^2$ 的值.

55. 求方程 $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$ 的实数根.

56. 解方程 $9x^2 - 7x - 18\sqrt{x} = 80.$

57. 解方程

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = 4\sqrt{x^2-1}.$$

58. 解方程 $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$.

59. 解方程 $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-3} + \sqrt{x+1} + 4\sqrt{x-3} = 5$.

60. 解方程 $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3$.

61. 解方程 $\frac{\sqrt[5]{x+2}}{2} + \frac{\sqrt[5]{x+2}}{x} = 32\sqrt[5]{x}$.

62. 解方程 $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x^2-1}$.

63. 解方程

$$\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + 7.$$

64. 解方程 $\sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9$.

65. 解方程

$$\begin{aligned} & \sqrt[n]{1+x}(1+\sqrt[n]{1+x}) + \sqrt[n]{1-x}(1+\sqrt[n]{1-x}) \\ &= 2\sqrt[n]{1-x^2}(1+\sqrt[n]{1-x^2}). \end{aligned}$$

66. 解关于 x 的方程 $\sqrt{p-x} + \sqrt{p+x} = x$ ($p > 0$).

67. 解方程 $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-3$.

68. 解方程 $\sqrt{x^2+2x+1} - 2|x-2| = 5-x$.

69. m 为何正数时, 方程 $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2m$ 无解.

70. a 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x-y+1=0, \\ \frac{x}{y-4} - \frac{8}{y+1} + \frac{a-19}{(x+2)(x-3)} = 0 \end{cases}$$

只有一组实数解。

71. 当 k 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x - \sqrt{y-2} = 0, \\ kx - y - 2k - 10 = 0 \end{cases}$$

有唯一的一组解, 并求这一组解。

72. 求方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -18 \end{cases}$$

的整数解。

73. 解方程组
$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + k = 0, \\ 2y^2 - 2y + k = 0, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

74. 求方程组

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

的实数解。

75. 解方程组
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3, \\ xy - x - y + 15 = 0. \end{cases}$$

76. 解方程组
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 18, \\ xy + x^2 + y^2 = 19. \end{cases}$$

77. 解方程组
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y, \\ x^4 - y^2 = 144. \end{cases}$$

78. 解方程组
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3 y} + \sqrt{xy^3} = 78. \end{cases}$$

79. 求满足

$$\begin{cases} \sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}, \\ x+y+z=8, \\ x-y+z=4 \end{cases}$$

的所有的有序三实数 (x, y, z) .

80. 解方程组

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x-y}}, \\ \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{34}{15}. \end{cases}$$

81. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

82. 解方程组

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x+yz=10, \\ xyz=24. \end{cases}$$

83. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{5}{6}, \\ \frac{yz}{y+z} = -\frac{3}{2}, \\ 2(x+z) + xz = 0. \end{cases}$$

84. 解方程组

$$\begin{cases} x(y+z)=6, \\ y(z+x)=-6, \\ z(x+y)=4. \end{cases}$$

85. 解方程组

$$\begin{cases} x^2 = 6 + (y-z)^2, \\ y^2 = 2 + (z-x)^2, \\ z^2 = 3 + (x-y)^2. \end{cases}$$

86. 解方程组
$$\begin{cases} |x+y|=1, \\ |x|+|y|=2. \end{cases}$$

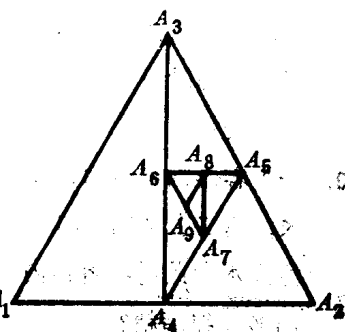
87. 甲、乙两人绕池而行，同时同地相背出发，甲经3分钟绕池一周，乙自途中遇甲后4分钟到达出发点，求乙绕池一周需多少分钟？
88. 从A向B同时出发的“胜利”牌汽车和自行车，在同时刻从B向A开出“解放”牌汽车。经过2.4小时汽车相遇，而自行车和“解放”牌汽车相遇是在离A48公里处。如果已知自行车在30公里路程上比“胜利”牌汽车多花2.5小时，而它的速度是“解放”牌汽车的 $\frac{1}{4}$ 。求汽车和自行车的速度。
89. 某项工作甲、乙两人合做，16天可以完成。共同做4天后，甲改做其他工作，乙完成所余工作比甲一人做全部工作的时间多12天，若单独一人完成全部工作，问各需几天？
90. 一个容器盛满纯酒精20升，第一次倒出若干升后再注满水；第二次又倒出与第一次同样升数的液体，然后再注满水，此时，容器内的水是酒精的三倍。问第一次倒出多少纯酒精？
91. 某队伍长1公里，在长途行军中，一战士因事从队伍的排尾追赶到排头，到达排头后立即返回。当他回到排尾时，整个队伍已前进1公里。若队伍和战士的行走速度不变，求这战士所走路程。
92. 从汽车上下来甲、乙两位旅客，他们沿着同一方向走到

同一目的地。甲旅客用一半时间以速度 a 行走，另一半时间以速度 b 行走；乙旅客一半路程以速度 a 行走，另一半路程以速度 b 行走。问哪一个旅客先到达目的地？

93. 某人到照相馆洗照片 x 张，付了 y 元 (x, y 为正整数)。他要走时，营业员告诉他说：“你要是再多洗 10 张的话，我就总共收你 2 元钱，这样相当于每洗一打(12张)你可以节省 8 角”求 x, y 。

94. 有一等腰直角三角尺，直角边长为 1 分米。现用它来量两条线段，一条是三角尺斜边长的整数倍，一条是三角尺直角边长的整数倍。用这两条线段的差作为边长，做一个正方形，它的面积是 $9 - 4\sqrt{2}$ 平方分米，问哪两条线段分别是斜边和直角边的多少倍？

95. 如图，如果 $\triangle A_1A_2A_3$ 是一个正三角形， A_{n+1} 是线段 A_nA_{n+1} 的中点，那么 $\angle A_4A_5A_6$ 的度数是 120° 。

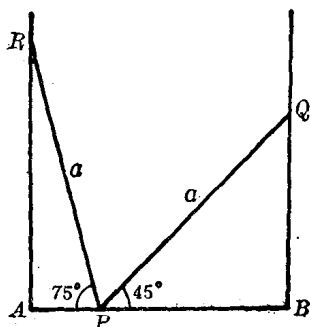


96. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 为 BC 边上的高， BM 为 AC 边上的中线，若 $\angle CBM = 30^\circ$ ，求证： $AD = BM$ 。

97. 已知直角三角形的周长为 $2 + \sqrt{6}$ ，斜边上的中线长为 1，求这个直角三角形的面积。

98. 在三角形中，三条中线的长为 9，12 和 15，求最长中线的边长。

99. 一条狭窄的小巷宽 AB (如图), 一架长为 a 米的梯子, 梯脚放在两墙之间的 P 点处, 梯顶靠在墙上 Q 点处, 梯与地面成 45° 角; 若梯顶靠在另一墙的 R 处时, 梯与地面成 75° 角, 求小巷宽 AB .



(99题)

100. 求证: 三角形短边上的中线必大于长边上的中线.
101. 已知 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, 过 G 作直线, 设这条直线分别交三角形的边 AB 、 AC 于 E 、 F , 求证:

$$EG \leq 2GF.$$

102. 平面上有 $n+2$ 个点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, P, Q$, 其中 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ 都不在直线 PQ 上, 且 $PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n + QA_1 + QA_2 + \dots + QA_n = S$, 若 M 为线段 PQ 的中点. 试证明:
 $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n < \frac{1}{2}S$.

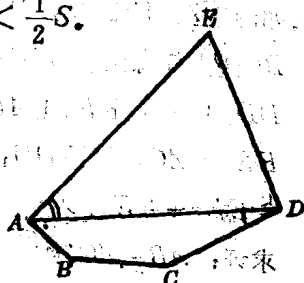
103. 如图 $ABCDE$ 为凸五边形,

已知 $\angle EAD > \angle ADC$,

$\angle EDA > \angle DAB$,

求证: $AE + ED$

$> AB + BC + CD$.



(103题)

104. 已知: $ABCD$ 为等腰梯形, 且两对角线互相垂直,
求证: 梯形的高必等于其中位线.