青年数学叢書

最短綫

柳斯捷尔尼克著

1313X36/14

132
9

中国青年出版社

最 短 綫

〔苏〕柳斯捷尔尼克著
高 彻 譯

*
中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售
*
787×1092 1/32　3 1/2印張　56,000字
1957年7月北京第1版　1957年8月北京第1次印刷
印数1—16,500　定价(7)0.32元

青年数学叢書

最 短 綫

柳斯捷尔尼克著
高 徹 譯

中国青年出版社
1957年·北京

内 容 提 要

一只蒼蝇要想从一道墻壁上的点A爬到鄰近一道墻壁上的点B，怎样爬路程最短？用一定長短的一道籬笆，怎样圍所包含的面积最大？解决这一类問題，在数学上是屬于变分学的范圍的。这本小册子完全用初等数学作基础，来向中等程度的讀者介紹变分学。作者把一些数学問題联系到物理問題上去，証明虽然不是很严格的，却很簡單而直观，使讀者很容易領会，而且对于讀者发展这方面的数学才能也有帮助。

Л. А. ЛЮСТЕРНИК
КРАТЧАЙШИЕ ЛИНИИ
ГИЗТЕХ
МОСКВА, 1955

目　次

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

原　序

在这本小册子里，我們从初等数学的观点来研究一系列的所謂变分問題．这些問題研究一些和曲綫有关的量，并且尋求那些使这种量达到它的极大値或极小値的曲綫．下列的問題就是例子：在某个面上連接兩定点的一切曲綫当中求出最短的；在平面上有一定長度的閉曲綫当中求出包圍最大面积的曲綫，等等．

本書的材料基本上曾經由作者在国立莫斯科大学中學数学小組上講过．第一講(第1-10节)的內容基本上和 1940 年出版的作者所著的小册子"短程綫"的內容一致．

我只假定讀者熟悉初等数学課程．第一章完全是带初等数学性質的，其余几章也不要求專門知識，不过要求对数学課程有比較好的素养，并且善于思索．

本書的全部材料可以看成是变分学的初步介紹(所謂变分学就是数学当中系統地研究有关求泛函数的极大极小問題的一个分支)．变分学不屬于比較精簡的例如工科大学里所学的"高等数学"課程范圍之內．然而对于开始学习"高等数学"課程的人来說，我們認为在事先稍微多看一些也不是毫无用处的．

对于熟悉初等数学分析的讀者来說，要把本書里所叙述

的一些不严格的定义和論証改得很严格（关于这方面的闡釋他在那些用小号字印出的章节里可以經常遇到），当不会有什么困难；例如，不应当說微小的量和它的近似等式（大致等于），而应当說无穷小量和它的等价．假若那些要求更高的讀者終究对于这里的討論里所容許的严格程度和邏輯上的完善程度感到不滿足，那末可以对他說明，这需要有一些数学分析的基本概念的邏輯上的磨練，就象他在大学分析課程里所遇到的．沒有这样的磨練，分析里象变分学这样的部分就不可能作严格的和系統的叙述．

数学分析产生了有力的分析器械，它有时自动地解决了許多困难問題．但在掌握数学的所有阶段当中，特别重要的是看出所要解决的問題的簡單几何意义和物理意义．要学会象数学家們所說的"在手上"解决問題，就是說，要学会去发現那些虽然并不严格、却很簡單而直观的証明．

假若这本小册子多少对于讀者发展这方面的数学才能有帮助，著者就認为他編写本書并沒有白費气力．

柳斯捷尔尼克

第 一 講

第一章

最簡單的面上的最短綫

一 多面角的面上的最短綫

1. 二面角上的最短綫 讀者当然知道，連接平面上兩点的所有綫当中，最短的綫是直綫．

我們現在來研究任意一个面上的兩点 A 和 B；它們可以用这面上的无数多条綫來連接．但是这些綫当中哪一条最短？换句話說，要想沿这个面从 A 点到 B 点，应該怎样走路程最短？

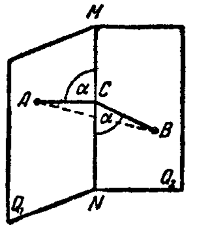

图 1.

我們先就一些最簡單的面來解这一个問題．我們从这样的一个問題开始：給定一个二面角①，它的兩面是 Q_1 和 Q_2，棱是 MN；在这兩面上給定兩点：Q_1 上的点 A 和 Q_2 上的点 B（图 1）．点 A 和点 B 可以用无数多条在这二面角的面 Q_1 和 Q_2 上的綫連接起來．我們要在这些綫当中求出最短的一条．

若二面角等于平角（180°），那末面 Q_1 和 Q_2 当中的一面

① 图 1 上所画的只是这无限伸延的二面角的一部分．

是另一面的延續(也就是合成一个平面),因而所寻求的最短綫也就是連接点 A 和点 B 的直綫段 AB. 但若这二面角不等于平角,面 Q_1 和 Q_2 就不可能一面是另一面的延續,因而直綫段 AB 就不在这兩面上. 我們把这兩面当中的一面繞着直綫 MN 轉,使这兩面变成一面是另一面的延續,换句話說,把这二面角展在一个平面上(图 2). 面 Q_1 和 Q_2 变成了半平面 Q_1' 和 Q_2'. 直綫 MN 变成了分开 Q_1' 和 Q_2' 的直綫 $M'N'$; 点 A 和 B 变成了点 A' 和 B' (A' 落在 Q_1' 上, B' 落在 Q_2' 上); 在二面角的面上連接 A、B 二点的每一条綫也都变成了我們的平面上連接 A'、B' 兩点的和原来同样長短的綫. 二面角的面上連接 A、B 兩点的最短綫就变成了平面上連接 A'、B' 兩点的最短綫,也就是变成了直綫段 $A'B'$. 这綫段交直綫 $M'N'$ 于某一点 C',角 $A'C'M'$ 和 $N'C'B'$ 是对頂角,所以相等(图 2). 它們每一个的大小記作 α.

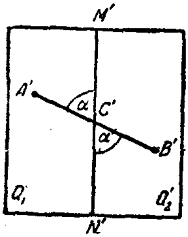

图 2.

我們現在把 Q_1' 和 Q_2' 繞 $M'N'$ 轉,使得又重新得到原来的二面角. 半平面 Q_1' 和 Q_2' 再变成这二面角的面 Q_1 和 Q_2, $M'N'$ 变成棱 MN,而点 A' 和 B' 变成点 A (在面 Q_1 上) 和点 B (在面 Q_2 上),直綫段 $A'B'$ 就变成在这二面角的面上連接 A、B 兩点的最短綫. 这条最短綫显然就是折綫 ACB, 它的 AC 那一段在面 Q_1 上, CB 这一段在面 Q_2 上. 显然,由兩个互等的角 $A'C'M'$ 和 $N'C'B'$ 所变成的角 ACM 和 NCB 仍旧等于 α,也就是說它們仍旧相等. 因此,在二面角的面上連接

它上面的(不在同一面上的)兩点 A 和 B 的綫当中最短的是这样的一条折綫 ACB，它的頂点 C 在棱 MN 上，而它的兩条边和棱所作成的兩个角 ACM 和 NCB 相等。

我們有时給現在所討論的这个問題帶上一点半开玩笑的性質。一只蒼蝇要想从一道墻壁上的点 A 爬到鄰近一道墻壁上的点 B。假若它要沿墻壁从点 A 爬过最短的路到达点 B，試問它应該怎样爬。我們現在要得出解答已經不难了。

2. 多面角面上的最短綫 我們現在来討論比較复杂一点的情形。給定一个多面角的面（图 3），它是由几个面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4……Q_n 和棱 M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3……$M_{n-1}N_{n-1}$ 所組成（图 3 所画的是 $n=4$ 的情形）。在这多面角的兩个不同的面上（比如 Q_1 和 Q_4 上）給定兩点 A 和 B。現在要求出这多面角的面上連接点 A 和 B 的最短綫。

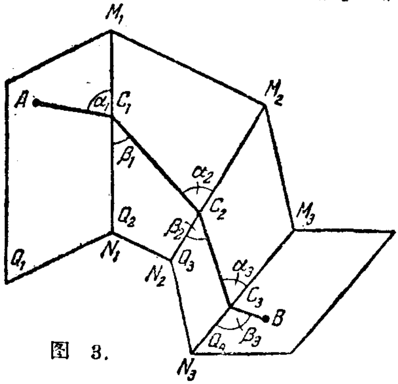

图 3.

假設最短的是綫 AB，又設这条綫通过面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4。我們現在把这些面所組成的这一部分多面角展在一个平面上(图 4)。这时候这些面变成了这平面上的多边形 Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4'，而把面 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 兩兩接連起来的棱 M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3 变成了多边形 Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4' 的边 $M_1'N_1'$、$M_2'N_2'$、$M_3'N_3'$，这些多边形就是由它們兩兩連接在一起的。点 A 和 B 变成了平面上的点

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

A'和B'，而在多面角的面被展开的这一部分上連接A、B兩点的綫也变成平面上連接A'、B'兩点的綫．連接A、B兩点的綫当中最短的綫也就变成連接A'、B'兩点的最短的平面上的綫，也就是变成了直綫段$A'B'$①．在这里，我們完全重复先前的論証：

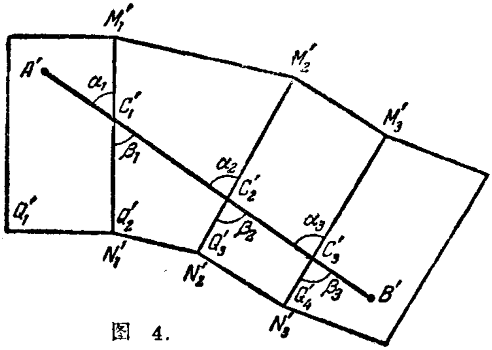

图 4.

由直綫$A'B'$和边$M_1'N_1'$所作成的对頂角α_1和β_1相等；同理，由直綫$A'B'$和边$M_2'N_2'$、$M_3'N_3'$所作成的对頂角α_2和β_2、α_3和β_3也兩兩相等（图 4）．

假若重新把構成我們这些多边形的这一部分平面弯折成多面角的面，使得多边形Q_1'重新变成面Q_1，多边形Q_2'重新变成面Q_2，多边形Q_3'变成面Q_3，Q_4'变成Q_4，那末点A'和B'就变成点A和B，而直綫段$A'B'$变成綫$\overset{\frown}{AB}$，变成多面角的面上連接A、B兩点的最短綫．这条最短綫是一条折綫，它的頂点在多面角的面的一些棱M_1N_1、M_2N_2、M_3N_3上．而由它的相接的兩条边和棱所作成的角α_1和β_1（以及α_2和β_2、α_3和β_3）相等．

3．棱柱側面上的最短綫 在图 5 上画的是一个棱

① $A'B'$穿过这些多边形的別条边的情形，我們这里不討論了．

柱[①]，和連接这棱柱上不在同一側面上的兩点 A 和 B 的最短綫．这最短綫是一条折綫，它的頂点是棱柱的棱上的 C_1、C_2、C_3，而它的相接的兩边和这兩边的公共頂点所在的一条棱所作成的角，由前所說，是互等的：

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\quad \alpha_3=\beta_3,\cdots\cdots$$

但除此而外，我們还有 $\beta_1=\alpha_2$．

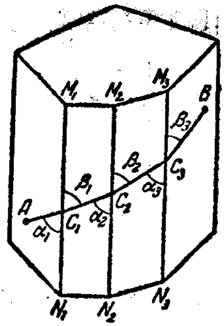

图 5.

实际上，这兩个角是平行綫 M_1N_1、M_2N_2 和截綫 C_1C_2 所成的內錯角．同理，$\beta_2=\alpha_3$．因此，我們有

$$\alpha_1=\beta_1=\alpha_2=\beta_2=\alpha_3=\beta_3=\cdots\cdots$$

換句話說，棱柱側面上的最短折綫 AB 的各边和棱柱的各个棱所作成的角互等．

4．棱錐的面上的最短綫

設在頂点是 O 的棱錐[②]的兩个側面上給定了兩点 A 和 B（图 6）．这兩点可以在錐面上用无数多条綫連接起来，这些綫当中有一条最短的綫 $\overset{\frown}{AB}$．根据前面所說，綫 $\overset{\frown}{AB}$ 是一条折綫，它的頂点 C_1、C_2、C_3……在棱錐的棱上，而由这折綫的各边和棱錐的棱所

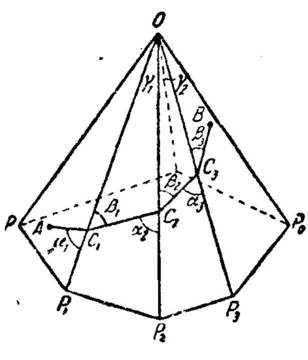

图 6.

① 棱柱的側面应当想象成是无限伸延的．

② 棱錐的側面应当想象成是无限伸延的．

作成的角α_1和β_1、α_2和β_2、α_3和β_3……一定兩兩相等：

$$\alpha_1=\beta_1,\quad \alpha_2=\beta_2,\quad \alpha_3=\beta_3,\cdots\cdots$$

我們現在来研究边C_1C_2所在的面P_1OP_2；若γ_1表示角P_1OP_2，那末在三角形C_1OC_2里，角α_2是外角，而角β_1和γ_1是內角。三角形的外角等于兩內对角的和，所以

$$\alpha_2=\beta_1+\gamma_1, \text{或}\ \alpha_2-\beta_1=\gamma_1.$$

但因$\beta_1=\alpha_1$，所以$\alpha_2-\alpha_1=\gamma_1$.

同理，$\alpha_3-\alpha_2=\gamma_2$，这里$\gamma_2$是相鄰的兩个側棱$OP_2$和$OP_3$之間的交角，等等。

因此，**最短綫和棱錐的任意兩个棱相交的角的差等于在頂端的相应几个平面角的和。**

二 圓柱面上的最短綫

1. 圓柱面上的最短綫 我們現在来求某些最簡單的曲面上的最短綫。先从圓柱面开始[①]。

我們先要注意，圓柱面可以用一組和圓柱面的軸平行、因而自身也就互相平行的直綫全部蓋滿。這些直綫叫作圓柱面的**母綫**。

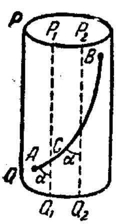

图 7.

在圓柱面上給定兩点A和B(图 7)。我們要从那些在圓柱面上連接A、B兩点的曲綫当中找出最短的那一条。用$\overset{\frown}{AB}$来記这一条連接A、B兩点的最短綫。我們先討論A、B兩点不在同一

① 現在所討論的**有限**圓柱面（图 7）是无限圓柱面的一部分。

条母綫上的情形。

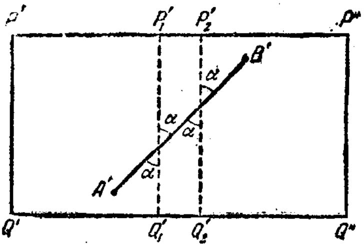

图 8.

我們把圓柱面沿着某一条母綫 PQ（和 $\overset{\frown}{AB}$ 不相交的）剪开，并且把它展开在一个平面上；于是就得到一个矩形（图8）（它的一对边，$P'P''$ 和 $Q'Q''$，是由展开圓柱面兩端的圓周而得到的；另一对边，$P'Q'$ 和 $P''Q''$，是由切口 PQ 的兩边所作成）。圓柱的母綫变成和矩形的边 $P'Q'$ 相平行的直綫。A、B 兩点变成在矩形里面的 A'、B' 兩点。在圓柱面上連接 A、B 兩点的綫变成連接矩形里面 A'、B' 兩点的平面上的綫。圓柱面上連接 A、B 兩点的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成連接 A'、B' 兩点的最短的平面上的綫，就是直綫段 $A'B'$。因此，在把圓柱的側面展开成平面上的矩形之后，圓柱面上的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 变成直綫段 $A'B'$。圓柱的母綫 P_1Q_1、P_2Q_2……变成和矩形 $P'Q'Q''P''$ 的边 $P'Q'$、$P''Q''$ 相平行的直綫 $P_1'Q_1'$、$P_2'Q_2'$……綫段 $A'B'$ 和这些直綫所作成的角，作为平行綫的同位角，是互等的。用 α 来記这些角的大小。

我們現在把矩形 $P'Q'Q''P''$ 卷起来（把它的对边 $P'Q'$ 和 $P''Q''$ 粘在一起），使得它又重新回到本来圓柱的形式。点 A' 和 B' 又再变成圓柱面的点 A 和 B，而 A'、B' 的連綫 $A'B'$ 又再变成圓柱面上的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$；直綫 $A'B'$ 和直綫 $P_1'Q_1'$、$P_2'Q_2'$……的交角变成和它相等的、弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和圓柱母綫 P_1Q_1、P_2Q_2……的交角。因为直綫 $A'B'$ 截所有和 $P'Q'$ 平行的直綫

成等角 α，所以 $A'B'$ 所变成的最短弧 $\overset{\frown}{AB}$ 截圓柱所有的母綫成等角 α（图 7）.

我們再来討論 A、B 兩点在同一条母綫上这一种特别情形（图 9）. 显然，在这种情形，母綫上的这一段綫 AB 就是圓柱面上 A、B 兩点之間的最短距离.

我們还要把 A、B 兩点在圓柱的同一圓截綫上这一种特别情形挑出来談一談（图 10）. 这截綫的弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和所有的母綫垂直. 它就是連接 A、B 兩点的最短弧.

若把圓柱面沿着和弧 $\overset{\frown}{AB}$ 不相交的母綫剪开，并把它展成平面上的矩形，那在剛才所討論的兩种特別情形里，最短弧变成和矩形的边平行的綫段. 在所有的其他情形，最短綫都和母綫相交成一个不等于直角的角（同时也不等于 0）①.

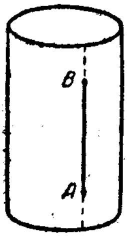

图 9.

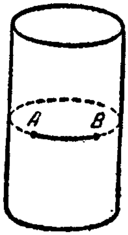

图 10.

2. **螺旋綫** 圓柱面上截所有母綫成等角（不等于直角）的曲綫叫作螺旋綫.

我們用 α 記螺旋綫和圓柱母綫的交角. 和圓柱母綫相交成直角的綫是圓截綫. 我們可以把圓截綫看成是螺旋綫的一个极限情形，这时候 α 变成直角. 同理，圓柱的母綫也可以看成是另一个极限情形，这时候 α 变成 0.

① 讀者如能把尋求圓柱面上的最短綫这一問題和第 11 頁上尋求棱柱上的最短折綫問題比較一下，倒很有意思（前一問題是后一問題的极限情形）.

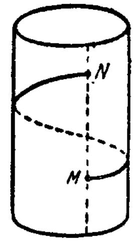

图 11.

我們現在来研究圓柱面上的兩个运动：和軸平行（沿母綫）的运动和用一定速度繞着軸轉（沿圓截綫）的运动.

这兩个运动任何一个都可以朝着兩个相反的方向进行. 我們把在直立圓柱上的向上的运动作为正，向下的运动作为負. 又把在直立圓柱上从右到左的轉动（对于头上脚下沿着圓柱的軸站着的人来說）或反时針轉作为**正轉动**. 从左到右的轉动或順时針轉作为**負轉动**.

沿螺旋綫的运动可以从兩个运动相加得到：这兩个运动就是和圓柱的軸平行的运动和繞軸的轉动. 假若沿着一条螺旋綫向上运动同时作着正轉动——从右到左（图 11），这螺旋綫就叫作**右螺旋綫**，若是向上运动同时作着負轉动——从左到右，这螺旋綫就叫作**左螺旋綫**.

許許多多繞着直立的支杆爬的蔓生植物（牽牛花、菜豆）都取右螺旋綫的形式（图12）. 另一方面，例如蛇麻草，却取左螺旋綫的形式（图 13）.

假設一点在沿螺旋綫运动的时候，交某一母綫于点M，而在繼續沿这螺旋綫运动的时候，它又再交这条母綫于点N；当这点走完螺旋綫的弧$\overset{\frown}{MN}$的时候，它就繞着圓柱的軸轉了一个全周；同时它还向上走了一段距离，等于直綫段MN的長（图 11）. 假若轉动的速度是 0，因而点只是沿着母綫平行圓柱的軸移动，这时候就出現了第一种极限情形；假若平行圓柱的軸的移动速度是 0，因而点只是繞軸沿圓周轉动，这时候就

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com