# 数学分析习题选解

（上）

江 西 师 院 数 学 系

林 宗 南

1980.8.

# 前　　言

为了满足教学需要，以及学生加深“数学分析”内容学习的要求，我们从英文、俄文、日文等有关书籍、文献和国内的有关资料中编译和选解了部分习题，汇编成这本《数学分析习题选解》。

《选解》的习题大部分有一定的难度，解题力求简明、扼要、清楚，但所用知识皆在大纲规定范围之内。有助于加深对“数学分析”中一些基本概念和基本理论的理解，有助于掌握、了解“数学分析”中一些计算和论证的方法、技巧，可以开扩眼界，对希望进一步深入学习“数学分析”内容的读者，是一本适宜的参考书。

《选解》的习题大约900道左右，分上下册出版。由于时间仓促，加以我们水平有限，因此书中解法会有不妥之处，错误也在所难免，敬请读者批评指正。

这本《选解》的问世得到各级领导和许多同志的关心和帮助，谨致谢意。

# 目　　录



HHU4B/05

# 第一部分　分析引论

## 一、实　　数

1、证明 lg2 不是有理数。

〔证〕 用反证法． 假定 lg2是有理数，就应当有正整数 $p$, q 存在，使得 $\lg 2=\frac{p}{q}$．因而 $2=10^{\frac{p}{q}}$，或 $2^q=10^p$。这个等式的左端只含有偶数因子，等式的右端却包含有奇数 5 的因子。所得到的这个矛盾就证明了 lg 2 不可能是有理数。

2、设k 是自然数，但不是整数的平方，又设 U表示所有正有理平方大于 k的集合；L表示所有不属于 U的有理数的集合，则U没有最小数、L没有最大数。

〔证〕 假定L包含一个最大数 $a$，U包含最小数 b，依假设 $a^2<k$ 且 $b^2>k$ 现在我们选择两个正整数m和n，使得 $m^2>kn^2$ 且设

$$\frac{ma+nk}{na+m}=a',\qquad \frac{mb+nk}{nb+m}=b'$$

则

$$a'-a=\frac{n(k-a^2)}{na+m}>0,\qquad b'-b=\frac{m(k-b^2)}{nb+m}<0$$

$$(a')^2-k=\frac{(ma+nk)^2-k(na+m)^2}{(na+m)^2}$$

$$=\frac{(m^2-kn^2)\ (a^2-k)}{(na+m)^2}<0\ .$$

$$(b')^2-k=\frac{(mb+nk)^2-k(nb+m)^2}{(nb+m)^2}$$

$$=\frac{(m^2-kn^2)\ (b^2-k)}{(nb+m)^2}>0、$$

于是$a'>a$，$(a')^2<k$和$0<b'<b$，$(b')^2>k$，这意谓着$a'$属于L，$b'$属于U。此与$a$是L的最大数，b是U的最小数矛盾。

3、若$a$是正整数，C是$\sqrt[n]{a}$的过剩有理逼近（即C是有理数且$C^n>a$）．令

$$C_1=\frac{1}{n}\left[(n-1)C+\frac{a}{C^{n-1}}\right]$$

则　　$C_1$是较之C更好的过剩有理逼近。

〔解〕 设　$k=C^n-a$　或　$a=C^n-k$，这时$0<k<C^n$，

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{C^n-k}=C\left(1-\frac{k}{C^n}\right)^{\frac{1}{n}},\quad 0<\frac{k}{C^n}<1$$

应用贝努利不等式

$$\left(1-\frac{1}{n}\frac{k}{C^n}\right)^n>\left(1-\frac{k}{C^n}\right)$$

即
$$\left(1-\frac{1}{n}\frac{k}{C^n}\right)>\left(1-\frac{k}{C^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

把　　$k=C^n-a$　代入得

$$\sqrt[n]{a}<C\left(1-\frac{1}{n}\cdot\frac{C^n-a}{C^n}\right)=\frac{1}{n}\left[(n-1)C+\frac{a}{C^{n-1}}\right]$$

$a$，n 为自然数，C为有理数，故$C_1=\frac{1}{n}\left[(N-1)C+\frac{a}{C^{n-1}}\right]$为有理数，且满足不等式$\sqrt[n]{a}<C_1<C$、

4、指出在任何两个不相等的有理数之间至少存在一个无理数。

〔解〕 我们知道：全体有理数组成之集关于四则运算是封闭的；$\sqrt{2}$是无理数，且$1<\sqrt{2}<2$．

设有二有理数 $r_1,r_2$　不妨设$r_1<r_2$，令

$\frac{r_2-r_1}{\sqrt{2}}=\alpha$．现在证明$\alpha$是无理数。假如$\alpha$是有理数，那么

$\sqrt{2}=\dfrac{a}{r_2-r_1}$ 应是有理数，与$\sqrt{2}$是无理数矛盾．故证得$a$是无理数，且$0<a<r_2-r_1$。

由于有理数与无理数之和仍是无理数，因此，$a+r_1$是无理数，且满足不等式

$$r_1<a+r_1<r_2\ 。$$

5、用确界定理证明“阿基米得公理”：设$\bar{\varepsilon}$，$a$是任意两个正数，一定有一个自然数　，使得$N\bar{\varepsilon}>a$。

〔证〕 倘不存在某一自然数N使得$N\bar{\varepsilon}>a$，那么对于任一自然数N。都有$N\bar{\varepsilon}\leq a$．则数集

$S=\{m\bar{\varepsilon}\}$（m取一切自然数）有上界$a$，因而存在上确界C

$C=\mathrm{Sup}S$ 对于给定的$\varepsilon$，按上确界定义，存在S的某一元素$m_\circ\bar{\varepsilon}$，使得

$$C-\bar{\varepsilon}<m_\circ\bar{\varepsilon}.$$

也就是 $C<(m_\circ+1)\bar{\varepsilon}$。

但$m_\circ+1$是自然数，$(m_\circ+1)\bar{\varepsilon}\in S$、这与c是S的上确界矛盾。

6、用确界定理证明狄德金定理。将实数集全体分为两组下组A及上组B满足：

1°、 两组都不空；

2°、 下组的数都比上组的数小；

3°、 任何数不属于A则属于B，但只属于一组。

则必存在界数$a$，比$a$大的数都属于B，比$a$小的数都属于A。

〔证〕 由条件2°，A有上界，B有下界．由条件1°，A、B非空。依确界定理，A有上确界，设为u；B有下确界，设为l。

现在证明 $u=l$.

倘$u>l$， 由下确界l的性质，有$\beta\in B$满足$l\leq\beta<u$、

又由上确界 u 的性质，有$a\in A$，满足$\beta<a\leq u$. 这与条件 2°矛盾。

倘 $1>u$ 取正数$\eta<1-u$，从 A 中取一数 $a$ 作 $a$，$a+\eta$，$a+2\eta$，…，$a+n\eta$，……依阿基米得定理存在某一自然数m，使得 $a+m\eta$ 属于B，而$a+(m-1)\eta$ 属于 A. 令

$$a'=a+(m-1)\eta,\quad b'=a+m\eta,\quad a'\in A,\ b'\in B$$

而 $\qquad b'-a'=\eta<1-u,$

但 $\qquad a'\leq u,\ b'\geq 1,\ b'-a'\geq 1-u.$ 矛盾

故 $\qquad u=1=a.\qquad a$ 即为所求。

7、 利用区间套定理证明确界定理：非空有上界数集 E 必有上确界。

〔证〕 E 非空，存在 $a\in E$。 设 b 是 E 的任一上界，则区间$[a, b]$一定包含有E的点，它的右边没有E的点。

把$[a, b]$ 等分为两个区间：$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$和$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$。

若右半区间$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$包含有 E的 点，记$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$为$[a_1, b_1]$，若不包含有 E 的点记左半区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 为$[a_1, b_1]$，又把$[a_1, b_1]$等分为两个区间，若右边一个包含有 E 的点，记它为$[a_2, b_2]$。否则，记右边一个区间为$[a_2, b_2]$. 这样手续无限继续下去，我们得到一个区间套：

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2], \cdots\cdots [a_n, b_n], \cdots\cdots$$

在每一个区间上都包含有 E 的点，但在每一区间的右边都不包含有E的点。依区间套定理，存在唯一的一点C属于一切区间。现在证明 $C=\operatorname{Sup} E$。

先证 C 是 E 的上界. 假如不然，存在某一 $\bar{x}\in E$

$\bar{x} > C$，当 n 充分大时，$\bar{x}$ 将在区间〔$a_n$，$b_n$〕的右边。这与〔$a_n$，$b_n$〕的作法矛盾。

次证对于任给 $\varepsilon > 0$，存在 $X' \in E$，使得 $C - \bar{\varepsilon} < X'$。因为当n 充分大时，区间〔$a_n$，$b_n$〕在 $C-\bar{\varepsilon}$ 的右边，而〔$a_n$，$b_n$〕包含有 E 的点，即一定存在一点 $X'$，使得 $C-\bar{\varepsilon}<X'$。这就证明了 C 是 E 的上确界。

8、 证明不等式

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

〔证〕 容易验证，K为任何正整数时，$\frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}$

故 $$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}<\sqrt{\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\cdot\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

又由 $\frac{2k+1}{2k}>\sqrt{\frac{k+1}{k}}$ 得

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots2n}>\sqrt{\frac{2}{1}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\cdots\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}。$$

所以 $$\frac{1}{\sqrt[2]{n+1}}<\frac{1\cdot3\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}。$$

9、 有限的分数集

$$S=\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

这里 $b_K > 0\,(k=1,2,\cdots n)$，则

$$\min S\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leq \max S.$$

〔证〕我们用归纳法证明。

当 $n=2$ 时， 若 $\min\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\right)=\frac{a_1}{b_1}$ 则 $max\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\right)$

$$=\frac{a_2}{b_2}\ 。$$

因 $b_1, b_2$是正数，故有 $a_1b_2 \leq a_2b_1$

和 $a_1(b_1+b_2)\leq b_1(a_1+a_2)$。由于 $b_1+b_2>0$

因而 $\frac{a_1}{b_1}\leq\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$

另一方面我们看到

$$a_1b_2+a_2b_2\leq a_2b_1+a_2b_2$$

亦即 $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}\leq\frac{a_2}{b_2}$

所以 $\min\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\right)=\frac{a_1}{b_2} \leq \frac{a_1+b_2}{a_2+b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$

$$=max\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\right)$$

同法证明 $\min\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_a}\right)=\frac{a_2}{b_2}$， $max\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\right)=\frac{a_1}{b_1}$ 的情形. 现在假设 $n=k$ 时成立，换句话说

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots\frac{a_K}{a_K}\right\}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_K}{b_1+b_2+\cdots+b_K}$$

$$\leq max\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_K}{b_K}\right\},$$

我们要推出 $n=k+1$ 也成立

设 $A=a_1+a_2+\cdots+a_K, B=b_1+b_2+\cdots+b_K, (B>0)$

$a=\min\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots\frac{a_K}{b_K}\right)$, $b=max\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_K}{b_K}\right)$

明显地

$$\min\left(\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots\frac{a_K}{b_K},\ \frac{a_{K+1}}{b_{K+1}}\right)=\min\left(a,\ \frac{a_{K+1}}{b_{K+1}}\right)$$

$$max\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots\frac{a_K}{ba}, \frac{a_{K+1}}{b_{K+1}}\right)=max\left(b, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

由归纳假定有 $a\leq\frac{A}{B}\leq b$，于是

$$\min\left(a, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)\leq\min\left(\frac{A}{B}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

但 $$\min\left(\frac{A}{B}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)\leq\frac{A+a_{k+1}}{B+b_{k+1}}$$

$$max\left(\frac{A}{B}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)\geq\frac{A+a_{k+1}}{B+b_{k+1}}$$

$$max\left(\frac{A}{B}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)\leq max\left(b, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$（即n=2的情形）

合并之得

$$\min\left(a, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)=\min\left(\frac{a_1}{b_1}\cdots\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)\leq\frac{A+a_{k+1}}{B+b_{k+1}}$$

$$=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}}\leq max\left(b, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

$$=max\left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots\frac{a_k}{b_k}, \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)$$

证得对于任意的自然数 n，都有

$$\min\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots\frac{b_n}{a_n}\right)\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots b^u}\leq max\left(\frac{a_1}{b_1}, \cdots\frac{b_n}{b_n}\right)$$

这里 $b_k$ (k=1, 2, …n) 大于 0，

10、 证明若 $x_1$, $x_2$, $\cdots x_n$ 为正数，而且 $x_1 . x_2 . \cdots x_n=1$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n、$$

等号仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$时成立。

并由此结论推出：对任何正数 $x_1$, $x_2$、$\cdots x_n$，不等式

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq n$、成立，

〔证〕 当 $n=2$时，$x_1x_2=1$、$x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1\cdot x_2}=2$

等号仅当 $x_1=x_2$时成立。

假定命题对于 $n=k$ 时成立，即

$$x_1+x_2+\cdots+x_k\geq k,$$

现在来证明当 $n=k+1$时也成立。

若 $x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$ 则

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=k+1$$

命题已得证，若有某一 $x_i\neq 1$，至少还有某一 $x_j\neq 1$且可假定 $x_i<1$，$x_j>1$，不失普遍性，置 $i=k$，$j=k+1$，从等式

$$x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_{k-1}\cdot(x_k\cdot x_{k+1})=1$$

和归纳假定得到

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k\cdot x_{k+1}\geq k,$$

因而 $x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+x_k+x_{k+1}\geq k+x_k+x_{k+1}-x_kx_{k+1}$

但是 $(1-x_k)(x_{k+1}-1)>0$

即 $x_k+x_{k+1}>x_k\cdot x_{k+1}+1$

所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}>k+1$，

把$x_1$，$x_2$，$\cdots x_n$分别改为 $\frac{x_1}{x_2}$，$\frac{x_2}{x_3}$，$\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}$，$\frac{x_n}{x_1}$

则 $\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}=1$、

故有 $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geq n$、

11、 证明不等式、$\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}$ $(a>0)$

〔证〕 应用不等式$(1+x)^n\geq 1+nx$ $(x>-1)$

置 $x=\sqrt[n]{a}-1$ 则

$$(1+\sqrt[n]{a}-1)^n=a\geq 1+n(\sqrt[n]{a}-1)$$

即得 $\sqrt[n]{a}-1\leq\frac{a-1}{n}$

12、 证明不等式$\left|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right|\le\sqrt[n]{|a-b|}\ (a,b>0)$

〔证〕 因$\sqrt[n]{a+b}\le\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$

若 $a\ge b$，在上不等式中，把 $a$ 改为 $|a-b|$ 得

$\sqrt[n]{a-b+b}=\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{|a-b|}+\sqrt[n]{b}$

若$a<b$，把$b$改为$|a-b|$得 $\sqrt[n]{a+b-a}=\sqrt[n]{b}\le\sqrt[n]{|a-b|}+\sqrt[n]{a}$

不论那种情况，都有

$\left|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right|\le\sqrt[n]{|a-b|}$

13、 $\alpha$、$\beta$是两实数。m、n 表示整数，但不同时为0。

试证：$\inf\{|m\alpha+n\beta|\,|m,\ n\}=0$ .

〔证〕 由一切形如$m\alpha+n\beta$组成之集记之为 E 。若 E内同一点有两种表示方法：

$$m\alpha+n\beta=m'\alpha+n'\beta,$$

这里m与m′或n与n′至少有一对不相同。则

$$(m-m')\alpha+(n-n')\beta=0$$

其系数为整数且不全为0，于是

$$\inf\{|m\alpha+n\beta|\,|m,\ n\}=0$$

命题得证.

现设 E 的每一点只有一个表示方法．假如

$$\inf\{|m\alpha+n\beta|\,|m、n\}=2\delta>0、$$

令 N 是一个正整数，m、n 取下列 2N+1个值

$-N,\ -N+1,\ \cdots-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots N-1,\ N.$

但不同时取0值。于是得到 E 的$(2n+1)^2-1$个点，不妨设$|\alpha|\ge|\beta|$，从原点到这些点的距离一定不超过$2N|\alpha|$、取这些点为中心作长为$2\delta$的区间、这$(2N+1)^2-1$区间互不相交．事实上，假如有两个区间相交，设其区间的中心为$m\alpha+n\beta$和$m'\alpha+n'\beta$，则

$$|m\alpha+n\beta-m'\alpha-n'\beta|<2\delta、$$

这与下确界为 $2\delta$ 的假设矛盾。另一方面，这些区间都落

在以原点为中心，长为$2(2N|\alpha|+\delta)$的区间内，这$(2N+1)^2-1$个区间长之和为

$$2\delta[(2N+1)^2-1]$$

我们得到不等式

$$2\delta[(2N+1)^2-1]\leq 2(2N|\alpha|+\delta)$$

即
$$\delta\leq\frac{2N|\alpha|}{(2N+1)^2-2}$$

N可以取得任意大，不等式的右端可以任意小，这与$\delta$是固定数矛盾。由此证得

$$\inf\{|m\alpha+n\beta|\,|m、n\}=0。$$

## 二、数列极限

14、求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

〔解〕 对于任一整正数K，$1-\frac{1}{K^2}=\frac{K-1}{K}\cdot\frac{K+1}{K}$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

15、求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^K}+\frac{2}{n^K}+\frac{3}{n^K}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^K}\right)$

〔解〕 $S_n=\frac{1}{n^K}+\frac{2}{n^K}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^K}=\frac{1}{n^K}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{2n^{K-2}}+\frac{1}{2n^{K-1}}$$

所以当 $n\to\infty$ 时，如果 $k<2$，则 $S_n\to0$；如果 $k=2$ 则 $S_n\to\frac{1}{2}$；如果 $k<2$ 则 $S_n\to\infty$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^K}+\frac{2}{n^K}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^K}\right)=\begin{cases}0 & 当 k>2\\ \frac{1}{2} & 当 k=2\\ \infty & 当 k<2\end{cases}$

16、设 $|a|<1$，证明当 $n\to\infty$ 时、$1°\ a^n\to0$，$2°\ na^n\to0$；$3°\ n^2a^n\to0$；$4°\ n^Ka^n\to0$；$5°\ n^\alpha a^n\to0$　$\alpha$ 为任一正实数

〔证〕 由 $|a|<1$，令 $\frac{1}{|a|}=b$ 则 $b>1$ 设 $b=1+\lambda$，$\lambda>0$

$$b^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{K!}\lambda^K+\cdots\lambda^n。$$

1°、 $b^n>n\lambda$　当 $n\to\infty$ 时 $b^n\to\infty$，　故 $|a|^n\to0$.

2°、 $b^n>\frac{n(n-1)\lambda^2}{2}$，$\frac{b^n}{n}>\frac{n-1}{2}\lambda^2\to\infty$

故　$\frac{1}{n|a|^n}\to\infty$　即 $n|a|^n\to0$.

3° $b^n>\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda^3$，$\frac{b^n}{n^2}>\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)(n-2)\to\infty$

故 $\frac{1}{n|a|^n}\to\infty$，　即　$n|a|^n\to0$

4°、 $b^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(K+1)!}\lambda^{k+1}$

$$\frac{b^n}{n^K}>\frac{\lambda^{K+1}}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)(n-k)\to\infty$$

因此　$\frac{1}{n^k|a|^n}\to\infty$　故 $n^K|a|^n\to0$ .

5°、 设 $[\alpha]=k$、 $k\le\alpha<k+1$　$n^K\le n^\alpha<n^{k+1}$

$n^K|a|^n\le n^\alpha|a|^n<n^{k+1}|a|^n$

当　$n\to\infty$ 时　$n^K|a|^n\to0$，　$n^{K+1}|a|^n\to0$，

故　$n^\alpha a^n\to0$

17、 若 $a_1+a_2+\cdots+a_k=0$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k})=0$$

〔解〕 因 $(a_1+a_2+\cdots+a_k)\sqrt{n}=0$

故

$$\begin{aligned}&(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k})\\ &=(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k})\\ &-(a_1+a_2+\cdots+a_k)\sqrt{n}\\ &=a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})+\cdots+\\ &\qquad a_k(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})\end{aligned}$$

而 $\sqrt{n+i}-\sqrt{n}=\dfrac{i}{\sqrt{n+i}+\sqrt{n}}\to 0$ 当$n\to\infty$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\cdots+a_k\sqrt{n+k})=0$

18、 设 $Z_n=\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{(n^2+2)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n$

〔解〕 $\dfrac{1}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}<\dfrac{1}{(n^2+i)^{\frac{1}{2}}}<\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}$ $i=2,3,\cdots n-1$

所以 $\dfrac{n}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}<Z_n<\dfrac{n}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n^2+n)^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}=1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}Z_n=1$

19、求$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots\cdots$的极限.

〔解〕 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， $\cos\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}}{2}$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}, \quad \cdots\cdots \quad \cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\ \cdots\ \cdots\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2}}}}{2}=\cos\frac{\pi}{2^2}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\frac{2^n\cos\frac{\pi}{2^2}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{\pi}{2^n}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2\ \sin\frac{\pi}{2}}{\pi\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2^n}}$$

当 $n\to\infty$时 $\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2}\to 1$，

故 $$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\cdots\cdots=\frac{2}{\pi}$$

20、 若 $p>o$，$s$是固定的实数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{(1+p)^n}=0$$

〔解〕 取 $k>s$，$k>0$，当 $n>2k$时

$$(1+p)^n>\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}p^K>\frac{n^K}{2^K}\cdot\frac{p^K}{k!}$$

因此，当$n>2K$时

$$0<\frac{n^s}{(1+p)^n}<\frac{2^K k!}{p^K}n^{s-K}$$

由于 $s-k<0$、 故$n^{s-K}\to 0$（当$n\to\infty$）$\frac{2^K k!}{p^K}$是定数

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^s}{(1+p)1^n}=0$$

21、 试证若 $a_i\geq 0$（$i=1$、$2$，$\cdots p$），则

$$\lim_{n\to\infty}\{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\}^{\frac{1}{n}}=Max\{a_1, a_2\cdots a_p\},$$

〔证〕 设 $Max\{a_1 a_2, \cdots a_p\}=A$

$$A^n\leq a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\leq pA^n,$$

即 $$A\leq(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_b^n)^{\frac{1}{n}}\leq p^{\frac{1}{n}}\cdot A$$

因 $$\lim_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}}=1$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n\}^{\frac{1}{n}}=A$$

※22、 设 $x_1=\frac{1}{2}\left(g+\frac{a}{g}\right)$, $x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)$, $\cdots$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$。 ($a>0$、$g>0$) 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

〔证〕 $$\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(g+\frac{a}{g}\right)-\sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(g+\frac{a}{g}\right)+\sqrt{a}}=\left(\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right)^2$$

设 $$\frac{x_k-\sqrt{a}}{x_k+\sqrt{a}}=\left(\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right)^{2^K}$$

$$\frac{x_{k+1}-\sqrt{a}}{x_{k+1}+\sqrt{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)-\sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)+\sqrt{a}}=\frac{(x_k-\sqrt{a})^2}{(x_k+\sqrt{a})^2}$$

$$\left[\left(\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right)^{2^K}\right]^2=\left(\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right)^{2^{K+1}}$$

因此对任意的自然数 n 、都有

$$\frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}=\left(\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

$\left|\frac{g-\sqrt{a}}{g+\sqrt{a}}\right|<1$, 当n趋于无穷大时上式右端趋于零，而上式左端

的分母 $x_n+\sqrt{a}\geq\sqrt{a}>0$，故$x_n-\sqrt{a}\to 0$

亦即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

23、 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$， 试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a$

〔证〕 令 $a_n=a+\varepsilon_n$，当$n\to\infty$，$\bar{\varepsilon}_n\to 0$ 对于任意给定的 $\varepsilon>o$，存在 $n_o$，当 $n>n_o$时 $|\varepsilon_n|<\varepsilon$.

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=a+\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+n\bar{\varepsilon}_n}{1+2+\cdots+n}$$

而 $$\left|\frac{\varepsilon+2\varepsilon_2+\cdots n_o\varepsilon_{n_o}+(n_o+1)\varepsilon_{n_o+1}+\cdots+n\bar{\varepsilon}_n}{1+2+\cdots+n}\right|$$

$$\leq\left|\frac{n_o(n_o+1)k}{n(n+1)}\right|+\left|\frac{(n_o+1)\varepsilon_{n_o+1}+\cdots n\bar{\varepsilon}_r}{1+2+\cdots+n}\right|$$

这里 $K=Max(|\varepsilon_1|\ |\varepsilon_2|\cdots|\varepsilon_{n_o}|)$

又 $|(n_o+1)\varepsilon_{n_o+1}+\cdots+n\,\varepsilon_n|\leq\{(n_o+1)+\cdots+n\}\bar{\varepsilon}$ $<(1+2+\cdots+n)\varepsilon$ .

$$\left|\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+n\varepsilon_n}{1+2+\cdots+n}\right|<\frac{n_o(n_o+1)k}{n(n_o+1}+\varepsilon$$

当 $n\to\infty$时 $\dfrac{n_o(n_o+1)K}{n(n+1)}\to 0$ $\varepsilon$是可以任意小的正数

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\cdots+n\varepsilon_n}{1+2+\cdots+n}=0.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\alpha a_2+\cdots+na_r}{1+2+\cdots n}=a。$$

註： 本题用第 25 题的方法计算更为简捷。

大24、 数列 $\{x_n\}$ 满足$x_n-x_{n-2}\to 0$ 当$n\to\infty$，

证明 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$$

〔解〕 给定 $\varepsilon>0$，存在充分大的 N，当 $n\geq N$ 时，$|x_n-x_{n-2}|<\varepsilon$ .