科学版

研究生教学丛书

# 泛函分析

黄振友 杨建新 华踏红 刘景麟 编著

科学出版社
www.sciencep.com

南京理工大学研究生院资助项目

科学版研究生教学丛书

# 泛 函 分 析

黄振友　杨建新　华踏红　刘景麟　编著

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

本书是为工科研究生和数学系本科生编写的一本泛函分析入门教材. 本书以 Hilbert 空间为主线进行写作,力求阐述有限维空间与无穷维空间的区别与联系,力求以最少的篇幅讲述最为核心的内容,力求更接近应用背景. 主要内容包括:Hilbert 空间几何学、Hilbert 空间上的有界线性算子、有界算子的谱分解、无界算子、Banach 空间及其上的线性算子等. 最后,在附录中介绍了 Lebesgue 积分理论.

本书可作为高等院校数学系本科生和工科研究生的教材,亦可作为数学工作者的参考用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

泛函分析/黄振友等编著. —北京:科学出版社,2003.7
(科学版研究生教学丛书)
ISBN 7-03-011309-8

Ⅰ.泛… Ⅱ.黄… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 021353 号

责任编辑:杨 波 吕 虹/责任校对:钟 洋
责任印制:安春生/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
西源印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 7 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004 年 1 月第二次印刷 印张:15 1/2
印数:3 001—6 000 字数:305 000

**定价: 24.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

# 前　言

泛函分析是 20 世纪发展起来的一个重要的数学分支,它的历史地位已不容置疑.它的产生和发展,主要受到两方面的推动.

一方面是,人们需要统一的观点表述 19 世纪数学各分支分别积累起来的材料.如积分方程、微分方程、函数论、发散级数等,这些领域的发展都涉及到了无穷维空间.因此,一个研究无穷维空间上分析学、线性代数与几何的崭新数学分支——泛函分析产生了.

另一方面,与量子力学有关的数学问题的研究,成为泛函分析发展的另一转折点.泛函分析在这一领域的作用,可用著名的数学物理大师 M. Reed 和 B. Simon “Methods of Modern Mathematical Physics (Ⅰ)”前言里的一段话来表达:“自 1926 年以来,物理学的前沿已与日俱增的集中于量子力学,以及奠定于量子理论的分支:原子物理、核物理、固体物理、基本粒子物理等,而这些分支的中心数学框架就是泛函分析”.

自 1932 年波兰数学家 Banach 发表第一本泛函分析专著以来,这一学科本身已发展成为一个庞大的数学分支,它包括算子理论、空间理论、非线性分析等,并在众多的学科领域,如微分方程、概率论、量子理论、控制论信号处理等得到广泛应用.

对于数学工作者和以数学作为工具的工程技术人员,泛函分析是一个有效的数学工具,因此,越来越多的人希望学习泛函分析这门课.

本书是以工科研究生和数学系本科生作为读者对象而写的一本入门教材,作者力求讲出有限维空间与无穷维空间的区别与联系;力求以最少的篇幅讲述最为核心的内容,而不追求面面俱到,但对所涉及的理论论证尽可能详细;力求更接近应用背景.因此,作者以 Hilbert 空间为主线进行写作.作者这样做的原因是,Hilbert 空间有内积结构,比 Banach 空间有更好的物理背景,有更为直接的应用,Hilbert 空间中的工具较多,也更好用.

第一章,主要讲 Hilbert 空间的结构、投影定理和标准正交基等.在 §1 中,介绍度量空间,仅作为预备知识,读者不必在此花大量的时间.第二章,讲解 Hilbert 空间上的有界线性算子,其中包括 Hilbert 空间上的线性泛函及 Riesz 定理、有界自伴算子、酉算子和紧算子.考虑到谱理论的重要性,书中用较大的篇幅阐述算子的谱理论.当然,紧算子是以 $\mathbb{C}[a,b]$ 空间上的积分算子为背景的,它本该放在 Banach 空间上讨论,但为了简化证明,便于初学者入门,作者也把它放到了 Hilbert 空

间上讨论.第三章,主要讨论自伴算子和酉算子的谱分解.如果学时不够,这一章可以略讲.考虑到无界算子的重要性,在第四章讲解无界算子,主要讲解闭算子和对称算子及自伴算子.这一章,为了讨论无界算子的谱,先在 Hilbert 空间证明 Banach-Steinhaus 定理,它可看做 Osgood 定理的推广,由此,再证明闭图定理.在§4 中,给出关于对称算子自伴延拓的 Friedrichs 定理,那一定理证明较长,学时较少的情况下可以不讲.第五章,讲解 Banach 空间上几条主要定理.考虑到有的读者没有学过实变函数,在附录中粗略地介绍了 Lebesgue 积分知识.倘读者仍觉不足,可查阅有关参考书.

在本书写作中得到了很多人的帮助,作者十分感激.首先,作者对江泽坚教授的关心深表谢意.作者还感谢陈培鑫博士,研究生杨传富、陈为民、金国海、何凌冰等帮助校正了书稿.南京市玄武区星光印务社全体员工在春节期间,不惮其烦,帮助打印校正,作者也十分感激.本书得以出版,也要感谢南京理工大学研究生院的资助.

作者十分想写好此书,但水平所限,出书时间要求又非常之短,书中问题一定不在少数,若蒙读者和海内方家垂教,作者将万分感激!

作者

2003 年 2 月

于南京孝陵卫

# 目　录

# 第一章　Hilbert 空间几何学

这一章,我们讨论无穷维内积空间的几何结构,作为预备知识,我们对度量空间作一个简单介绍.

如果没有特别声明,本书中 **R** 表示实数全体,**C** 表示复数全体,**Q** 表示有理数全体,**N** 表示自然数全体,**Z** 表示整数全体,**K** 表示实数或复数域.

## §1　度量空间与压缩映射原理

### 1. 度量空间的概念及例

为了讨论更为广泛的集合上的收敛性,我们须将通常的距离概念进行推广.我们注意到,通常的距离具有非负性、对称性、三角不等式等,这正是它的本质.

**定义 1**　设 $X$ 是一个非空集,$X$ 叫作距离空间或度量空间,是指在 $X$ 上定义一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$,满足下面三个条件:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$,且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),\quad\forall x,y,z\in X$;

称 $\rho$ 为 $X$ 上的一个距离,以 $\rho$ 为距离的空间 $X$ 记为 $(X,\rho)$.

这方面的工作归功于法国数学家 Fréchet,他将当时来自微分方程和积分方程中函数族的概念统一表述为函数空间,并引入距离和极限概念,为泛函分析的产生做出了开拓性工作.

**例 1**　$n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$.

设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n\text{ 个}}$,对于任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,定义 $\rho:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 如下:

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}},$$

则 $\rho$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个距离,即 $(\mathbf{R}^n,\rho)$ 是度量空间,称此空间为 $n$ 维欧氏空间.

为证明 $\rho$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的度量需要下面引理.

**引理 1(Schwarz)**　对任意 $(u_1,u_2,\cdots,u_n),(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbf{R}^n$,有如下不等式

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**证明**　若诸 $v_i$ 全为0,结论是正确的.不妨设 $v_i$ 不全为0,则对任意实数 $\lambda$ 都有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (u_i + \lambda v_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

于是,关于 $\lambda$ 的二次方程

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} u_i v_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 0$$

最多只有一个实根.所以,系数判别式满足

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) \leqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

下面验证 $\rho$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中度量:度量空间定义中(1),(2)是显然满足的,仅需验证(3)成立.即若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n), z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbf{R}^n$,验证:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

令 $u_i = x_i - z_i, v_i = z_i - y_i$,则上面不等式化为

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

所以,只要证明

$$\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 2\left[\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{n} v_i^2,$$

而将此式左端展开化简就会发现它等价于

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

而这正是 Schwarz 不等式.　□

特别,当 $n = 1$ 时

$$d(x,y)=|x-y|,\quad \forall x,y\in \mathbf{R}.$$

这恰好是直线上两点之间距离，$\mathbf{R}^n$ 空间距离是 $\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$ 空间距离推广.

**例 2** 酉空间 $\mathbf{C}^n$.

设 $\mathbf{C}$ 为复数集，$\mathbf{C}^n=\underbrace{\mathbf{C}\times\mathbf{C}\times\cdots\times\mathbf{C}}_{n\text{个}}$，对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{C}^n$，定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则$(\mathbf{C}^n,d)$是度量空间，称此度量空间为酉空间.

**证明** 与例 1 类似. □

这两个例子表明，定义 1 所述的一般的度量概念与通常的欧氏度量(距离)概念是相容的，也就是说通常的距离概念满足这里的一般度量的性质.

**例 3** 连续函数空间 $C[a,b]$.

$C[a,b]$ 是区间$[a,b]$上的连续函数的全体，对任意 $x,y\in C[a,b]$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

则$(C[a,b],\rho)$是距离空间.

**证明** (1) $\rho(x,y)\geqslant 0$ 是显然的，且当 $x(t)=y(t)$，$t\in[a,b]$ 时 $\rho(x,y)=0$. 另一方面，若 $x,y\in C[a,b]$，$\rho(x,y)=0$，则

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|=0,$$

从而对任意 $t\in[a,b]$，

$$|x(t)-y(t)|=0,$$

即 $x(t)=y(t)$，所以 $x=y$.

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ 是显然的.

(3) 对$[a,b]$上任意三个连续函数 $x,y,z$，

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}(|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|)\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

所以 $\rho$ 是$C[a,b]$上的一个距离.

若令

$$\rho_1(f,g)=\left(\int_a^b|f(t)-g(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},\quad\forall f,g\in C[a,b],$$

则 $\rho_1$ 也是 $C[a,b]$ 上的度量. □

例 3 表明在任何一个非空集合上可以定义各种不同的度量,从而构成不同的度量空间,如何定义度量,视需要而定.

**例 4**　$l^\infty$ 空间.

$$l^\infty = \{x = \{\xi_n\} \mid x \text{ 为有界数列}\},$$

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|, \quad \forall x = \{\xi_n\}, \quad y = \{\eta_n\} \in l^\infty,$$

则 $(l^\infty,\rho)$ 为度量空间.

设 $(X,d)$ 是度量空间,$Z \subset X$,对任意的 $x,y \in Z$, $\rho(x,y) = d(x,y)$,则 $\rho$ 是 $Z$ 上的度量,$(Z,\rho)$ 称为 $(X,d)$ 的**度量子空间**.

**定义 2**　设 $(X,d_1)$,$(Y,d_2)$ 是两个度量空间,令 $\rho:(X\times Y)\times(X\times Y)\to$ **R** 为如下映射:对任意 $(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)\in X\times Y$,

$$\rho((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_1(x_1,x_2) + d_2(y_1,y_2).$$

易证 $\rho$ 是 $X\times Y$ 上一个度量,$(X\times Y,\rho)$ 称为 $(X,d_1)$,$(Y,d_2)$ 的乘积度量空间.

**2. 序列极限与映射的连续性**

度量概念得到推广,相应地,收敛性与连续性都将得到推广.

**定义 3**　度量空间 $(X,\rho)$ 上的点列 $\{x_n\}$ 叫做收敛于 $x_0$ 是指

$$\rho(x_n,x_0)\to 0 \quad (n\to\infty),$$

这时记作:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 或 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$.

**注**　读者不难发现,例 3 中 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 按度量收敛于 $x_0$ 就是 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x_0$.

设 $A$ 是度量空间 $(X,\rho)$ 中的点集,$x_0 \in X$,若存在 $M>0$ 使得对任意的 $y\in A$, $\rho(x_0,y) < M$,则称 $A$ 是空间 $(X,\rho)$ 的一个有界集.

**定理 1**　设 $(X,\rho)$ 是距离空间,$\{x_n\}$ 是收敛点列,则

(1) $\{x_n\}$ 的极限是惟一的;

(2) $\{x_n\}$ 是有界的点列;

(3) $\{x_n\}$ 的任意子列是收敛的且收敛于同一极限.

**证明**　与数列极限性质证明类似. □

**定义 4**　设 $(X,\rho)$,$(Y,d)$ 是距离空间,$T:X\to Y$ 是映射, $x_0\in X$, $T$ 称为在 $x_0$ 点连续,是指对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时,恒有 $d(Tx,Tx_0)<\varepsilon$.若 $T$ 在 $X$ 上每一点都连续,则称 $T$ 在 $X$ 上连续.

经典分析中关于连续性的 Heine 定理在这里也成立.

**定理2** $T:(X,\rho)\to(Y,d)$ 在 $x_0$ 点连续的充分必要条件是对 $X$ 中每一个收敛于 $x_0$ 的点列 $\{x_n\}$ 均有 $Tx_n\to Tx_0$.

**证明** ($\Rightarrow$) 若 $T$ 在 $x_0$ 连续,设 $\{x_n\}$ 是收敛于 $x_0$ 的任意序列,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\rho(x,x_0)<\delta$ 时,恒有

$$d(Tx,Tx_0)<\varepsilon.$$

而 $x_n\to x_0$,所以存在 $N$,当 $n>N$ 时,$\rho(x_n,x_0)<\delta$,因此

$$d(Tx_n,Tx_0)<\varepsilon,$$

从而

$$Tx_n\to Tx_0.$$

($\Leftarrow$) 若条件满足,但 $T$ 在 $x_0$ 点不连续,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任意 $\delta>0$,存在 $x\in X$,使得 $\rho(x,x_0)<\delta$,但 $d(Tx,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0$. 于是,取 $\delta=\dfrac{1}{n}$,有 $x_n\in X$,$\rho(x_0,x_n)<\dfrac{1}{n}$,但

$$d(Tx_n,Tx_0)\geqslant\varepsilon_0,\qquad n=1,2,\cdots,$$

这时 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,但 $\{Tx_n\}$ 不收敛于 $Tx_0$,矛盾! □

### 3. 度量空间中的拓扑

通常的开集、闭集等概念也有相应的推广.

设 $(X,d)$ 是度量空间,$x_0\in X$,$r>0$. 称集合

$$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}$$

为以 $x_0$ 为中心、$r$ 为半径的开球;

$$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x_0,x)\leqslant r\}$$

称为以 $x_0$ 为中心、$r$ 为半径的闭球;

$$S(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x_0,x)=r\}$$

称为以 $x_0$ 为中心、$r$ 为半径的球面. 对集合 $A\subset X$,若 $x_0\in A$ 且存在 $\varepsilon>0$,使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset A$,则称 $x_0$ 是 $A$ 的内点.

**定义5** 设 $X$ 是度量空间,$A\subset X$. 若 $A$ 的每一个点都是 $A$ 的内点,则称 $A$ 是度量空间的开集;若 $F\subset X$,$X\setminus F$ 是开集,则称 $F$ 是闭集.

显然，$B(x_0,r)$ 是开集，闭球和球面均是闭集.

**定理 3** 设 $X$ 是度量空间，则

(1) 全空间 $X$ 和空集 $\varnothing$ 是开集；

(2) 任意多个开集的并集是开集；

(3) 有限多个开集的交集是开集.

**证明** (1) 是显然的；

(2) 设 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集，$G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$，则对任意的 $x_0\in G$，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使得 $x_0\in G_{\lambda_0}$，由于 $G_{\lambda_0}$ 是开集，所以存在 $\varepsilon>0$，使得 $B(x_0,\varepsilon)\subset G_{\lambda_0}\subset G$，故 $G$ 是开集.

(3) 设 $G_1$，$G_2$ 是开集，$G=G_1\cap G_2$，对任意的 $x_0\in G$，则 $x_0\in G_1$ 且 $x_0\in G_2$，因而有开球 $B(x_0,\varepsilon_i)\subset G_i(i=1,2)$，取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，则 $B(x_0,\varepsilon)\subset B(x_0,\varepsilon_i)\subset G_i(i=1,2)$，所以 $B(x_0,\varepsilon)\subset G$，从而 $G$ 是开集. □

相应地，闭集有如下性质：

**定理 4** 设 $X$ 是度量空间，则

(1) $X,\varnothing$ 均为闭集；

(2) 任意多个闭集的交集是闭集；

(3) 有限多个闭集的并集是闭集.

设 $X$ 是度量空间，$M\subset X$，令

$$B=\bigcap\{F\mid F\supset M,\text{且 } F \text{ 是} X \text{ 中闭集}\},$$

则 $B$ 是闭集，它是包含 $M$ 的最小闭集，称 $B$ 为 $M$ 的闭包，记为 $\overline{M}$. 则易知：$M$ 为闭集的充分必要条件为 $M=\overline{M}$.

**定理 5** 设 $M$ 是度量空间 $X$ 的子集，则 $x\in\overline{M}$ 的充分必要条件是存在 $M$ 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x$.

**证明** ($\Rightarrow$) 若 $x\in\overline{M}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，$B(x,\varepsilon)\cap M\neq\varnothing$. 事实上，若 $B(x,\varepsilon)\cap M=\varnothing$，则 $M\subset X\setminus B(x,\varepsilon)$，而 $\overline{M}$ 是包含 $M$ 的最小闭集，由于 $X\setminus B(x,\varepsilon)$ 是闭集且包含 $M$，所以 $\overline{M}\subset X\setminus B(x,\varepsilon)$，从而 $B(x,\varepsilon)\cap\overline{M}=\varnothing$，于是 $x\notin\overline{M}$，矛盾！

对任意自然数 $n$，取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$，再取 $x_n\in B(x,\dfrac{1}{n})\cap M$，则 $\{x_n\}$ 是 $M$ 中的序列且 $x_n\to x$.

($\Leftarrow$) 若 $x\notin\overline{M}$，则存在 $\varepsilon_0>0$，使得 $B(x,\varepsilon_0)\cap M=\varnothing$，于是，对任意的 $y\in M$，$d(x,y)\geqslant\varepsilon_0$，从而对于 $M$ 中任意序列 $\{x_n\}$，有

$$d(x_n,x)\geqslant\varepsilon_0,\qquad n=1,2,\cdots,$$

所以 $M$ 中任何序列都不收敛于 $x$. □

**推论 1** 设 $M$ 是度量空间 $X$ 的子集,则 $M$ 是闭集的充分必要条件是 $M$ 中任何收敛序列的极限点仍在 $M$ 中.

**定义 6** 设 $X$ 是度量空间,$M\subset X$, $A\subset X$,如果 $\bar{A}\supset M$,则称 $A$ 在 $M$ 中稠密;如果 $A$ 是有限集或可数集,且 $\bar{A}\supset M$,则称 $M$ 是可分的;若 $X$ 是可分的,则称 $X$ 是可分的度量空间.

$\mathbf{R}^n$ 空间($\mathbf{C}^n$ 空间)是可分空间,因为具有有理分量(各坐标实部、虚部都是有理数)的点全体可数,在 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$ 中稠. 可以证明 $C[a,b]$ 是可分的度量空间,因为有理系数多项式全体在其中稠. 但并非所有空间都可分,如 $l^\infty$,它是不可分的. 因为 $l^\infty$ 中各项非 0 即 1 的数列全体不可数,且它们之间距离为 1,因而不可能有可数集能在这样的点集中稠.

**定理 6** 设 $X$ 与 $Y$ 是两个度量空间,$T:X\to Y$ 是映射,则下面三个条件是等价的.

(1) $T$ 是 $X$ 上连续映射;

(2) 对 $Y$ 中任意闭集 $F$,$T^{-1}(F)$ 是 $X$ 中闭集;

(3) 对 $Y$ 中任意开集 $G$,$T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中开集.

这里 $T^{-1}(F)=\{x\in X\mid Tx\in F\}$.

**证明** (1)⇒(2) 设 $F$ 是 $Y$ 中任意闭集,$\{x_n\}\subset T^{-1}(F)$ 是任意序列,且 $x_n\to x\ (n\to\infty)$,由于 $T$ 连续,所以 $Tx_n\to Tx(n\to\infty)$,又 $\{Tx_n\}\subset F$,而 $F$ 是闭集,因此 $Tx\in F$,于是 $x\in T^{-1}(F)$,这表明 $T^{-1}(F)$ 是 $X$ 中的闭集.

(2)⇒(3) 设 $G$ 是 $Y$ 中开集,则 $Y\setminus G$ 是 $Y$ 中的闭集,因此 $T^{-1}(Y\setminus G)$ 是 $X$ 中的闭集,而

$$T^{-1}(Y\setminus G)=X\setminus T^{-1}(G),$$

于是 $X\setminus T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中闭集,从而 $T^{-1}(G)$ 是 $X$ 中开集.

(3)⇒(1) 设 $x_n\to x(n\to\infty)$,$Tx=y$,对任意给定 $\varepsilon>0$,$B(y,\varepsilon)$ 是 $Y$ 中的开集,则 $T^{-1}(B(y,\varepsilon))$ 是 $X$ 中开集,这时,$x\in T^{-1}(B(y,\varepsilon))$,于是存在 $\delta>0$,使得

$$B(x,\delta)\subset T^{-1}(B(y,\varepsilon)).$$

又 $x_n\to x(n\to\infty)$,于是存在 $N$,当 $n>N$ 时恒有

$$d(x,x_n)<\delta,$$

这时 $x_n\in B(x,\delta)$,所以 $Tx_n\in B(y,\varepsilon)$,即

$$d(y,Tx_n)<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = y = Tx,$$

于是 $T$ 在 $X$ 上是连续的. □

**4. 度量空间的完备性**

我们知道,对于实数集 **R**,Cauchy 准则成立,即 Cauchy 列必有极限,这反映的是实数的完备性,下面讨论度量空间中 Cauchy 列的性质.

**定义 7**　度量空间$(X,\rho)$中的点列$\{x_n\}$称为基本列或 Cauchy 列,是指

$$\rho(x_n,x_m)\to 0 \quad (m,n\to\infty),$$

即对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N(\varepsilon)$,使得当 $m,n\geqslant N(\varepsilon)$ 时,$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

**定义 8**　若空间$(X,\rho)$中每一个基本列都收敛于 $X$ 中某点,则称该度量空间是完备度量空间.

完备性概念是非常重要的,度量空间中许多问题可解性化为 Cauchy 列是否收敛问题,这就要用到完备性.

**定理 7**　度量空间中,每一个收敛的序列均是基本列.

**证明**　设 $x_n\to x_0$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $N$,当 $n>N$ 时,恒有

$$\rho(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $m>N,n>N$ 时,

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,x_0)+\rho(x_0,x_m)<\varepsilon,$$

所以$\{x_n\}$是基本列. □

**定理 8**　设 $X$ 是完备的度量空间,$Y\subset X$,则 $Y$ 为完备度量子空间的充要条件是 $Y$ 为 $X$ 中闭集.

**证明**　($\Rightarrow$)设$\{x_n\}\subset Y$且$\{x_n\}$在 $X$ 中收敛于 $x$,则$\{x_n\}$是 Cauchy 列,因为 $Y$ 是完备的,所以 $x\in Y$,从而 $Y$ 是闭集.

($\Leftarrow$)若 $Y$ 是闭集,则 $\overline{Y}=Y$,设$\{x_n\}$是 $Y$ 中的 Cauchy 列,因而是 $X$ 中的 Cauchy 列,由于 $X$ 是完备的,所以存在 $x\in X$ 使$\{x_n\}$收敛于 $x$,而由定理 5 得 $x\in\overline{Y}$,因此 $x\in Y$,于是 $Y$ 是完备的. □

**例 5**　$\mathbf{R}^n$ 空间和 $\mathbf{C}^n$ 空间是完备的度量空间.

**证明**　仅证明 $\mathbf{R}^n$ 空间的完备性. 设$\{x_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本序列,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $K>0$,当 $k,l>K$ 时,有 $\rho(x_k,x_l)<\varepsilon$. 设 $x_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)})$,$k=1,2,\cdots$,则

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(l)}| \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(l)})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \rho(x_k, x_l) < \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

故 $\{\xi_i^{(k)}\}$, $k = 1,2,\cdots$ 是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 列,由实数的完备性,有

$$\xi_i^{(k)} \to \xi_i^{(0)} \quad (k \to \infty), \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

令 $x_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)}) \in \mathbf{R}^n$,则易证 $x_k \to x_0 (k \to \infty)$,所以 $\mathbf{R}^n$ 空间是完备的. □

但 $\mathbf{Q}$ 不完备,取

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1,2,\cdots,$$

则 $\{r_n\}$ 是 $\mathbf{Q}$ 中的基本列,但 $\{r_n\}$ 在 $\mathbf{Q}$ 中不收敛.

特别,在实数 $\mathbf{R}$ 中,对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$,

$$d(x,y) = |x - y|,$$

关于此度量 $\mathbf{R}$ 是完备的,这是实空间的一个重要性质.

**例 6** $C[a,b]$ 关于例 3 定义的距离是完备的.

**证明** 设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中 Cauchy 列,则对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N$,当 $m$, $n > N$ 时,有

$$d(x_n, x_m) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon,$$

因此对一切 $t \in [a,b]$ 有

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon, \quad n, m > N,$$

从而对任意固定的 $t \in [a,b]$, $\{x_n(t)\}$ 收敛,设 $x_n(t) \to x(t) \quad (n \to \infty)$,则对于一切 $t \in [a,b]$,

$$|x_n(t) - x(t)| = \lim_{m \to \infty} |x_n(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon \qquad (n > N),$$

所以 $\{x_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x$,由一致收敛函数列性质知 $x \in C[a,b]$. 上式还表明 $d(x_n, x) \leqslant \varepsilon (n > N)$,即 $\{x_n\}$ 按度量收敛于 $x$. □

下面在 $C[a,b]$ 中定义两种度量:

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| \mathrm{d}t, \quad d_2(x,y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}.$$

度量空间 $(C[a,b], d_1)$ 和 $(C[a,b], d_2)$ 都不是完备度量空间,这说明完备性与度量有关. 下面仅证明 $(C[a,b], d_1)$ 不是完备的距离空间.

**证明** 我们在 $(C[a,b], d_1)$ 中找出一个基本点列,使它在 $(C[a,b], d_1)$ 中

没有极限. 设 $c = \dfrac{a+b}{2}$,定义:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & a \leqslant t \leqslant c - \dfrac{1}{n}; \\ n(t-c), & c - \dfrac{1}{n} < t < c + \dfrac{1}{n}; \\ 1, & c + \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

下证 $\{x_n\}$ 是 $(C[a,b], d_1)$ 中的基本点列,事实上,设 $m > n$,考虑到

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &= \int_a^b |x_m(t) - x_n(t)| \mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int_c^{c+\frac{1}{m}} (m(t-c) - n(t-c))\mathrm{d}t + \int_{c+\frac{1}{m}}^{c+\frac{1}{n}} (1 - n(t-c))\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \to 0, \quad n \to \infty, m \to \infty, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 是 $(C[a,b], d_1)$ 中的基本点列.

下面证明 $C[a,b]$ 中任何元素都不可能是 $\{x_n\}$ 的极限. 事实上,若 $x \in C[a,b]$ 是 $\{x_n\}$ 的极限,则有 $d_1(x_n, x) \to 0\ (n \to \infty)$,但是

$$\begin{aligned} d_1(x_n, x) &= \int_a^b |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^{c-\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t + \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t + \int_{c+\frac{1}{n}}^b |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t \\ &= \int_a^{c-\frac{1}{n}} |-1 - x(t)| \mathrm{d}t + \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| \mathrm{d}t + \int_{c+\frac{1}{n}}^b |1 - x(t)| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时,有 $d_1(x_n, x) \to 0$,故

$$\int_a^c |1 + x(t)| \mathrm{d}t = 0, \quad \int_c^b |1 - x(t)| \mathrm{d}t = 0,$$

而 $x \in C[a,b]$ 于是在 $[a,c]$ 上,$x(t) \equiv -1$,在 $[c,b]$ 上 $x(t) \equiv 1$,而 $\lim\limits_{t \to c^-} x(t) = -1$, $\lim\limits_{t \to c^+} x(t) = 1$,这与 $x(t)$ 在 $c$ 点连续相矛盾,这样 $C[a,b]$ 中任何元素都不是 $\{x_n\}$ 的极限,因此 $(C[a,b], d_1)$ 是不完备的. □