高等数学

学习指导

GAODENGSHUXUE XUEXIZHIDAO

主　编 迪申加卜
副主编 王晨 苏国强
总策划 周淑娇

国防工業出版社
National Defence Industry Press
http://www.ndip.cn

高等数学学习指导

主　编　迪申加卜
副主编　王　晨　苏国强
总策划　周淑娇

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/迪申加卜主编.—北京:国防工业出版社,2003.9

ISBN 7-118-03211-5

Ⅰ.高... Ⅱ.迪... Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 056897 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

新艺印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 16½ 433 千字

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月北京第 1 次印刷

印数:1—5000 册 定价:25.00 元

本书编委会名单

主　编	迪申加卜		
副主编	王　晨	苏国强	
编　者	迪申加卜	王　晨	苏国强
	周淑娇	李育安	陈广雷
	曹维芳		

前　　言

高等数学是高等工科院校的核心基础课之一，学生对它的掌握程度直接关系到后继课程的学习。本书针对学习过程中遇到的概念理解、计算方法技巧、论证思路、应用方式等各种问题进行了详尽的分析与系统的归纳总结，并配有相应的练习，因而适合于初学高等数学者阅读，为学习高等数学起到引导和启迪的作用。

书中的题目符合全国理工科院校高等数学课程教学的基本要求，其中既有与基本内容相匹配的基本题，也有帮助提高的综合题。为解决学生面临的“入门难、不易掌握”的问题，我们注意解题前的分析，解题后的总结，由浅入深、循序渐进。以期达到提高学生分析问题、解决问题的能力的目的。本书分为两部分，共十六章。第一部分(第一章至第十二章)内容包括一元微积分、多元微积分、空间解析几何、级数、常微分方程等内容。第二部分(第十三章至第十六章)内容包括求函数极限的方法、不等式的证明方法、中值定理有关命题的证明、定积分有关命题的证明等几个专题，这几个专题都是教、学中的难点。各章归纳为内容导引、例题精析、即学即练、综合提高及参考答案等几个栏目。

本书适用于高等院校理工科各专业学生，也可供参加全国高等教育自学考试者参考。

本书由迪申加卜任主编，王晨、苏国强任副主编，周淑娇任总策划。编者有(按章序)：王晨(第一、二、十三章)，迪申加卜(第三、十二、十五章)，周淑娇(第四、五、十六章)，李育安(第六、七、十四

章)，曹维芳(第八章)，陈广雷(第九章)，苏国强(第十、十一章)。本书由迪申加卜统一定稿，周淑娇教授主审。

限于编者水平，本书一定存在不足之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2003 年 5 月

目 录

第一部分

第二部分

第一部分

第一章　函数与极限

一、内容导引

(一) 函数

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有惟一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 确定函数的两个要素是：定义域和对应法则.

2. 分段函数

3. 反函数

4. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成，并且可以用一个数学式子表示的函数，叫初等函数.

5. 函数的基本性态

奇偶性：设定义域是关于原点对称的区间 I，$\forall x\in I$，若有 $f(-x)=f(x)$，则称 f 为偶函数，偶函数的图形关于 y 轴对称；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 f 为奇函数，奇函数的图形是关于原点对称的.

四则运算对奇偶性的影响如表 1－1 所示.

表 1-1

f	g	$f\pm g$	$f\cdot g$ 或f/g
奇	奇	奇	偶
奇	偶	不确定	奇
偶	偶	偶	偶

单调性：$f(x)$在(a,b)上单调增是指当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$在(a,b)上单调减是指当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$.

判断函数的单调性，可以从定义出发，通过判定 $f(x_2)-f(x_1)$的符号进行.在第三章中将介绍利用导数的符号进行判定.

周期性：满足 $f(x+T)=f(x)(x\in D,T$ 为正常数)的函数叫周期函数.

有界性：函数 $f(x)$在区间 I 上有界是指存在正常数 M，使$|f(x)|\leqslant M(x\in I)$.

6. 建立函数关系举例

(二)极限的概念及极限运算

1. 数列极限与函数极限概念综述(如表 1-2 所示)

表 1-2

<table>
<tr><th></th><th>类 型</th><th colspan="3">定 义 式</th><th>说 明</th></tr>
<tr><td rowspan="7">趋于定值 a</td><td>$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$</td><td rowspan="7">$\forall\varepsilon>0$</td><td>$\exists N>0$，当 $n>N$ 时</td><td>$|x_n-a|<\varepsilon$</td><td rowspan="7">a、x_0 为有限值，$U^0(x_0,\delta)$为区间$(x_0-\delta,x_0)$与$(x_0,x_0+\delta)$之并</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$</td><td>$\exists X$，当 $x>X$ 时</td><td rowspan="6">$|f(x)-a|<\varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$</td><td>$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$</td><td>$\exists X>0$，当$|x|>X$ 时</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$</td><td>$\exists\delta>0$，当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$时</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$</td><td>$\exists\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$时</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$</td><td>$\exists\delta>0$，当 $x\in U^0(x_0,\delta)$时</td></tr>
</table>

（续）

	类型	定义式			说明
趋于无穷大	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$	$\forall G>0$	$\exists N>0$,当 $n>N$ 时	$\lvert x_n \rvert > G$	将“∞”换作“$+\infty$”或“$-\infty$”时,相应的不等式“$\lvert f(x)\rvert > G$”换作“$f(x) > G$”或“$f(x) < -G$”,则得到正无穷大、负无穷大的定义
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$		$\exists X$,当 $x>X$ 时	$\lvert f(x) \rvert > G$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$		$\exists X$,当 $x<X$ 时		
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$		$\exists X>0$,当 $\lvert x \rvert > X$ 时		
	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$		$\exists \delta>0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时		
	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$		$\exists \delta>0$,当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时		
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$		$\exists \delta>0$,当 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时		

2. 极限性质及其运算

(1) 无穷小量及其运算

(2) 极限的主要性质

设 $\lim u = A$, $\lim v = B$,该极限过程可以是数列极限或函数极限中的任一种. A, B, α, β 是常数,则极限有以下性质.

运算性质	线性规则:$\lim(\alpha u + \beta v) = \alpha \lim u + \beta \lim v$ 积规则:$\lim uv = \lim u \lim v$ 商规则:$\lim \dfrac{u}{v} = \lim u / \lim v\ (\lim v \neq 0)$
比较性质	① 若 $u \geqslant v$,则 $\lim u \geqslant \lim v$ ② 若 $\lim u > \lim v$,则在某个范围 X 上有 $u > v$
有界性质	① 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界 ② 若 $\lim u(x) = A$,则 $u(x)$ 在某个范围 X 上有界
存在性质	① 单调有界准则:单调有界数列必是收敛数列 ② 夹逼准则:若 $u \leqslant w \leqslant v$,且 u、v 趋于 A,则 w 亦趋于 A(三个变量 u、v、w 极限过程相同)

(3) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

(三) 无穷小量的比较

(四) 连续函数及其性质

连续函数是一个重要的函数类,它包括常见的线性函数 $y=ax+b$,二次函数 $y=ax^2+bx+c$,三角函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$,指数函数 $y=\mathrm{e}^x$,对数函数 $y=\ln x$ 等等,连续性是初等函数的一个共性.

1. 连续函数的概念
2. 连续函数的基本性质
3. 闭区间上连续函数的性质
4. 函数间断点及其分类

二、例题精析

【例 1】 在下列各组函数中,指出哪一组表示同一函数.

(1) $f(x)=x^0$ 与 $g(x)=1$; (2) $f(x)=(1-\cos^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 与 $g(x)=\sin x$.

分析:决定函数的两个要素是定义域和对应法则,判断两个函数是否相同,应从上述两个方面入手.

解:(1) $f(x)=x^0$ 的定义域是 $x\neq 0$;而 $g(x)=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故该组的两个函数不等价.

(2) $f(x)=|\sin x|$ 与 $g(x)=\sin x$ 对应法则不同,故该组两个函数不等价.

【例 2】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x+3}+\lg(5-x)$; (2) $y=\arcsin\dfrac{3x}{1+x}$;

(3) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$.

分析:求函数的定义域,就是求使解析式子有意义的 x 的集

合,若一个函数是由多个简单函数的代数和构成的,则求其定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

解:(1) 要使该函数有意义,需使

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ x-3\neq 0 \\ 5-x>0 \end{cases}$$

解得 $2\leqslant x<3$ 或 $3<x<5$

即所求定义域为$[2,3)\cup(3,5)$

(2) 由反三角函数的定义域要求可得

$$\begin{cases} -1\leqslant \dfrac{3x}{1+x}\leqslant 1 \\ 1+x\neq 0 \end{cases}$$

解得该函数的定义域为$[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

(3) 要使函数有意义,使下面的不等式组成立

$$\begin{cases} 16-x^2>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} -4<x<4 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

从而所求定义域为$(1,2)\cup(2,4)$.

【例 3】 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$,求 $f(\cos x)$.

分析:本题已知 $f(\sin x)$,要求 $f(\cos x)$,应先求得 $f(x)$.

解法一:

因为 $f(\sin x)=\cos 2x+1=1-2\sin^2 x+1=2-2\sin^2 x$

所以 $f(x)=2-2x^2$

所以 $f(\cos x)=2-2\cos^2 x=1-\cos 2x$

解法二:设 $t=\sin x$,

则

$$f(\sin x)=f(t)=1-2\sin^2 x+1=2-2t^2$$

故

$$f(\cos x) = 2 - 2\cos^2 x = 1 - \cos 2x$$

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$ $g(x)=e^x$

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解:$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1 & |e^x|<1\\ 0 & |e^x|=1\\ -1 & |e^x|>1\end{cases}$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0\\ -1 & x>0\end{cases}$$

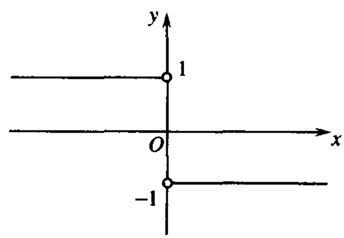

图 1-1

图形如图 1-1 所示.

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1 & |x|<1\\ e^0 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ e^{-1} & |x|>1\end{cases}$$

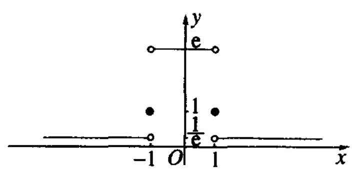

图 1-2

图形如图 1-2 所示.

【例 5】 求 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$的反函数.

分析:由函数 $y=f(x)$求它的反函数的步骤是:先由 $y=f(x)$解出 $x=f^{-1}(y)$,再将 $x=f^{-1}(y)$中 x 和 y 分别换为 y 和 x 即可.

解:由 $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

可得 $\arcsin\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{x-1}{x+1}$,从而解得 $x=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{y-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{y-1}{2}}$,交换 x,y 的位置,即得所求的反函数

$$y=\frac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$$

其定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 3$,且 $x\neq 1+2\sin 1$.

注:通过求反函数的定义域来确定原函数的值域,是求函数值域的有效途径.

【例 6】 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(2) $f(x)=a^x-a^{-x}\quad(a>0)$;

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$;

(4) 狄利克莱(Dirichlet)函数.

$$y=f(x)=\begin{cases}1 & 当\ x\ 为有理数时\\ 0 & 当\ x\ 为无理数时\end{cases}$$

分析:判断函数 $y=f(x)$的奇偶性需从以下两点考虑:

(1) 函数的定义域是否关于原点对称,

(2) 若对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为偶函数;若都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$为奇函数.

解:(1) 因为 $y=f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$f(-x)=\sqrt[3]{[1-(-x)]^2}+\sqrt[3]{[1+(-x)]^2}=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$$

所以该函数为偶函数.

(2) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

(3) 定义域为$(-\infty,+\infty)$,且有

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=$$