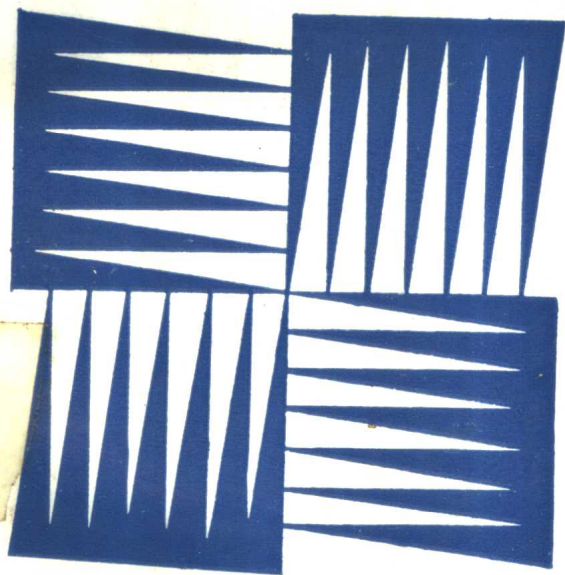


中学教师继续教育丛书

中学数学思维训练

王家燕 王 前 刘玉忠 刘 莉 编著



杭州大学出版社

(浙)新登字第12号

中学数学思维训练

王家燕 王 前 编著
刘玉忠 刘 莉

杭州大学出版社出版
(杭州天目山路34号)

浙江省新华书店总发行 浙江大学印刷厂印刷
787×1092毫米 1/32 10.125印张 222千字
1991年9月第1版 1991年11月第2次印刷

印数 5001—10000

书号: ISBN 7-81035-149-4/G·059

定 价: 4.80元

出版说明

为了配合中学教师继续教育的需要,在上海教育学院院长张家祥教授倡导下,由北京、天津、上海、浙江、四川、辽宁、广东、陕西、湖北、江苏、武汉、杭州等十二省市教育学院联合发起,决定编写出版《中学教师继续教育丛书》。这项工作得到了国家教委师范教育司的热情支持和指导。

中学教师的继续教育,是指中学教师按现行学历规定合格后的非学历的着重于提高政治、业务、教育教学能力的教育,因此《丛书》不能照搬照抄大学本科生段和研究生段的课程内容,也不能等同于现行中学课本的备课资料。

《丛书》应具有科学性、先进性、适用性、针对性,应致力于学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合,教育科学与心理科学同中学学科教学实际的结合。

《丛书》书目大体分为三类:一、思想政治教育和道德修养类;二、专业知识的拓宽和更新类;三、学科教育与学科心理类。其中以第三类为重点。

《中学教师继续教育丛书》设编委会,负责领导和组织《丛

书》的编写工作。上海教育学院院长张家祥教授任主编，杭州大学校务委员会副主任金锵教授任副主编。编委单位各推举一位同志担任编委，他们是(以姓氏笔画为序)：

王威志(天津教育学院副院长，副研究员)

卢自德(四川教育学院院长)

任希健(湖北教育学院院长，副教授)

沈幼璋(杭州教育学院副院长，副教授)

苏式冬(广东教育学院副院长，副教授)

李扬镜(武汉教育学院副院长，副教授)

张鸿顺(北京教育学院院长，教授)

宋靖宗(陕西教育学院副院长，教授)

杨学谅(辽宁教育学院院长，副教授)

姚鸿瑞(浙江教育学院院长，教授)

苗永宽(江苏教育学院院长，教授)

《中学教师继续教育丛书》的编写和出版是一项新的探索性的工作，需要从事中学教师继续教育的同行和中学教育界的广泛支持。我们热切地期待着大家的批评、指正，以便把这套《丛书》编得更好，为提高中学教育质量，发展中学教育事业贡献我们的一份力量。

杭州大学出版社

1991年8月

总 序

由京、津、沪、浙等全国十二省市教育学院协作编写的《中学教师继续教育丛书》陆续出版了。在更新教育观念、深化教育改革的今天，这套丛书的问世是很有意义的。

国家振兴，教育为本；教育振兴，教师为本。能否建设一支思想品德素质和文化业务素质精良的师资队伍，关系到社会主义教育事业的成败。而要加强师资队伍的建设，就得采取必要的措施，使他们能结合工作的需要，不断地再学习、再进修、再提高。

随着大部分中学教师逐步达到现阶段国家规定的合格学历，教师培训工作的重点必将有步骤地转移到开展继续教育上来。这种继续教育是指对已达国家规定学历的教师进行以提高政治思想素质和教育教学能力为主要目标的培训。它包括职务培训、新教师见习期培训、骨干教师培训和对部分骨干教师提高学历层次的培训等方面。做好这项工作，对于建设一支能够坚持社会主义方向，品德高尚，素质优良，结构合理，适应我国教育事业发展需要的教师队伍，有着十分重要的作用。

开展继续教育，不能没有教材。但我们的国家地域辽

阔，人口众多，各地师资队伍建设的客观条件和实际需求很不一样，这就需要从实际出发设置相应的课程，编写不同的教材。这次，一些起步较早、条件相仿的教育学院，根据已有的实践，发挥群体的优势，协作编写这套丛书，它既可供有关院校当前开展继续教育使用，又能兼顾中学教师自学进修的需要，这是切合时宜的。

中学教师继续教育这项工作目前尚处于探索、研究、实践的阶段，因此，可以说这套丛书的编撰工作也同样处在探索阶段，只能随着我国继续教育事业的发展而逐步改进、完善。但编写者在调查研究和从事中学教师继续教育实践的基础上确定丛书的选题和内容，努力把思想政治教育放在首位，致力学科前沿知识与基础知识同中学教育实际的结合，教育科学与心理科学同中学学科教学实际的结合，这是可取的。丛书以科学性、先进性、适用性、针对性作为努力方向，这就把教师培训与提高教育质量有机地联系起来，我相信它将会受到广大教师的欢迎。

编写《中学教师继续教育丛书》是一项开创性的工作。我们希望参编院校发扬团结协作的精神，不断实践，不断提高，共同把这套丛书编好，为中学教师继续教育事业作出贡献。

金长泽

金长泽同志系国家教委师范教育司司长

目 录

第一章 中学数学思维特点和思维训练	1
第一节 中学数学思维的结构	1
第二节 中学数学思维的发展	15
第三节 中学数学思维的训练	30
第二章 中学数学思维品质的训练	44
第一节 数学思维灵活性训练	44
第二节 数学思维批判性训练	63
第三节 数学思维严谨性训练	74
第四节 数学思维广阔性训练	92
第三章 中学数学思维能力的训练	110
第一节 数学抽象思维能力的训练	111
第二节 数学收敛思维能力的训练	138
第三节 数学发散思维能力的训练	158
第四章 中学数学思维方法的训练	182
第一节 数学演绎与归纳方法训练	182
第二节 数学分析与综合方法训练	220
第三节 数学化归方法训练	236
第四节 数学模型方法训练	263
第五节 数学公理化方法简介	273
训练题提示与答案	284
后 记	314

第一章

中学数学思维特点和思维训练

要在中学开展数学思维训练活动，首先应该了解中学数学思维的特点，包括中学数学思维所特有的结构、发展过程及思维训练的基本原则和方法。需要指出，“中学数学思维”指的是了解和运用中学数学知识时的思维活动。显然，中学数学思维与其它学习阶段的思维有很多共通之处。中学数学思维所涉及的基本概念、原理和方法，在小学数学思维以至大学的、数学研究工作者的思维活动中也有所体现。同时，中学数学思维又有自身的特点，与其它阶段的数学思维有许多重要差别。我们在讨论中学数学思维特点时，要兼顾数学思维的共性，突出中学数学思维的特性，使两者有机地统一起来。

第一节 中学数学思维的结构

所谓中学数学思维的结构，指的是中学数学思维的主要方面及其相互关系。一般说来，中学数学思维包括以下三个主要方面：

一、中学数学思维品质

从心理学角度讲，思维品质是思维发生和发展中所表现出来的个性差异。在中学数学教学活动中，经常可以发现有的学生思维敏捷，思路宽，有独创性；而有的学生思考问题很慢、

很简单，思路狭窄，这就是思维品质的差异。良好的数学思维品质需要培养，而培养思维品质的途径就是通过相应的思维训练。在中学数学教学中，需要着重培养和训练的思维品质有：

1. 数学思维的灵活性

数学思维灵活性指的是不过多地受思维定势的影响，善于从旧的模式或通常的制约条件中解脱出来，及时转向，迅速找到解决问题的途径。比如德国著名数学家高斯小时候计算“ $1+2+3+\cdots+100$ ”时，没有象别的同学那样逐项相加，而是想到了“ $1+100=101$ ， $2+99=101$ ， $3+98=101$ ， $\cdots$ ， $48+53=101$ ， $49+52=101$ ， $50+51=101$ ”恰好共有 50 对，因而 $1+2+\cdots+100=101\times 50=5050$ ，这就体现了思维的灵活性。

在做初等几何证明题时，经常出现由于思路错误而证不出来的情况。这时数学教师应当引导学生迅速摆脱错误思路，寻找新的途径，并注意让学生在这个过程中积累和总结经验，这就是在进行数学思维灵活性的训练。

2. 数学思维的批判性

数学思维的批判性指的是对已有的数学表述和论证能提出自己的见解，能独立思考，不盲从，不轻信。对于数学家来说，能发现前人理论中的错误和不足，加以修正和发展，体现了数学思维的批判性。对于学生们来说，能发现自己和同学们原有认识的错误和不足，不断加以改正和完善，也体现了数学思维的批判性。比如，在柯西那个时代，几乎所有的数学家都相信，凡是连续函数一定可微（当然要除去象 $y=1/x$ 中的 $x=0$ 那样的孤立点），可是后来有一些数学家，如德国的魏尔斯特拉斯就不以为然。魏尔斯特拉斯专门构造了一个处处连续又处处不可微的函数，于是否定了前人的传统认识。这就是他的数学思维

具有批判性的表现。在中学数学教学中，教师经常提醒学生要注意检查自己的解题思路，要学会验算，要能够看出自己的毛病所在，这就是在进行数学思维批判性的训练。

3. 数学思维的严谨性

数学思维严谨性指的是思考问题符合逻辑、严密、准确，数学运算精确无误。与严谨性相对立的是直观性。从直观上发现数字和图形的性质和相互关系，有助于活跃思路，找到解决问题的正确途径。但直观性常伴随着模糊、随意、不可靠等弱点，必须通过坚持严谨性来加以克服。比如，初等几何的公理系统，最初曾包含某些直观的、不严谨的成分。在欧几里得建立的公理系统中，并没有明确给出顺序公理，因而可能导致一些错误结论的“证明”，如每个三角形都是等腰的“证明”^①。作 $\triangle ABC$ 中角 A 的平分线和 BC 的垂直平分线（图1-1）：

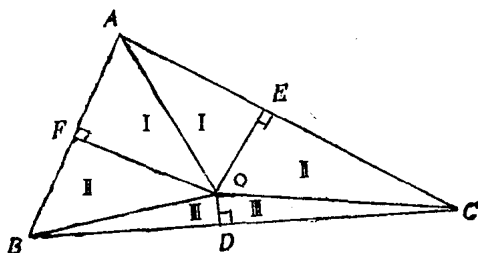


图1-1

如果这两条线平行，则角 A 平分线垂直于 BC ，因而这三三角形是等腰的。如果这两条线相交于 O 点，那么作垂直于 AB 的线 OF 和垂直于 AC 的线 OE 。显然，标着 I 的两个三角形全

^① M. 克莱因：《古今数学思想》（第四册），上海科学技术出版社，1981年版，第75—76页。

等，因而 $OF = OE$ ，标着Ⅲ的两个三角形也全等，因而 $OB = OC$ 。从而标着Ⅱ的两个三角形也全等，所以 $FB = EC$ 。从标着Ⅰ的两个三角形，我们得到 $AF = AE$ ，于是 $AB = AC$ ，从而三角形就是等腰的了。

这个结果当然是荒谬的。图 1-1 实际上画得并不准确。点 O 的位置应该在三角形的外部，在外接圆上，这是可以证明的。而 E 、 F 两点的位置也不是任意的，它们必须分别在三角形中各自边的内部和外部。19 世纪以前的数学家们往往只能靠画出正确图形来确定 E 和 F 的位置，这当然是不够的。严格的几何证明不能依赖于直观图形给出的关系。由于缺乏对“在…之间”的关系即顺序关系的深入理解，就难免出现导致错误结论的“证明”。19 世纪的数学家高斯、帕什等人发现了这个问题。在德国数学家希尔伯特建立的几何公理系统中，明确给出了顺序公理，完全消除了欧几里得公理系统中的逻辑缺陷。这就充分体现了数学思维严谨性的作用。在中学数学教学中，有些学生常犯类似的毛病。比如，有些学生不注意区分相近概念的细微差别，不清楚概念的内涵和外延；审题时只注意明显条件而忽视隐蔽条件，把直观上显而易见的关系当作论证的根据，答题时不完全，不能给出问题的全部答案。这都是思维不严谨的表现。克服这些毛病，就是在进行思维严谨性的训练。

4. 数学思维的广阔性

数学思维的广阔性指的是对一个问题能从多方面考虑，对一个对象能用多种角度观察，对一个题目能想出各种不同的解法，即通常所说的“一题多解”。一题多解的目的当然是为了寻找一种最简捷的解题方法，而最简捷的解法的获得只能来自尽可能广泛深入的思考和选择。大数学家高斯在这方面有卓越才

能。有一次，他的一个朋友舒马赫给他写信，说明了数学家勒姆柯尔关于通过椭圆外一点 P 作椭圆切线的作图法。如图1-2。

勒姆柯尔通过 P 点画任意四条割线 PA_iB_i ($i = 1, 2, 3, 4$)，其中线段 A_1B_2 与 A_2B_1 ， A_3B_4 与 A_4B_3 分别相交于 C 、 D 两点，然后通过 C 、 D 两点的直线

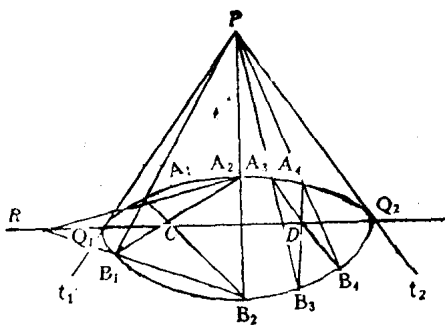


图 1-2

交椭圆于 Q_1, Q_2 两点，连接 PQ_1, PQ_2 ，就是所求的切线 t_1 和 t_2 。舒马赫指出，这个题可用更简单的方法来解，即只需三条割线，因为 A_2B_3 和 A_3B_2 的交点也在 CD 线上，所以有 PA_iB_i ($i = 1, 2, 3$)就足够了。在接到舒马赫的信六天之后，高斯又给出一个更简单的解法：只需两条割线。因为他发现 A_1A_2 和 B_1B_2 连线的交点 R 也在 CD 线上，所以有 PA_1B_1 和 PA_2B_2 就足够了。^①可见，对于这个问题，高斯的思路要比舒马赫和勒姆柯尔更为广阔，因而才能给出如此简捷漂亮的解法。在中学数学教学中，有很多一题多解的训练，其目的都是为了训练学生思维的广阔性。

关于数学思维品质，学术界还有其它一些提法，如思维的敏捷性，独创性，深刻性等等。这些思维品质与上述四种思维品质实质上可归并到一起，如思维的敏捷性和灵活性实际上是相

^① 梅什柯夫斯基：《大数学家的思维方式》，辽宁教育出版社，1986年版。

通的，独创性和批判性紧密相连；数学思维的深刻性主要讲的是抽象逻辑性，与思维的严谨性本质上是统一的。因此，只要讨论上述四种思维品质就足够了。这四种思维品质又是相互联系，相互渗透，相互制约的。没有思维的广阔性就谈不上灵活性，没有灵活性也就谈不上批判性，批判性又需以严谨性为前提，严谨性还制约着广阔性和灵活性。一般说来，思维的严谨性是思维品质的基础，灵活性和广阔性互为条件，批判性是思维品质的升华，体现了思维发展的水平。只有全面发展这四种思维品质，才能具有较强的思维能力，掌握高超的思维方法。

二、中学数学思维能力

思维能力是在一定的思维品质基础上形成的分析问题和解决问题的能力。在中学数学教学活动中，经常可以见到有的学生善于思考，领悟力强，能很快想出各种可能方案，组织好解题思路；而有的学生遇到难题一筹莫展，抓不住问题的本质和关键，找不到解题的门路，这就是思维能力的差异。数学思维能力是思维品质在解题实践中的具体化，用一句通俗的话来说，是实实在在的“真本事”。如果思维能力不强，那么即使思维再灵活，再广阔，再有批判性，到了面对问题时也束手无策。数学思维能力的培养，也需要相应的思维训练。在中学数学教学中，需要着重培养和训练的思维能力主要有：

1. 数学抽象思维能力

“抽象”一词来源于拉丁文“abstractio”，原文含有“排除，抽出”的意思。所谓抽象思维，一般指抽取同类事物的共同的、本质的属性或特征，舍弃其它非本质的属性或特征的思维过程。数学成果具有高度的抽象性，数学的抽象思维也极为发达。数学的抽象思维能力，指的是理解、掌握和运用

数学抽象概念和原理的能力。在中学数学教学中，可以发现有的学生很难理解比较抽象的概念和原理，总是把自己的认识水平停留在同感性直观和经验相适应的程度上，因而总摆脱不了直观经验的局限性。比如初中代数在讲到“用字母表示数”，进而引入代数式和方程时，有的学生感到很难把具体问题中的数量关系用代数式和方程来表示，这就是抽象思维能力不强的表现。实际上，“用字母表示数”是人们数学抽象思维能力的一次飞跃。16世纪法国数学家F.维叶特是第一个有意识地、系统地用字母表示未知量和一般多项式的系数的人。他的工作使代数成为一门研究一般类型的形式和方程的学问，同单纯研究数的算术分清了界限。因此，只有弄清楚“用字母表示数”与发展数学抽象思维能力的关系，才能使学生们数学思维顺利地由算术过渡到代数。

2. 数学收敛思维能力

“收敛思维”是近年来在创造心理学和思维科学研究中提出的一个专有名词，有时也称“集中思维”，它主要指严格的形式化的逻辑思维，其特点是思维目标集中，操作性强，能够获得明确的结果。这个特点好比数学分析上讲的收敛过程，它总是指向一个确定的极限。数学的收敛思维能力表现为理解、掌握和运用形式逻辑思维的能力。这不仅是指逻辑推演准确无误，还要求逻辑推演尽可能简捷、优美，很快获得结果。具体的数学问题往往有很多条件，很多值得考虑的解题线索，很多可以利用的数量关系和已知的数学规律。要在众多条件、线索、关系中很快理出一个头绪，形成一个逻辑上严谨的解题思路，就需要数学的收敛思维能力。在中学数学教学中，教师需要经常引导学生们理清已学过知识之间的逻辑线索，练习由某种

数量关系推演出另一种数量关系，进而把问题的条件、中间环节和答案联结起来，这就是在进行收敛思维能力的训练。

3. 数学发散思维能力

“发散思维”是同“收敛思维”特点相反的思维活动。发散思维主要是指不严格的非逻辑思维，其特点是思维目标分散，无确定的活动程序和规则，能够获得多种可能的结果。这个特点好比数学分析上讲的发散过程的特点，其目标总是不确定的。数学的发散思维能力表现为理解、掌握和运用非逻辑思维的能力。这种能力又可具体分为以下几种基本类型：

(1) 数学想象能力

想象是人脑中对已有表象进行加工创造新形象的心理过程。数学想象是在数学认识活动中获得和运用形象思维的过程。中学数学教学中有许多涉及形象思维的地方。如初等几何中大量涉及几何图型的直观形象；解析几何又使人们把图的形象同数的形象联系在一起。对数字之间关系也可以产生某种形象化的感觉，通常称为“数觉”，它使人们有可能想象各种数量关系之间的可能联系。几何证明题时常要靠添加“辅助线”来解决，“辅助线”的存在及其与已知图形的联系，就是靠人们想象出来的。运用“数觉”的想象要比运用几何图形的想象更困难一些，而“数觉”的丰富和敏感程度往往标志着一个人思维能力的水平。有些数学家往往凭借“数觉”想象出普通人很难发现的数学联系。比如印度数学家拉玛努真的“数觉”就相当强。据说英国数学家哈代有一次乘车去看他，汽车牌号是1729。拉玛努真想了一下马上说，这是能用两种方法表示为两个整数的立方和的最小整数（ $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ ）。①

① 李学数：《数学和数学家的故事》，香港，1980年版，第46页。

(2) 数学直觉能力

直觉是对事物本质的直接领悟或洞察。数学直觉是对数学对象事物的直接领悟或洞察。在中学数学教学活动中,经常可以遇到“灵机一动,计上心来”,突然想到解题思路的事情,这就是数学直觉能力在起作用。数学直觉的出现并不是神秘莫测的。它实际上是经过长期紧张思考之后,适当放松情绪,让思路自由舒展,突然使各种想法融会贯通的结果。数学直觉可以用于在原来认为不相同或无关的两个事物或更多事物之间觉察到同一性或内在联系,也可以用于选择有希望的解题思路,避免在无价值的问题上耗费精力。据说,解析几何的建立就是数学直觉的产物。1619年,法国大数学家笛卡儿在多瑙河畔诺伊堡军营服役时,整天沉迷在思考之中,探索几何与代数的本质联系。11月10日晚,他心中极为兴奋,为的是“发现了一种不可思议的科学的基础”。笛卡儿写道:“第二天,我开始懂得这惊人发现的基本原理。”这就是指他得到了建立解析几何的线索。^①显然笛卡儿高度的数学直觉能力使他获得了这一重大发现。

(3) 数学猜测能力

猜测是根据某些已知事实和知识对未知事物及其规律性的似真推断。数学猜测是根据已知数学条件和数学原理对未知的量及其关系的似真推断。它具有一定的科学性,又具有很大程度的假定性。猜测可以通过想象或直觉来得到,也可以通过不完全归纳、类比、变换条件等途径得到。有些时候,逆向思维会带来很有价值的猜测。所谓逆向思维,是指在循着某一固定思路解决数学难题屡遭失败之后,沿着相反的方向进行思

^① 转引自梁宗巨区《世界数学史简编》,辽宁人民出版社,1980年版,第196页。

考,提出新的猜测。非欧几何学的建立实际上就是逆向思维的结果。数学猜测能力是一种具有多种成分的能力,它包含数学的想象能力和直觉能力,也包含对猜测的部分内容和中间环节进行论证和反驳的逻辑思维能力,还包含一定的经验和技巧,需要通过全面的训练加以培养。具备数学猜测能力是获得数学发现的重要因素,也是成功地运用数学知识解决实际问题所必不可少的条件。因此,在中学数学教学中进行数学猜测能力的训练,对于学生们当前和长远的需要都是很有好处的。

数学的想象能力、直觉能力和猜测能力,都是数学发散思维能力。这种能力富于创造性,能够提供大量新观点、新思维、新方法。但是单靠发散思维还不能够完成数学的创造性思维活动。著名数学家徐利治先生指出:“数学创造往往开始于不严格的发散思维,而继之以严格的逻辑分析思维,即收敛思维。”^① 发散思维虽然能够提供有价值的重要设想,但其成果并未经过严格验证。只有经过验证的东西才是数学上可以接受的。因此,发散思维和收敛思维需要相辅相成,互相促进。发散思维能力训练和收敛思维能力训练也需要结合起来进行。

三、中学数学思维方法

思维方法是比思维能力更具体的东西,它是人们在思维过程中处理各种问题的基本方法。思维方法大体上可分为两个层次,一个层次是各学科思维都要用到的逻辑思维方法,如演绎、归纳、分析、综合、类比等等;另一层次是每个学科自身所特有的基本方法,如数学中的化归方法、模型方法、公理化方法、无穷小方法等等。根据中学数学教学的实际情况,需要

^① 徐利治:《数学方法论选讲》,华中工学院出版社,1988年版,第182页。