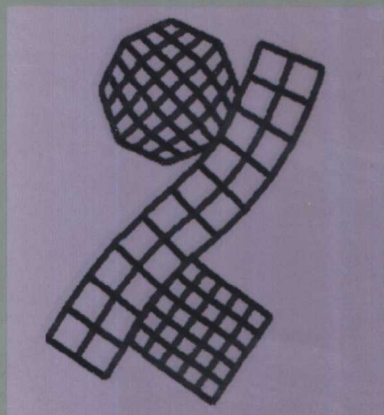


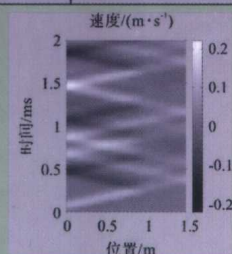
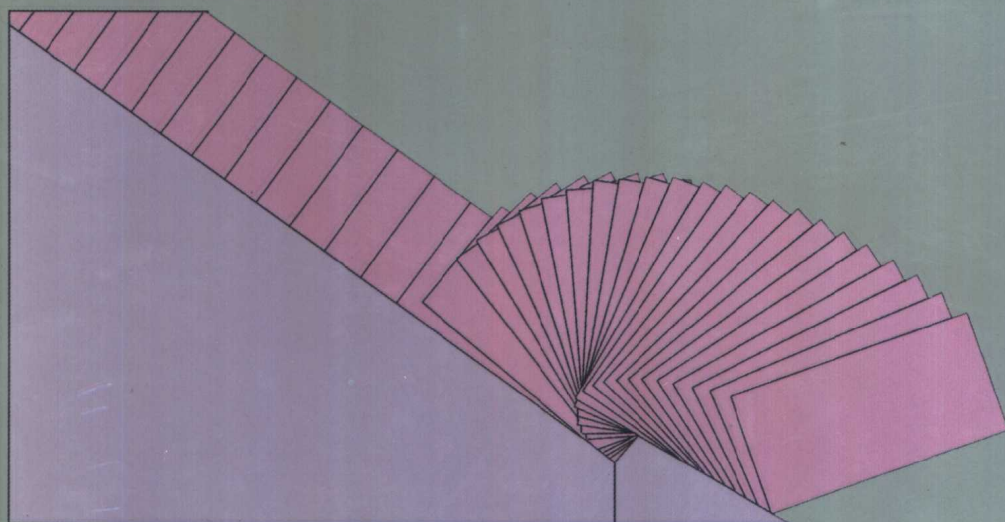
ADVANCED CONTACT DYNAMICS

# 现代接触动力学

彼得·艾伯哈特 胡 斌 著



ADVANCED  
CONTACT  
DYNAMICS



东南大学出版社  
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 现代接触动力学

Advanced Contact Dynamics

彼得·艾伯哈特 胡斌 著

东南大学出版社

## 内容提要

接触动力学是一门有重要理论与实用意义并有待于深入研究的学科。接触问题,如摩擦和碰撞,出现在诸如机械、仪器及车辆等许多工业领域中。只有解决其计算问题,能在许多情况下模拟其真实过程,改进设计,减少费用,降低噪声等。

本书全面介绍了当今计算接触动力学问题的基本方法,包括多刚体动力学、线性和非线性有限元、刚体接触和弹性接触以及数值和几何问题的算法。着重讨论了如何用多刚体和有限元混合算法计算求解大运动、大变形的动态接触问题,并对描述碰撞接触过程的理论模型和测试手段作了扼要的介绍。

本书可作为力学、机械、车辆、仪器等专业研究生的教材,也可作为以上领域科技人员的参考书。

## ABSTRACT

Contact dynamics is an important subject in theory and practice and still needs thorough studies. Contact problems with friction and impacts appear in many industrial fields such as mechanics, instruments, vehicles, and so on. Only when these their computational problems is solved, it is possible to simulate real contact process, improve design, save cost and reduce noise.

In this book, today's basic methods of computing contact dynamics are introduced completely, which include multibodies dynamics, linear and nonlinear finite element methods, contacts of rigid bodies or deformable bodies, numerical and geometric algorithms, and so on. The attention is focused on how to solve the dynamical contact problems with large motion and large deformation by the hybrid multibody system finite element algorithm. And the theory model and experiment approaches to describe the contact process are discussed.

This book is written for graduate students majoring in mechanics, machines, automobile, instruments and others as a textbook, or for scientists and engineers studying in these fields as a reference.

## 图书在版编目(CIP)数据

现代接触动力学/彼得·艾伯哈特 胡斌著. —南京:  
东南大学出版社,2003.2

ISBN 7-81089-054-9

I. 现... II. ①彼... ②胡... III. 接触—动力学  
IV. O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 090737 号

东南大学出版社出版发行  
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 兴化市印刷厂印刷  
开本:787mm×1092mm 1/16 印张:19.75 字数:493千字

2003年6月第1版 2003年6月第1次印刷

印数:1~2000 定价:39.00元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换。电话:025 3795802)

## 序 (Foreword)

接触问题出现在固体力学的许多领域中,并在机械工程和自然科学中有着广泛的应用,例如行走完全取决于足与路面的接触。尽管接触与碰撞现象普遍存在,但是接触动力学至今还未能被充分地认识。从工程的观点来看,接触动力学的理解和建模对产品设计,例如对减轻磨损、消除噪音以及提高安全性至关重要。从科学的观点来看,接触的处理非常麻烦却又十分需要,其算法不仅复杂,且计算时间也相当惊人。为了对所描述的机械问题给出可靠的结果,谨慎和经验往往必不可少。除了变形和波的传播外,接触的单向性导致的不等式约束乃为数学上难以处理的根本原因。

在《现代接触动力学》这本书中,彼得·艾伯哈特教授和胡斌博士介绍了当今处理动态接触问题重要的数值方法、分析模型以及实验手段。在处理接触问题中,作者以建模黄金准则为本,即模型只需必要的精度,越简单则越好。对于低频的刚体运动,可用多刚体动力学方法,但当考虑高频的波动现象时,有限元法则为处理接触问题的有效手段。作者综合这两种方法的优点,充分利用多刚体动力学方法的计算效率和有限元法的计算精度,建立了多刚体/有限元混合方法解决含有接触和碰撞的多体系统问题。数值算法必须通过分析和实验结果加以检验,该书还介绍了一些碰撞响应的分析方法和试验仪器。本书全面、系统介绍了理解和计算接触问题所必备的知识 and 算法,鉴于它的完整性,本书也能作为工具书使用。

作者在我的研究小组中工作数年。作者提出和改进了该书中陈述的许多方法,这些研究成果散见于各种国际著名的科学杂志中。作者多次在国际学术会议上宣读论文并应邀在世界各地作专题报告。在2000年,彼得·艾伯哈特因

Contact problems are found in many areas of solid mechanics with broad application to mechanical engineering and natural science. For example, locomotion is based completely on the contacts between feet and grounds. Though contacts and impacts exist in a wide variety of circumstances, contact dynamics is still not well enough understood. From an engineering point of view, the understanding and modeling of contact dynamics plays an important role in design, for example, to reduce wear, to avoid noise or to enhance the safety. From a scientific point of view, the treatment of contacts is very demanding and complicated. The algorithms are complex and numerical simulations lead to high computation time; they require great care and experience in order to give reliable results describing the mechanical problem appropriately. Besides the phenomena of deformation and wave propagation, the unilateral nature of contacts, which mathematically leads to inequality constraints, is the main reason of the challenges.

In the book, *Computational Contact Dynamics*, Peter Eberhard and Bin Hu present important numerical, analytical and experimental methods known in the recent literature for describing dynamical contact problems. In modeling contacts, the authors keep in mind the golden rule that models must be as simple as possible and as accurate as necessary. For the low frequency rigid body motion, the multibody system method is used. If, on the other hand, high frequency wave propagation is considered, the finite element method provides powerful tools for the analysis of contacts. To combine the benefits of both approaches—efficiency of rigid body models and accuracy of finite element models, hybrid methods for multibody systems with impacts and contacts have been developed by the authors. Numerical algorithms should be validated by analytical and experimental investigations. In this book, some analytical methods and experimental tools for measuring impact responses are also mentioned. The book contains in a con-

在多刚体有限元混合法上的研究成果而荣获德国应用数学和力学学会颁发的著名的理查德·冯·密斯奖。彼得·艾伯哈特和胡斌长期在合作研究中心进行德国研究基金会资助项目“连续体力学中的多场问题”SFB404的研究工作,在这个项目中应用数学家和理论研究工程师们从1995年起一直在斯图加特大学进行合作研究。作者所提出的方法越来越频繁地被用于解决理论和工程问题,例如,作者的方法被成功用于解决著名博世公司的减少汽车刹车噪声这一重大项目。

鉴于解决接触问题的迫切性和在工业上的应用背景以及作者在接触研究领域里丰富的知识,我确信,本书将非常有益于那些打算在接触动力学领域里工作或者那些在某些方面的知识还欠缺而想进一步充实的学生、研究者以及专业人员。本书内容极为丰富,论述严谨,既可作为入门教科书又可作为阐述热门研究领域最新进展的专著。

祝读者从这本极具价值的书中获益并在研究中取得成功!

维纳·席勒恩教授  
国际理论与应用力学联合会主席  
于德国斯图加特大学

sistent, complete and well organized manner all necessary information and algorithms which are required to understand and simulate contact problems, and it can be used in its completeness as desk reference.

The authors have been working in my research group for many years. They have developed and enhanced many of the described ideas and published their results in highly respected international scientific journals. The authors presented their contributions at many international conferences and workshops and gave invited presentations about their work in seminars all over the world. In the year 2000, Peter Eberhard received the prestigious Richard-von-Mises-Award of the GAMM (Society of Applied Mathematics and Mechanics) for his development of the hybrid contact approach. Peter Eberhard and Bin Hu have been involved in the Collaborative Research Center SFB 404 on Multi-field Problems in Continuum Mechanics sponsored by the DFG (German Research Council). In this program applied mathematicians and theoretical engineers are collaborating at the University of Stuttgart since 1995. The presented methods are more and more frequently used for the solution of academic and industrial problems, e. g. in a large research project of the Robert Bosch GmbH, a leading engineering company, where the reduction of braking noise for automobiles is investigated.

Given the timeliness and the industrial relevance of contact problems as well as the outstanding expertise of the authors in the field, I have no doubt that this book will be very useful for students, researchers and practitioners who intend to start working in contact dynamics or to improve their knowledge about certain aspects they are not yet familiar with. Due to the vast amount of presented material and its consistent description it can serve both as introductory textbook or as research monograph describing some of the latest developments in an active field of research.

I wish the reader good success in his studies and a lot of benefit from this most valuable book.

*Werner Schiehlen*

Full Professor of Mechanics  
University of Stuttgart, Germany

# 前 言

机械系统接触问题既在理论上深奥复杂,又在工程上具有重要的应用背景。接触问题的研究涉及多学科和多领域,它们包括连续体介质力学、刚体力学、结构力学、实验力学、几何学、计算机和数值算法。自从赫兹开创性地提出接触理论以来,人们一直试图给出弹性体接触问题的解析解,可是这些解析解只能局限于少数重要而又简单的几何体。随着计算结构力学和计算机软、硬件技术的不断发展,在 20 世纪 70 年代有限元法开始应用于计算接触问题,如今人们对静态接触问题已有了充分的认识,而对动态接触问题,即所谓的碰撞问题研究则是方兴未艾。

描述动态接触问题的简单方法采用刚体接触模型,不考虑物体的变形。复杂方法视物体为变形体,采用弹性接触模型,用有限元法或边界元法计算。这两种模拟方法各有长短,数年来作者一直尝试结合有限元法和多刚体方法的优点,建立了多刚体/有限元混合算法,以达到解决接触问题既计算效率高又计算精度高的目的。物体接触过程中,接触力频率很高幅值很大,物体的变形必须予以考虑,宜用有限元法计算。物体脱离接触后,碰撞引起的弹性振动由于材料阻尼将逐渐地消失,物体运动主要表现为刚性运动,这时宜用多刚体方法计算。为使读者能够掌握多刚体和有限元混合算法计算动态接触问题,本书力求完整地介绍计算动态接触问题的基本知识和重要工具,其目的不在于个别方法的详细分析和描述,旨在不同方法的比较和综合运用。为有助于读者进一步深入阅读和研究,本书在具体章节中给出了大量相关的参考文献。

本书根据近年来作者在德国斯图加特(Stuttgart)大学力学研究所和爱尔朗根(Erlangen)大学应用力学研究所的研究成果而撰写。在国际著名力学家、国际理论与应用力学联合会前任主席、现任副主席维纳·席勒恩(Werner Schiehlen)教授的指导下,接触动力学研究组在数值计算、理论分析和实验研究中做了大量的工作,完成了很多出色的研究报告和学位论文。席勒恩教授渊博的知识、敏锐的洞察力以及与同行们广泛的联系和交往为丰硕的研究成果奠定了基础。接触动力学的研究是在德国科学基金委员会(DFG)长期资助下进行的。本书第一作者曾受资助在美国加州大学柏克利

分校进行了为期1年的专门研究,第二作者长期从事德国科学基金委员会重大合作研究项目SFB404“连续体力学中的多场问题——机械动力学中接触问题”研究,感到有责任和义务把接触动力学的国际最新研究进展,国际重大合作研究项目SFB404的部分研究成果和作者在国际力学期刊中发表的相关论文汇集成册,奉献给中国同仁。德国科学基金委员会9年来的慷慨资助和支持为作者从事接触动力学研究提供了必要的条件。作者的朋友德国科特布斯(Cottbus)大学的D. Bestle教授对作者的接触动力学研究给予了有益的建议和帮助,作者的很多同事和学生如J. Pfister, L. Kuebler, A. Itigin, K. Treutner, R. Seifried, 李健, 李茁, M. Maess, H. Herberth, B. Muth, 晏水平等在接触动力学的研究中做了大量工作,西安工业学院姜寿山教授在碰撞问题几何识别方面做了部分工作。

本书是在南京理工大学芮筱亭教授和中国驻德大使馆教育处彭正梅博士的鼓励下撰写的,在写作和出版过程中自始至终得到芮教授的鼎力相助。他的学生陆文广博士为本书的出版提供了许多帮助。德国Eberspächer公司董明博士细致地审阅了本书有限元和数值计算部分初稿,西南交通大学金学松教授仔细地审阅了接触计算部分,提出了许多宝贵的修改意见。芮筱亭和金学松教授又认真地校阅了全书初稿,对本书进一步地加以润色。力学大师席勒恩教授在百忙中欣然为本书写序。本书的出版得到了东南大学出版社的热情支持。在研究工作和书稿撰写中,作者的夫人们Sonja Fiege-Eberhard和吴仪女士总是给予作者特别的鼓励、支持和谅解,做出了最为宝贵的贡献。值此作者向所有帮助和支持者致以最诚挚的谢意。

接触动力学研究仍处于不断发展中,作者热忱欢迎专家学者们的评论。接触动力学需要通过研究者们相互接触与不断交流,以期更快地发展造福人类。

作 者

于2003年1月

第一作者的电子邮件地址: eberhard@mechb.uni-stuttgart.de,

第二作者的电子邮件地址: atena.hu@daimlerchrysler.com。

# 目 录 (Contents)

<b>1 绪 论 (Introduction)</b> .....	1
<b>2 多刚体系统 (Multibody Systems)</b> .....	5
2.1 多刚体系统运动学 (Kinematics of multibody systems) .....	5
2.1.1 自由体运动学 (Kinematics of free bodies) .....	6
2.1.2 约束体运动学 (Kinematics of constrained bodies) .....	7
2.2 多刚体系统动力学 (Kinetics of multibody systems) .....	9
2.3 多刚体系统计算软件和求解过程 (Approaches and programs for multibody systems) .....	10
2.4 简单的多刚体系统示例 (Example of a simple multibody system) .....	12
<b>3 线性有限元法 (Linear finite element method)</b> .....	15
3.1 弹性理论基础 (Foundations of the theory of elasticity) .....	15
3.2 偏微分方程的近似解 (Approximate solutions of partial differential equations) .....	22
3.3 加权余量法 (The weighted residual method) .....	27
3.4 基本边界条件 (Essential boundary conditions) .....	27
3.5 坐标变换 (Coordinate transformations) .....	29
3.6 单元格式 (Elements) .....	31
3.6.1 等参单元 (Isoparametric elements) .....	31
3.6.2 分类 (Classification) .....	31
3.6.3 线性三角形单元 (Linear triangular element) .....	32
3.6.4 二次三角形单元 (Quadratic triangular element) .....	35
3.6.5 双线性四边形单元 (Bilinear rectangular element) .....	37
3.6.6 二次 Serendipity 四边形单元 (Quadratic Serendipity element) .....	38
3.6.7 双二次四边形单元 (Biquadratic rectangular element) .....	39
3.7 边界载荷 (Boundary loads) .....	41
3.7.1 线性插值单元 (Linear interpolation elements) .....	41
3.7.2 二次插值单元 (Quadratic interpolation elements) .....	42
3.8 应力计算 (Stress calculation) .....	44
3.8.1 线性三角形单元 (Linear triangular element) .....	44



3.8.2	二次三角形单元 (Quadratic triangular element)	45
3.8.3	双线性四边形单元 (Bilinear rectangular element)	46
3.8.4	二次 Serendipity 四边形单元 (Quadratic Serendipity element)	46
3.8.5	双二次四边形单元 (Biquadratic rectangular element)	48
3.8.6	等效应力 (Stress criteria)	50
3.9	系统装配 (Assembling finite elements)	51
3.10	线性有限元举例 (Numerical examples of linear finite elements)	53
<b>4</b>	<b>非线性有限元法 (Nonlinear finite element method)</b>	<b>55</b>
4.1	非线性溯源 (Source of nonlinearities)	55
4.2	导数概念以及线性化 (Derivatives and linearization)	56
4.3	连续体力学中的基本变量 (Some definitions in continuum mechanics)	57
4.3.1	应力的度量 (Stress measures)	57
4.3.2	关于刚体运动的不变性 (Invariance to rigid body motion)	58
4.3.3	能量共轭的应力和应变张量 (Energy conjugate stress and strain measures)	59
4.4	材料的本构关系 (Constitutive laws)	61
4.5	强解形式 (The strong form)	63
4.6	弱解形式 (The weak form)	65
4.6.1	虚功原理 (Principle of virtual work)	65
4.6.2	有限元近似 (Finite element approximation)	66
4.6.3	切线刚度矩阵的计算 (Computation of the tangential stiffness matrix)	68
4.6.4	线性有限元和非线性有限元的一致性 (Consistence between the linear and nonlinear finite element method)	70
4.7	求解过程 (Solution procedure)	70
4.8	非线性有限元算例 (Numerical example of nonlinear finite element)	74
<b>5</b>	<b>刚体接触 (Contact of rigid bodies)</b>	<b>77</b>
5.1	刚体接触运动学 (Contact kinematics)	77
5.2	接触类型 (Contact classification)	79
5.2.1	含有接触力的运动方程 (Equations of motion with contact forces)	79
5.2.2	碰撞的动量守恒 (Balance of momentum for impact)	80
5.2.3	接触状态 (Contact status)	80
5.3	持续接触计算 (Approach to persistent contact)	81

5.4	碰撞计算 (Approach to impact) .....	81
5.5	接触过程数值模拟 (Numerical contact simulation) .....	84
5.6	刚体接触举例 (Examples of contact of rigid bodies) .....	85
5.6.1	自由下落的圆柱体 (Falling cylinder) .....	85
5.6.2	抛落的积木块 (Dropping block) .....	87
<b>6</b>	<b>弹性接触 (Contact of deformable bodies) .....</b>	<b>92</b>
6.1	接触问题的描述 (Problem description) .....	92
6.2	特征鉴别 (Characteristics of contacts) .....	93
6.3	带有约束条件的优化 (Optimization with constraints) .....	96
6.3.1	独立与非独立的变分 (Independent and dependent variations) .....	96
6.3.2	优化问题和必要条件 (Optimization and necessary conditions) .....	96
6.3.3	优化计算方法 (Optimization methods) .....	97
6.4	接触问题看作优化问题 (Contact as an optimization problem) .....	99
6.4.1	法向接触 (Normal direction) .....	99
6.4.2	切向接触 (Tangential direction) .....	101
6.5	切线刚度矩阵和接触余量的确定 (Tangential stiffness matrix and contact residual) .....	104
6.5.1	接触几何 (Contact geometry) .....	105
6.5.2	法向接触 (Normal contact) .....	107
6.5.3	切向接触 (Tangential contact) .....	112
6.6	接触算法概要 (Survey of contact algorithms) .....	125
6.7	其他方面 (Other aspects) .....	127
6.7.1	矩阵分块求解 (Matrix decomposition) .....	127
6.7.2	接触边线 (Contact segment) .....	127
6.7.3	单通算法和双通算法 (One-pass and Two-pass algorithms) .....	128
6.7.4	接触应力的平滑 (Smoothing of contact stresses) .....	128
6.7.5	速度和加速度的校正 (Modification of velocity and acceleration) .....	129
6.7.6	互补问题 (Linear complementary problems) .....	129
6.7.7	接触状态判别 (Detection of the contact status) .....	130
6.8	弹性接触问题算例 (Numerical examples for elastic contacts) .....	131
6.8.1	经典的赫兹接触问题 (Classic hertzian contact problem) .....	131
6.8.2	带有摩擦的接触 (Contact with friction) .....	134
<b>7</b>	<b>数值算法 (Numerical algorithms) .....</b>	<b>140</b>
7.1	数值体积分 (Numerical domain integration) .....	140

7.2	数值时间积分 (Numerical time integration)	144
7.2.1	有限元系统的数值时间积分 (Numerical integration for finite element systems)	144
7.2.2	中心差分法 (Central difference method)	145
7.2.3	纽马克法 (Newmark method)	148
7.3	求解非线性方程组 (Solving nonlinear equations)	150
7.4	非线性有限元问题的求解 (Solving nonlinear finite element problems)	152
7.5	线性方程组的求解 (Solving linear equations)	154
7.5.1	问题陈述 (Problem description)	154
7.5.2	具体算法 (Algorithms)	155
7.5.3	直接算法 (Direct methods)	155
7.5.4	迭代算法 (Iterative methods)	158
7.5.5	稀疏系数的线性方程组 (Linear systems with sparse matrices)	160
7.5.6	应用举例 (Examples)	166
7.6	求解线性互补问题 (Solving linear complementary problems(LCP))	172
7.6.1	线性互补问题的直观描述 (Geometric description of LCP)	173
7.6.2	与二次型优化问题的关系 (Relation to the quadratic optimization problems)	175
7.6.3	线性互补问题的数值算法 (Numerical algorithms for LCP)	176
<b>8</b>	<b>几何问题算法 (Geometric algorithms)</b>	<b>178</b>
8.1	碰撞识别 (Collision detection)	178
8.1.1	粗检验和细检验 (Coarse and fine collision tests)	178
8.1.2	平面体碰撞检验 (Planar collision test)	179
8.1.3	空间体碰撞检验 (Spatial collision test)	180
8.2	几何辅助变量的计算 (Computation of geometric variables)	185
8.2.1	顶点的凸性 (Convexity of corners)	185
8.2.2	确定最邻近点 (Determination of the closest point)	186
8.2.3	存储接触状态的数据结构 (Data structure for the contact status)	186
8.3	物体边界的确定 (Determination of boundary polygons and polyhedra)	187
8.4	空间离散化 (Domain discretization)	189
8.4.1	基本知识 (Foundations)	190
8.4.2	Delaunay 三角形分划 (Delaunay triangularization)	191

8.4.3	具有特定特征的网格 (Mesh with specific properties) .....	194
8.4.4	四边形分划 (Quadrilateral mesh) .....	196
8.4.5	四面体网格 (Tetrahedralization) .....	197
8.4.6	网格细化 (Mesh refinement) .....	198
<b>9</b>	<b>多刚体和有限元混合算法 (Hybrid multibody system/finite element simulation)</b> .....	<b>200</b>
9.1	混合算法概述 (Overview of the whole procedure) .....	200
9.2	多刚体系统向有限元系统的转换 (Transition from a multibody system to a finite element system) .....	201
9.3	有限元系统向多刚体系统的转换 (Transition from a finite element system to a multibody system) .....	202
9.3.1	物体位置 (Body position) .....	202
9.3.2	物体的转角 (Body orientation) .....	203
9.3.3	质心速度 (Velocity of the center of mass) .....	204
9.3.4	物体的转动角速度 (Angular velocity of a body) .....	205
9.4	网格释放时刻 (Instants for releasing a mesh) .....	206
9.5	物体接触状态 (Contact status for a body) .....	208
9.6	系统的接触状态 (Contact status for a system) .....	209
9.7	混合算法举例 (Numerical example for the hybrid method) .....	210
<b>10</b>	<b>弹性体碰撞理论分析 (Theoretical analysis of elastic impacts)</b> .....	<b>213</b>
10.1	弹性波理论 (Wave propagation in elastic bodies) .....	213
10.2	刚体与杆的平面接触模型 (Symbolical analysis for planar impacts between rigid bodies and elastic rods) .....	215
10.2.1	弹性杆的波动方程 (Wave equations for elastic rods) .....	215
10.2.2	刚体与杆的平面接触 (Planar impacts between rigid bodies and elastic rods) .....	217
10.2.3	刚体与自由杆碰撞 (Impacts between rigid bodies and free rods) .....	219
10.2.4	刚体与固支杆碰撞 (Impacts between rigid bodies and fixed rods) .....	221
10.3	球体与杆的点接触模型 (Analytical models for point impacts between spheres and elastic rods) .....	225
10.3.1	球体与杆的点接触 (Point impacts between spheres and rods) .....	225
10.3.2	球体与自由杆碰撞 (Impacts between spheres and free rods) .....	227
10.3.3	球体与固支杆碰撞 (Impacts between spheres and fixed rods) .....	228
10.4	球体与不连续截面杆的点接触模型 (Impact analysis for point impacts	

	between spheres and elastic rods with discontinuous cross-sections)	230
10.5	用多时间尺度计算碰撞响应 (Multi-time scale simulation for impact responses)	233
<b>11</b>	<b>碰撞测试 (Measurements of impact responses)</b>	<b>237</b>
11.1	实验设计 (Experiment design)	237
11.2	动态应变测量 (Measurement of dynamic strains)	240
11.3	位移和速度的激光测量 (Measurement of displacements and velocities with Laser-Doppler-Vibrometers)	242
11.4	球杆碰撞测试分析 (Experimental investigations of longitudinal impacts between spheres and rods)	243
11.5	球与半圆板径向碰撞测试分析 (Experimental investigations of radial impacts between spheres and plates)	246
<b>附录 A</b>	<b>符号说明 (Notation)</b>	<b>250</b>
A.1	张量的表达 (Tensor)	250
A.2	下标形式 (Index)	250
A.3	与标量的乘法 (Multiplication with scalar)	251
A.4	点积 (Scalar product)	251
A.5	矢量叉乘 (Vector product)	253
A.6	Dyade 乘积 (Dyade product)	254
A.7	混合积 (Combined products)	254
A.8	微分 (Differentiation)	254
A.9	$\nabla$ 算子和高斯积分定理 (Nabla-Operator and the Gauss integral theorem)	256
A.10	特殊的张量 (Special tensors)	257
<b>附录 B</b>	<b>有限元接触计算中一些重要的辅助变量 (Computation of some auxiliary variables)</b>	<b>259</b>
B.1	线性接触单元中导数 $\partial\bar{\xi}/\partial U, \partial t_m/\partial U$ 和 $\partial n_m/\partial U$ 的计算 (First derivations in linear element)	259
B.2	计算二次接触单元中的导数 $\partial\bar{\xi}/\partial U, \partial t_m/\partial U$ 和 $\partial \bar{n}_m/\partial U$ (First derivations in quadratic element)	261
B.3	二次接触单元中二阶导数 $\partial^2\bar{\xi}/\partial U^2$ 的计算 (Second derivations in quadratic element)	263

---

B.4 静摩擦计算的一致性 (Consistence of static friction) .....	265
附录 C 中心差分法的递推形式 (Recursive form for the central difference method) .....	268
附录 D 软件包 FEMEX (Program FEMEX) .....	270
D.1 有限元法输入参数的描述 (Input data for the finite element code) .....	270
D.2 多刚体法中的输入数据文件 (Input data for the multibody system code) .....	274
附录 E 计算刚体撞击弹性固支杆纵波传播规律的 Maple 程序 (Maple program for computing the propagation of longitudinal impact waves in a fixed rod) .....	276
中文参考文献 .....	287
外文参考文献 .....	288

# 1 绪 论

接触问题在许多技术领域既十分重要又难以求解。接触过程的描述是一个棘手的问题。到目前为止工程师们还没有可以依赖的通用模型,而是基于经验和试验来建模。所建立的模型一方面要求尽可能简单,另一方面为描述有关的影响,模型又必须具有某种程度的复杂性。

如果物体的变形可以忽略,运用多刚体方法和刚体接触理论可以获得主要结果。刚体系统的力学原理早在计算机发明之前就被完整地描述了,如今大量的问题可借助计算机辅助推导运动方程,通过功能强大的建模、仿真、优化和动画显示软件来解决。多刚体系统模拟的一个主要优点是尽管描述系统的运动微分方程通常具有复杂的非线性,但其维数(至少是与有限元方程相比)很低,甚至在高精度要求下,多刚体系统的模拟常常也能实时完成。第2章中将简要地介绍多刚体系统方法的基础知识,着眼于描述多刚体系统位移、速度和加速度关系的运动学以及物体在力的作用下如何运动的动力学。

如果物体的变形不可以忽略,有限元法则是良好的选择。有限元法的基本思想是系统地构造偏微分方程在复杂区域上的近似解,目前此方法在工程中得到了广泛的应用。有限元法生成和求解大规模计算静力学的线性方程组和计算动力学的线性微分方程组以及复杂的特征值问题,与多刚体方法相比,有限元法的重要特征是人们可以研究物体的变形以及大规模的线性方程组具有非常简单的结构。本书在第3章介绍有限元法,除了基本知识外,重在描述实用的计算单元,并对边界载荷计算、应力计算以及系统装配作一些诠释。

经典的有限元法属线性理论范畴,而接触研究在本质上则属非线性。这些非线性来源于多种渠道,比如与变形相关的边界条件的改变,大运动和大变形以及非线性本构关系。即使上述这些非线性因素微不足道的话,在接触区域只能承受压应力,而不能承受拉应力,这种单面约束也足以说明接触问题的非线性本质,因此在接触问题研究中必须依赖于非线性有限元法。尽管非线性有限元法创立于20世纪70年代中期,但距完善还有一段距离,许多问题还有待于进一步深入研究。本书第4章扩展线性有限元至非线性有限元,许多非线性因素实际上是通过修正方法嵌入线性有限元的,因此第3章和第4章内容是紧密联系在一起。关键在于应力和应变张量的合理应用和虚功的线性化。这些应力和应变张量由非线性接触力确定,而虚功的线性化则涉及切线刚度矩阵和余量的计算。

本书第5章讨论刚体系统的冲击和接触计算。冲击导致速度值的跳跃,在冲击计算中需确定接触力产生的冲量。在持续接触过程中,接触力可以被确定。人们必须区

分冲击和持续接触这两种不同的状态。两者的计算都涉及线性互补问题的求解。这一章首先导出接触运动学,其中接触点的雅可比矩阵尤为重要。由冲击引起的接触过渡过程通常不能直接计算,但可以通过引进强制约束来进一步处理刚体接触的过渡过程。运用刚体接触理论,许多动力学过程能够有效和可靠地模拟,不过一些由接触力引起的变形以及应力波在物体中的传播则无法考虑。

处理弹性体的接触问题存在着不同的接触假设,它们在计算量和实用性方面相差甚远。人们可以把接触问题看作为带有不等式约束的优化问题。一些在优化中熟知的数学工具和实用处理则能够被移植到接触力学上。一个重要的问题是在于接触力是由罚函数法还是由拉格朗日乘子法来计算。这两种方法各有优缺点,罚函数法允许甚至需要碰撞体间少量的互相穿透,这种相互穿透虽然通常微不足道,但在物理本质上却是不正确的。罚因子取值过大还会导致数值计算方面的问题。拉格朗日乘子法则不存在碰撞体间的相互穿透,在物理本质上完全正确。该方法虽然给出正确的计算结果,然而必须引进和计算附加的方程,使用的数学工具更加复杂。一些问题,比如表面锁定现象难以处理。

本书第6章描述弹性体的接触计算。接触可分为法向接触、切向静摩擦接触和切向动摩擦接触。在虚功原理中接触虚功的计算需要将接触力在法向和切向接触引起的虚功线性化。具体地涉及动摩擦和静摩擦的状态变化以及用牛顿-芮弗逊法迭代求解。接触虚功的线性化相当繁琐,本书给出了线性和二次插值单元计算切线刚度矩阵所需的中间步骤。尽管线性插值接触单元有些参考结果已出现在文献中,然而带有摩擦的二次插值接触单元有关变量则必须重新推导。

借助于有限元法,可以计算接触区域的变形。对各种接触问题的求解,已取得了很大的成就。这些接触包括带摩擦和不带摩擦的接触、塑性接触以及考虑热效应的接触。文献中所介绍的接触分析大多着重于具体接触过程的变形计算,而不是立足于接触不断更替的系统整体动力学。尽管计算机的性能日益增强,但其计算能力今日还不足以解决接触问题,究其原因一方面归咎于模拟和分析的问题本身越来越复杂,另一方面则归咎于用有限元法计算动力学问题需求解庞大的方程组,其整体的计算步骤难以根本性地缩减。对接触问题许多计算变量必须每步重新计算。由于非线性,每步的计算还需要一个迭代过程。这就要求人们必须花精力和时间来发展和完善有效的数值方法。

本书第7章描述的重点在于体积分和时间积分的数值计算、非线性方程组的求解、有限元法的中心差分技术以及线性方程组的求解。虽然这些算法业已成熟,但一些特殊的要求需要人们对算法加以修正,例如考虑有限元矩阵的稀疏特性。此外,本书也扼要地描述了用于计算刚体接触的线性互补问题。

由于在许多地方涉及几何问题的算法,因此在本书第8章专门讨论这类算法。几何问题算法的典型问题是计算时间随着问题尺度的线性增加而超线性地增长。一些算法对小尺度问题行之有效,而对大尺度问题则基本上失去意义。几何问题算法的另一个问题是,输入变量的微小误差会导致计算结果失去意义或者程序中断,而不像通常的



数值算法那样可靠。因此本书主要讨论那些有效而又可靠的方法。

本书第 9 章讨论计算接触过程的多刚体/有限元混合算法的概念和实现方法。一个物体如果不与其他物体相互接触,可用多刚体系统有效地模拟,而对相互碰撞着的物体则用有限元法计算它们的变形和状态。从刚体过渡到离散的弹性体只需计算网格结点的位置和速度,而从离散化了的弹性体过渡到刚体则要复杂一些。刚体的平动和转动速度需要通过线动量和角动量的守恒定律来确定,而刚体的质心和转角只能近似地确定。问题的关键主要表现在物体结构的转换和用分析与推断来确定系统的整体状态。由于事先无法确定哪些物体将在什么地方相互碰撞,人们必须解决物体表面离散化中网格的生成与消除。在这章中还强调如何将前几章的内容有机地融合在一起以及在什么地方使用什么程序,并通过举例展示多刚体/有限元混合算法的有效性和实用性。同时也指出一些值得进一步研究的问题。

在接触问题研究中,理论分析、数值计算和实验验证这三方面是相辅相成的。理论分析可有效地揭示接触动力学过程的机理,而实验验证则是检验理论分析与数值计算的根本手段。尽管本书着重讨论接触动力学过程的数值计算,鉴于理论分析和实验验证的唇齿相依性,本书在最后两章对描述碰撞过程的理论模型和碰撞测试作了一些扼要的介绍,以方便读者能对接触动力学的研究有一个全局性的概览。

第 10 章简要地介绍弹性体受冲击后的波动理论。弹性体受撞击后,在接触区域将首先发生变形,这种变形以波的形式向物体四周传播,由近及远,并在物体的表面发生反射。由于波动理论十分复杂,本书仅以弹性杆中的一维纵波为例说明描述接触过程的平面接触理论和点接触理论,重点讨论经过实验检验的球杆相撞问题的数学模型。

第 11 章介绍碰撞测试的基本方法和仪器设备,并通过具体的碰撞问题说明如何进行测试分析。碰撞测试与普通的动态测试相比,其主要区别在于碰撞测试对测试系统的频率范围要求极高。碰撞的瞬态响应通常变化很快,且持续时间极短。目前,物体的应变主要用应变片和动态应变仪测量,而速度和位移则主要通过激光测振仪器测量。通过对测试信号的分析,人们可以加深对接触动力学过程的认识,并对理论分析和数值计算的正确性作出检验。

总之,本书尽可能完整地介绍计算接触动力学问题的基础知识,包括多刚体动力学、线性和非线性有限元、刚体接触和弹性接触以及数值和几何问题的算法。其核心是讨论基于多刚体系统和有限元的混合算法求解接触问题。这种用于计算接触问题的多刚体/有限元混合算法在文献中还未见到,其方法在本质上是模块化过程,源于许多不同专业领域的算法单元被装配在一起。有些算法单元为力学工作者所熟知,比如连续介质力学和有限元法,另一些算法单元则来源于数学家和计算机专家,比如 Delaunay 三角化法和稀疏方程组的求解。一些领域例如有有限元方程组的数值积分已属经典范畴,而另一些领域如接触计算则属近十年来的热门研究课题。某些算法正如多刚体/有限元混合法本身,还处于当今的研究阶段,离完善还有一段相当长的距离。为了便于读者对算法的充分理解,本书各章中都详细地叙述了一些简单的例子。另外为便于书写