

师范专科学校试用教材

数学分析讲义

下 册

刘玉琮 傅沛仁 编

高等教育出版社

数学分析讲义

下 册

刘玉珺 傅沛仁 编

高等教育出版社

刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(上册 1981 年 11 月第 2 版, 下册 1982 年 6 月第 2 版)原为高等师范院校数学专业本科的试用教材。后来根据师专教学大纲审订会上的意见, 将该书下册按师专《数学分析教学大纲》要求改编, 与原书上册(本科与专科合用)配套, 作为师专“数学分析”课的试用教材。

本书保留了原书的主要内容, 删掉超出师专教学大纲的内容和习题, 增加一章“实数理论”, 并补充了一些例题, 从而精减了内容, 放低了要求, 加强了基础。

本书由吴克乾同志和魏远同志主持召开的审稿会议审定。

师范专科学校试用教材

数学分析讲义

下 册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.75 字数 284,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,600

书号 13010·0981 定价 1.85 元

改编的说明

1982年10月在昆明召开的全国师专数学专业教学大纲审定会上，根据数学分析小组代表们的建议，决定将我们编写的《数学分析讲义（下册，1982）版》（以下简称《讲义》）改编为师专数学分析课的试用教材。

此次改编的根据是二年制师专《数学分析教学大纲》（以下简称《大纲》）。《讲义》上册的内容、要求与《大纲》基本相同，但是《讲义》下册的某些内容、要求与《大纲》相距较远：一是内容偏多；二是要求偏高。因此，决定暂不改编上册，只改编下册，以满足师专教学的需要。这样，《讲义》上册与本书构成一套完整的二年制师专数学分析课的试用教材。

此次改编主要是在保持原《讲义》下册体系的基础上，作了以下三方面的改动：一是删掉了超出《大纲》的内容和“*”号以后的练习题；二是调整了一些例题和“*”号以前的练习题；三是根据《大纲》的要求补写了一章“实数理论”。从而精简了内容，放低了要求，加强了基础。

为了使本书符合师专教学的实际，提高书稿质量，1983年8月在烟台召开了《讲义》下册改编稿的审稿会，由华中师院吴克乾付教授与烟台师专魏远付教授负责主审。参加审稿会的还有：华中师院、烟台师专、淮阴师专、鞍山师专、长春师范学院、保定师专等校的代表。在审稿会上各位代表对《讲义》下册的改编初稿提出了许多宝贵的意见与建议。会后我们根据各位代表的意见与建议进行修改，然后定稿。特向参加审稿会的各位代表致以衷心的感谢。

敬希老师们及广大读者批评指正。

编者 1983年10月于东北师大。

目 录

第九章 级数	(1)
§ 9.1. 数值级数.....	(1)
一、收敛与发散的概念(1) 二、收敛级数的性质(7) 三、同号级数(12)	
四、变号级数(23) 五、绝对收敛级数的交换性(29) 练习题 9.1(32)	
§ 9.2. 函数级数.....	(34)
一、函数级数的收敛域(34) 二、一致收敛概念(37) 三、一致收敛的判 别法(41) 四、和函数的分析性质(45) 五、极限函数的分析性质(53)	
练习题 9.2(58)	
§ 9.3. 幂级数.....	(60)
一、幂级数的收敛域(60) 二、幂级数和函数的分析性质(66) 三、泰勒 级数(71) 四、例(75) 五、用幂级数给出几个数的近似计算(79)	
练习题 9.3(83)	
§ 9.4. 傅立叶级数.....	(85)
一、傅立叶级数(85) 二、收敛定理(89) 三、奇偶函数的傅立叶级数(93)	
四、以 $2l$ 为周期的函数的傅立叶级数(98) 练习题 9.4(101)	
第十章 多元函数微分学	(102)
§ 10.1. 多元函数.....	(102)
一、平面点集(102) 二、坐标平面的连续性(108) 三、多元函数概念(110)	
练习题 10.1(114)	
§ 10.2. 二元函数的极限与连续.....	(115)
一、二元函数的极限(115) 二、二元函数的连续性(120) 练习题 10.2(125)	
§ 10.3. 多元函数微分法.....	(127)
一、偏导数(127) 二、中值定理(130) 三、复合函数微分法(132)	
四、全微分(136) 五、全微分在近似计算上的应用(140) 六、空间曲线 的切线与曲面的切平面(142) 练习题 10.3(147)	
§ 10.4. 二元函数的泰勒公式.....	(149)
一、高阶偏导数(149) 二、高阶全微分(154) 三、二元函数的泰勒公 式(155) 四、二元函数的极值(160) 练习题 10.4(168)	

第十一章 隐函数	(170)
§ 11.1. 隐函数的存在性	(170)
一、隐函数概念(170) 二、一个方程确定的隐函数(172) 练习题 11.1(178)	
§ 11.2. 条件极值	(179)
一、条件极值(179) 二、例(182) 练习题 11.2(187)	
第十二章 广义积分与含参变量积分	(188)
§ 12.1. 无穷积分	(188)
一、无穷积分收敛与发散的概念(188) 二、无穷积分与级数(192) 三、无穷积分的性质(194) 四、无穷积分的收敛判别法(197) 练习题 12.1(204)	
§ 12.2. 瑕积分	(205)
一、瑕积分收敛与发散的概念(205) 二、瑕积分的收敛判别法(208) 练习题 12.2(213)	
§ 12.3. 含参变量积分	(213)
一、含参变量有限积分(213) 二、例(I)(218) 三、含参变量无穷积分(221) 四、例(II)(229) 五、 Γ 函数与 β 函数(232) 六、例(III)(237) 练习题 12.3(239)	
第十三章 重积分	(242)
§ 13.1. 二重积分	(242)
一、曲顶柱体的体积(242) 二、二重积分的概念(244) 三、二重积分的性质(247) 四、二重积分的计算(249) 五、二重积分的极坐标替换(258) 六、曲面的面积(263) 练习题 13.1(266)	
§ 13.2. 三重积分	(268)
一、三重积分的概念(268) 二、三重积分的计算(270) 三、三重积分的柱面坐标替换(274) 四、三重积分的球面坐标替换(277) 五、物体的重心坐标(282) 练习题 13.2(284)	
第十四章 曲线积分与曲面积分	(286)
§ 14.1. 曲线积分	(286)
一、第一型曲线积分(286) 二、第二型曲线积分(293) 三、第一型与第二型曲线积分的关系(300) 四、格林公式(301) 五、曲线积分与路线无关的条件(307) 练习题 14.1(313)	
§ 14.2. 曲面积分	(315)
一、第一型曲面积分(315) 二、第二型曲面积分(317) 三、奥高公式(324) 四、斯托克斯公式(328) 练习题 14.2(336)	

第十五章 实数理论	(338)
§ 15.1. 戴德金分划	(339)
一、有理数集的性质(339) 二、戴德金分划的思想(340) 三、戴德金分划(341) 练习题 15.1(343)	
§ 15.2. 实数集的性质	(344)
一、有序性(344) 二、加法与减法运算(345) 三、乘法与除法运算(350)	
四、阿基米德公理(354) 五、实数集的连续性(354) 六、实数连续定理的等价性(356) 练习题 15.2(359)	
练习题答案	(360)

第九章 级数

级数是研究函数的一个重要工具。在抽象理论与应用学科中，级数都处于重要的地位。这是因为：一方面能够借助于级数表示很多有用的非初等函数。例如，有些微分方程的解不是初等函数，但其解可用级数表示出来，等等；另一方面又可将函数表为级数，从而能够借助于级数研究这些函数，如用幂级数研究某些超越函数，以及某些无理数的近似计算，等等。

§ 9.1. 数值级数

一、收敛与发散的概念

有数列 $\{u_n\}$ ，即

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来，即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (2)$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为数值级数，简称级数。 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 都称为级数(2)的项， u_n 称为级数(2)的第 n 项或通项。

级数(2)是无限多个数的和。我们只会计算有限个数的和，不会计算无限多个数的和。不仅不会计算无限多个数的和，甚至不知道何谓无限多个数的和。因此，无限多个数的和是一个未知的概念。这个新概念也不是孤立的，它与我们已知的有限个数的和联系着。不难想到，由有限个数的和转化到“无限多个数的和”需要借助极限这个工具来实现。

设级数(2)前 n 项的和是 S_n , 即

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

或

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

称为级数(2)的 n 项部分和. 显然, 级数(2)的任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是, 级数(2)对应着一个部分和数列 $\{S_n\}$, 即

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

.....

定义 如果级数(2)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

称级数(2)收敛, 并称 S 是级数(2)的和, 表为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

而

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为级数(2)的第 n 项余和, 简称余和. 显然, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = 0.$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 称级数(2)发散, 此时级数(2)没有和.

由此可知, 级数的收敛与发散是借助于级数的部分和数列的收敛与发散定义的. 因此, 讨论级数的各种性质都必须借助于讨论该级数的部分和数列进行. 于是, 研究级数及其和只不过是研究数列及其极限的一种新形式. 这个新形式并不是数列极限的简

单重复,它使我们在处理多种不同形式的极限问题中,具有更大的灵活性.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性^①,其中 $a \neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时,已知几何级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}.$$

(i) 当 $|r| < 1$ 时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

因此,当 $|r| < 1$ 时,几何级数收敛,其和是 $\frac{a}{1 - r}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

(ii) 当 $|r| > 1$ 时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - ar^n}{1 - r} = \infty.$$

因此,当 $|r| > 1$ 时,几何级数发散.

2) 当 $|r| = 1$ 时,有两种情况:

(i) 当 $r = 1$ 时,几何级数是

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots.$$

$$S_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 个}} = na.$$

① 敛散性是拒收敛或发散,下同.

② 见 § 2.1 例 4, 当 $|r| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty \quad (a \neq 0).$$

因此, 当 $r=1$ 时, 几何级数发散.

(ii) 当 $r=-1$ 时, 几何级数是

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$$

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 是偶数,} \\ a, & \text{当 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$$

显然, 部分和数列 $\{S_n\}$ 发散. 因此, 当 $r=-1$ 时, 几何级数发散.

综上所述, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 当 $|r| < 1$ 时收敛, 其和是

$\frac{a}{1-r}$; 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

利用几何级数的求和公式, 可将无限循环小数①化为分数. 这是因为无限循环小数都可改写为公比小于 1 的收敛的几何级数.

例如:

无限纯循环小数 $0.\dot{8} = 0.8888\cdots$, 可改写为

$$0.\dot{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \cdots.$$

它是公比 $q = \frac{1}{10}$ 的几何级数. 由几何级数求和公式, 有

$$0.\dot{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{10^n} = \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{9}.$$

无限混循环小数 $0.34\dot{5}6 = 0.34565656\cdots$, 可改写为

$$0.34\dot{5}6 = \frac{34}{10^2} + \left[\frac{56}{10^4} + \frac{56}{10^6} + \frac{56}{10^8} + \cdots \right].$$

① 这里只讨论整数部分为 0 的无限循环小数.

方括号内是公比 $q = \frac{1}{10^2}$ 的几何级数。由几何级数求和公式，有

$$\begin{aligned} 0.34\dot{5}\dot{6} &= \frac{34}{10^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{56}{10^{2(n+1)}} \\ &= \frac{34}{10^2} + \frac{\frac{56}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{34}{10^2} + \frac{56}{10^2(10^2-1)} \\ &= \frac{3456 - 34}{9900}. \end{aligned}$$

一般形式的无限混循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$ (a_i, b_k 都是整数, $i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n$, 且 $0 \leq a_i \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$) 可改写为

$$\begin{aligned} &0.a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m} + \left[\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}} + \frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+2n}} + \cdots \right]. \end{aligned}$$

方括号内是公比 $q = \frac{1}{10^n}$ 的几何级数。由几何级数求和公式，有

$$\begin{aligned} &0.a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+i^n}} \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m} + \frac{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)} \\ &= \frac{a_1a_2\cdots a_m(10^n-1) + b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)} = \frac{\underbrace{99\cdots 9}_{n\text{个}} \underbrace{00\cdots 0}_{m\text{个}}}{10^m(10^n-1)}. \end{aligned}$$

于是，无限混循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n$ 能化成分数，其分子是

第二个循环节以前数字(按原有顺序)组成的数, 减去第一个循环节以前数字(按原有顺序)组成的数之差; 其分母是 n 个 9 接着 m 个 0 组成的数.

例 2. 证明, 级数

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} + \cdots$$

收敛, 并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right).$$

级数的 n 项部分和 S_n 是

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} \\ &= \frac{1}{5} \left[\left(1 - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right). \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

于是, 级数收敛, 其和是 $\frac{1}{5}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}.$$

例 3. 证明, 调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

是发散的.

证明 因为调和级数的每项都是正数, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 是严格增加的. 讨论 $\{S_n\}$ 的子数列 $\{S_{2^m}\}$:

$$S_2, S_4, S_8, \dots, S_{2^m}, \dots$$

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2^1 \text{ 项}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{2^2 \text{ 项}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ 项}}$$

其中每个括号内的和都大于 $\frac{1}{2}$. 事实上,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

.....

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \dots + \frac{1}{2^m} > 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}.$$

于是,

$$S_{2^m} > 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{m \text{ 个}} = 1 + \frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m} \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right) = +\infty,$$

即 $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2^m} = +\infty$. 对任意自然数 n , 总存在唯一的自然数 m , 使

$2^{m-1} \leq n < 2^m$, 且

$$S_{2^{m-1}} \leq S_n < S_{2^m}.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $m \rightarrow \infty$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. 于是, 调和级数是发散的.

二、收敛级数的性质

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的敛散性是

等价的。因此，数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件也就是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛的必要充分条件。根据 § 2.2 定理 8 数列 $\{S_n\}$ 的柯西收敛准则：“数列 $\{S_n\}$ 收敛的必要充分条件是，对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在自然数 N ，当 $n > N$ 时，对任意自然数 p ，有 $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ 。”由于 S_n

是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和，而

$$\begin{aligned} S_{n+p} - S_n &= u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \\ &\quad - [u_1 + \cdots + u_n] \\ &= u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}. \end{aligned}$$

于是，有下面级数的柯西收敛准则：

定理 1. (柯西收敛准则) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要充分条件是，

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在自然数 N ，当 $n > N$ 时，对任意自然数 p ，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

根据定理 1 的必要性，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，特别是取 $p=1$ ，则

对任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在自然数 N ，当 $n > N$ 时，有 $|u_{n+1}| < \varepsilon$ ，即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

所以有

推论 1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 。

推论 1 的等价命题是，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

例如，级数

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \cdots + \frac{n}{100 \cdot n + 1} + \cdots.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1} = \frac{1}{100} \neq 0$, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100 \cdot n + 1}$ 发散.

注意, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件而不是充分

条件, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也可能发散. 例如, 调和级数(见例

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛等价于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的充分远(即 $n > N$)的任意片段(即对任意 p , $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}$)的绝对值可以任意小. 由此可见, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的

任意片段有关, 而与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 前面有限个项无关. 于是, 又有

推论 2. 若去掉、增添或改变级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项, 则不改变

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

例如, 若去掉发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的前面 100 项, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100+n} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{100+n} + \cdots$$

也是发散的.

根据数列的极限运算定理, 可得到下面级数的运算定理:

定理 2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S , 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛, 其和是 cS , 其中 c 是常数.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的 n 项部分和分别是 S_n 与 P_n ,

有

$$\begin{aligned} P_n &= cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n \\ &= c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = cS_n. \end{aligned}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} cS_n = cS,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS . \square

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

即收敛级数 (无限个数的和) 满足分配律.

定理 3. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别是 A 与 B , 则

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$