师范专科学校试用教材

数学分析讲义

下　　册

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社

数学分析讲义

下　册

刘玉琏　傅沛仁　编

高等教育出版社

刘玉琏、傅沛仁编《数学分析讲义》(上册 1981 年 11 月第 2 版，下册 1982 年 6 月第 2 版)原为高等师范院校数学专业本科的试用教材. 后来根据师专数学大纲审订会上的意见，将该书下册按师专《数学分析教学大纲》要求改编，与原书上册(本科与专科合用)配套，作为师专"数学分析"课的试用教材.

本书保留了原书的主要内容，删掉超出师专教学大纲的内容和习题，增加一章"实数理论"，并补充了一些例题，从而精减了内容，放低了要求，加强了基础.

本书由吴克乾同志和魏远同志主持召开的审稿会议审定.

师范专科学校试用教材

数学分析讲义

下 册

刘玉琏 傅沛仁 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 三 厂 印 装

*

开本 850×1168 1/32 印张 11.75 字数 284,000

1984 年 3 月第 1 版 1984 年 9 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,600

书号 13010·0981 定价 1.85 元

改编的说明

1982 年 10 月在昆明召开的全国师专数学专业教学大纲审定会上，根据数学分析小组代表们的建议，决定将我们编写的《数学分析讲义（下册，1982）版》（以下简称《讲义》）改编为师专数学分析课的试用教材.

此次改编的根据是二年制师专《数学分析教学大纲》（以下简称《大纲》）.《讲义》上册的内容、要求与《大纲》基本相同，但是《讲义》下册的某些内容、要求与《大纲》相距较远：一是内容偏多；二是要求偏高. 因此，决定暂不改编上册，只改编下册，以满足师专教学的需要. 这样，《讲义》上册与本书构成一套完整的二年制师专数学分析课的试用教材.

此次改编主要是在保持原《讲义》下册体系的基础上，作了以下三方面的改动：一是删掉了超出《大纲》的内容和“*”号以后的练习题；二是调整了一些例题和“*”号以前的练习题；三是根据《大纲》的要求补写了一章“实数理论”. 从而精简了内容，放低了要求，加强了基础.

为了使本书符合师专教学的实际，提高书稿质量，1983 年 8 月在烟台召开了《讲义》下册改编稿的审稿会，由华中师院吴克乾付教授与烟台师专魏远付教授负责主审. 参加审稿会的还有：华中师院、烟台师专、淮阴师专、鞍山师专、长春师范学院、保定师专等校的代表. 在审稿会上各位代表对《讲义》下册的改编初稿提出了许多宝贵的意见与建议. 会后我们根据各位代表的意见与建议进行修改，然后定稿. 特向参加审稿会的各位代表致以衷心的感谢.

敬希老师们及广大读者批评指正.

编者　　1983 年 10 月于东北师大.

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第九章　级　　数

级数是研究函数的一个重要工具. 在抽象理论与应用学科中,级数都处于重要的地位. 这是因为:一方面能够借助于级数表示很多有用的非初等函数. 例如, 有些微分方程的解不是初等函数,但其解可用级数表示出来,等等; 另一方面又可将函数表为级数, 从而能够借助于级数研究这些函数, 如用幂级数研究某些超越函数,以及某些无理数的近似计算,等等.

§9.1. 数值级数

一、收敛与发散的概念

有数列$\{u_n\}$,即

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots. \tag{1}$$

将数列(1)的项依次用加号连接起来,即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{2}$$

或简写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

称为**数值级数**, 简称**级数**. u_1, $u_2, \cdots, u_n, \cdots$都称为级数(2)的**项**, u_n 称为级数(2)的**第 n 项**或**通项**.

级数(2)是无限多个数的和. 我们只会计算有限个数的和,不会计算无限多个数的和. 不仅不会计算无限多个数的和, 甚至不知道何谓无限多个数的和. 因此, 无限多个数的和是一个未知的新概念. 这个新概念也不是孤立的, 它与我们已知的有限个数的和联系着. 不难想到, 由有限个数的和转化到"无限多个数的和"需要借助极限这个工具来实现.

设级数(2)前 n 项的和是 S_n，即

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

或
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

称为级数(2)的 n 项**部分和**. 显然，级数(2)的任意 n 项部分和 S_n 都是已知的. 于是，级数(2)对应着一个部分和数列$\{S_n\}$，即

$$\begin{aligned}&S_1=u_1,\\&S_2=u_1+u_2,\\&S_3=u_1+u_2+u_3,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

定义 如果级数(2)的部分和数列$\{S_n\}$收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

称级数(2)**收敛**，并称 S 是级数(2)的**和**，表为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

而
$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots,$$

称为级数(2)的**第 n 项余和**，**简称余和**. 显然，有

$$\lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}(S-S_n)=0.$$

如果部分和数列$\{S_n\}$**发散**，称级数(2)**发散**，此时级数(2)没有和.

由此可知，级数的收敛与发散是借助于级数的部分和数列的收敛与发散定义的. 因此，讨论级数的各种性质都必须借助于讨论该级数的部分和数列进行. 于是，研究级数及其和只不过是研究数列及其极限的一种新形式. 这个新形式并不是数列极限的简

单重复，它使我们在处理多种不同形式的极限问题中，具有更大的灵活性.

例 1. 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

的敛散性①，其中 $a\neq 0$，r 是公比.

解 1) 当 $|r|\neq 1$ 时，已知几何级数的 n 项部分和 S_n 是

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a-ar^n}{1-r}.$$

(i) 当 $|r|<1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}②=\frac{a}{1-r}.$$

因此，当 $|r|<1$ 时，几何级数收敛，其和是 $\frac{a}{1-r}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

(ii) 当 $|r|>1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-ar^n}{1-r}=\infty.$$

因此，当 $|r|>1$ 时，几何级数发散.

2) 当 $|r|=1$ 时，有两种情况:

(i) 当 $r=1$ 时，几何级数是

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots,$$

$$S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na.$$

① 敛散性是指收敛或发散. 下同.

② 见 §2.1 例 4，当 $|r|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty \quad (a \neq 0) .$$

因此,当 $r=1$ 时,几何级数发散.

(ii) 当 $r=-1$ 时,几何级数是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$$

$$S_n=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 是偶数,}\\ a, & \text{当 } n \text{ 是奇数.}\end{cases}$$

显然部分和数列 $\{S_n\}$ 发散. 因此,当 $r=-1$ 时,几何级数发散.

综上所述,几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$,当 $|r|<1$ 时收敛,其和是 $\frac{a}{1-r}$;当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

利用几何级数的求和公式,可将无限循环小数①化为分数. 这是因为无限循环小数都可改写为公比小于 1 的收敛的几何级数. 例如:

无限纯循环小数 $0.\dot{8}=0.8888\cdots$,可改写为

$$0.\dot{8}=\frac{8}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{8}{10^3}+\cdots.$$

它是公比 $q=\frac{1}{10}$ 的几何级数. 由几何级数求和公式,有

$$0.\dot{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{10^n}=\frac{\frac{8}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{8}{9}.$$

无限混循环小数 $0.34\dot{5}\dot{6}=0.34565656\cdots$, 可改写为

$$0.34\dot{5}\dot{6}=\frac{34}{10^2}+\left[\frac{56}{10^4}+\frac{56}{10^6}+\frac{56}{10^8}+\cdots\right].$$

---

① 这里只讨论整数部分为 0 的无限循环小数.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.co

方括号内是公比$q=\frac{1}{10^2}$的几何级数. 由几何级数求和公式，有

$$0.34\dot{5}\dot{6}=\frac{34}{10^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{56}{10^{2(n+1)}}$$

$$=\frac{34}{10^2}+\frac{\frac{56}{10^4}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{34}{10^2}+\frac{56}{10^2(10^2-1)}$$

$$=\frac{3456-34}{9900}.$$

一般形式的无限混循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$ (a_i, b_k 都是整数, $i=1,2,\cdots,m$; $k=1,2,\cdots,n$, 且 $0\leqslant a_i\leqslant 9, 0\leqslant b_k\leqslant 9$) 可改写为

$$0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\left[\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}}+\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+2n}}+\cdots\right].$$

方括号内是公比$q=\frac{1}{10^n}$的几何级数. 由几何级数求和公式，有

$$0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+in}}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\frac{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^{m+n}}}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{a_1a_2\cdots a_m}{10^m}+\frac{b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)}$$

$$=\frac{a_1a_2\cdots a_m(10^n-1)+b_1b_2\cdots b_n}{10^m(10^n-1)}=\frac{a_1a_2\cdots a_mb_1b_2\cdots b_n-a_1a_2\cdots a_m}{\underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}}\ \underbrace{00\cdots0}_{m\text{个}}}.$$

于是，无限混循环小数 $0.a_1a_2\cdots a_m\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$ 能化成分数，其分子是

第二个循环节以前数字(按原有顺序)组成的数，减去第一个循环节以前数字(按原有顺序)组成的数之差；其分母是 n 个 9 接着 m 个 0 组成的数.

例 2. 证明,级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其和.

证明 通项 u_n 可改写为

$$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right).$$

级数的 n 项部分和 S_n 是

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}\\&=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]\\&=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right).\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}.$$

于是,级数收敛,其和是 $\frac{1}{5}$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}.$$

例 3. 证明,调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证明 因为调和级数的每项都是正数，所以部分和数列 $\{S_n\}$ 是严格增加的．讨论 $\{S_n\}$ 的子数列 $\{S_{2^m}\}$:

$$S_2, S_4, S_8, \cdots, S_{2^m}, \cdots.$$

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2^1\text{项}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2\text{项}}+\cdots+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\text{项}},$$

其中每个括号内的和都大于$\frac{1}{2}$. 事实上,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^m}>2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}.$$

于是,
$$S_{2^m}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{m\text{个}}=1+\frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty}S_{2^m}\geqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=+\infty,$$

即 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2^m}=+\infty$. 对任意自然数 n，总存在唯一的自然数 m，使 $2^{m-1}\leqslant n<2^m$, 且

$$S_{2^{m-1}}\leqslant S_n<S_{2^m}.$$

当 $n\to\infty$ 时, 有 $m\to\infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$. 于是，调和级数是发散的.

二、收敛级数的性质

已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性与它的部分和数列$\{S_n\}$ 的敛散性是

等价的. 因此，数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件也就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要充分条件. 根据§2.2定理8数列$\{S_n\}$的柯西收敛准则:"数列$\{S_n\}$收敛的必要充分条件是，对任意$\varepsilon>0$，总存在自然数$N$，当$n>N$时，对任意自然数$p$，有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$."由于$S_n$是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的$n$项部分和，而

$$\begin{aligned}S_{n+p}-S_n&=u_1+\cdots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\\&\quad-[u_1+\cdots+u_n]\\&=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}.\end{aligned}$$

于是，有下面级数的柯西收敛准则:

定理1. (柯西收敛准则) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的必要充分条件是，对任意$\varepsilon>0$，总存在自然数$N$，当$n>N$时，对任意自然数$p$，有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

根据定理1的必要性，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，特别是取$p=1$，则对任意$\varepsilon>0$，总存在自然数$N$，当$n>N$时，有$|u_{n+1}|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

所以有

推论1. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

推论1的等价命题是，如果$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

例如，级数

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{201}+\frac{3}{301}+\cdots+\frac{n}{100\cdot n+1}+\cdots.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100\cdot n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{100\cdot n+1}$ 发散.

注意，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 仅是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件，即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也可能发散．例如，调和级数（见例 3）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 却是发散的.

定理 1 指出，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的充分远（即 $n>N$）的任意片段（即对任意 p，$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$）的绝对值可以任意小．由此可见，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性仅与级数充分远的任意片段有关，而与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 前面有限个项无关．于是，又有

推论 2. 若去掉、增添或改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的有限项，则不改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.

例如，若去掉发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的前面 100 项，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}=\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{100+n}+\cdots$$

也是发散的.

根据数列的极限运算定理,可得到下面级数的运算定理:

定理 2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,其和是 S,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n+\cdots$$

也收敛,其和是 cS,其中 c 是常数.

证明 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$的 n 项部分和分别是 S_n 与 P_n,有

$$\begin{aligned}P_n&=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n\\&=c(u_1+u_2+\cdots+u_n)=cS_n.\end{aligned}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,有

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=cS,$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$收敛,其和是 cS. □

定理 2 的结果可改写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=cS=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

即收敛级数(无限个数的和)满足分配律.

定理 3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛,其和分别是 A 与B,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+\cdots+(u_n\pm v_n)+\cdots$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.co