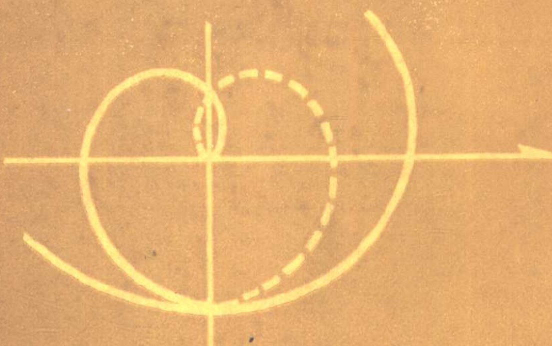
1979

日本高考数学试题选



陕西科学技术出版社

1 9 7 9 年

日本高考数学试题选

[日] 旺文社 编

张文敏 华 嘉 选译

陕西科学技术出版社

日本高考数学试题选

[日]旺文社 编

张文敏 华 嘉 译

陕西科学技术出版社出版

(西安北大街131号)

陕西省新华书店发行 七二二六工厂印刷

开本787×1092 1/32 印张 6 字数120,000

1981年2月第1版 1981年2月第1次印刷

印数1－25,000

统一书号：7202·16 定价：0.49元

目　　录

第一章　数与式

余　　数

1．(1) $(ax+b)^3$ 被 x^2+1 除时，余数是 x，试求此时的实数 a，b 之值。

(2) 试求 x^4 被 $x^2+\sqrt{2}x+1$ 除时的商和余数．

解答：(1) 如果 $(ax+b)^3$ 被 x^2+1 除，则商是 a^3x+3a^2b，余数是 $(3ab^2-a^3)x+b^3-3a^2b$。

又由于余数是 x，故有

$$3ab^2-a^3=1 \text{ 和 } b(b^2-3a^2)=0。$$

$a=-1$，$b=0$；$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

大同工业大学

(2) 商是 $x^2-\sqrt{2}x+1$，余数是 -1。

九州产业大学

整　　数

2．试求满足方程式 $2xy-4x-y=4$ 的自然数 x、y．

解答：已知 $2xy-4x-y=4$，

故有 $(2x-1)(y-2)=6$。

由于 x 是自然数，所以 $2x-1(\geqslant 1)$ 也是自然数，而且是奇数，是 6 的约数。

$\therefore$ 当 $2x-1=1$ 时，$y-2=6$；

当 $2x-1=3$ 时，$y-2=2$。

$\therefore$ $x=1$，$y=8$；$x=2$，$y=4$。

冈山理科大学

3. 试把 63 用连续的正整数之和表示出来。并求出所有的具体表达式。

解答：假设 63 能用 n 个连续的正整数之和表示，令这些连续的正整数为 $x, x+1, \cdots\cdots, x+(n-1)$，则

$$nx+\frac{n(n-1)}{2}=63,$$

$$\therefore \quad x=\frac{63}{n}-\frac{n-1}{2}. \qquad \cdots\cdots①$$

$\because$ $x \geqslant 1$，$126-n(n-1) \geqslant 2n$，

$\therefore$ $n^2+n-126 \leqslant 0$。

因此得

$$\frac{-1-\sqrt{505}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{-1+\sqrt{505}}{2}=10.7\cdots\cdots,$$

其中，n 是 2 以上的整数，所以

$$2 \leqslant n \leqslant 10 \qquad \cdots\cdots②$$

由于 n 是奇数时，$\frac{n-1}{2}$ 是整数；又，①是整数，所以 n 必定是 63 的约数．在②的范围内，

$$n=3, 7, 9.$$

n 是偶数时，令 $n=2m$，$x=\frac{1}{2}\left(\frac{63}{m}+1\right)-m$，由于 x 是整数，m 必定是 63 的约数，

$\because$ $1 \leqslant m \leqslant 5$，

$\therefore\quad m=1,3$。

因此　$n=2,6$。

$n=2$时，$x=31$，$63=31+32$；

$n=3$时，$x=20$，$63=20+21+22$；

$n=6$时，$x=8$，　$63=8+9+10+11+12+13$；

$n=7$时，$x=6$，　$63=6+7+8+9+10+11+12$；

$n=9$时，$x=3$，　$63=3+4+5+6+7+8+9+10+11$。

日本大学

整　　式

4. n是3以上的正整数，若设

$$P_n=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1$$

$$Q_n=x^{3n-1}+x^{3n-2}+\cdots\cdots+x^{2n+2}+x^{2n+1}+1$$

时，试解答下列问题：

(1) 化简 $(x-1)P_n$。

(2) Q_n 被 P_n 除，求其商。

(3) 当 $x^n-1=0$ 时，求 P_{3n}的值。

解答：(1)　$(x-1)P_n=xP_n-P_n=x^n-1$。

(2) $Q_n=x^{2n}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)-(x^{2n}-1)$

$$=x^{2n}P_n-(x^n+1)(x^n-1)$$

$$=x^{2n}P_n-(x^n+1)(x-1)P_n,$$

Q_n 被 P_n 除，商为 $x^{2n}-x^{n+1}+x^n-x+1$。

(3) $x^n-1=0$时，由(1)，$x=1$ 或$P_n=0$，

当 $x=1$ 时，

$$P_{3n}=x^{3n-1}+x^{3n-2}+\cdots\cdots+x+1=3n;$$

当 $P_n=0$时，

$P_{3n}=x^{2n}P_n+x^n P_n+P_n=0$。

东北工业大学

5. $x+y=1$，$x^2+y^2=2$ 时，求 x^7+y^7 的值。

解答：$xy=\frac{1}{2}\{(x+y)^2-(x^2+y^2)\}=-\frac{1}{2}$，

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2},$$

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$$

$$=\frac{35}{4}+\frac{1}{8}=\frac{71}{8}.$$

日本大学

6. $f(x)$是实系数的四次整式，$f(1)=11$，$f(i)=2i+1$，$f(\omega)=-2\omega-2$，试求各项的系数和常数项。（$i=\sqrt{-1}$，ω 是 $x^3=1$ 的一个虚根）。

解答：设 $f(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$，

$A+B+C+D+E=11$，　　……①

$A-C+E=1$，$-B+D=2$。　　……②

$\because$ $f(\omega)=-2\omega-2$，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$，

$\therefore$ $A\omega+B-C(\omega+1)+D\omega+E=-2\omega-2$，

$\therefore$ $(A-C+D)\omega+(B-C+E)=-2\omega-2$。

$\because$ ω 是虚数，

$\therefore$ $A-C+D=-2$，$B-C+E=-2$。　　……③

由①②③得

$A=2$，$B=-1$，$C=5$，$D=1$，$E=4$。

立命馆大学

7. (1) 有三次式 $P(x)=x^3+2x^2-x+(\quad)$, $x-1$是它的因式，若把P(x)因式分解，则有

$$P(x)=(x-1)(\quad)(\quad).$$

(2) $(x+1)^2$ 是 x^3-px^2+3x+q 的因式，试求p,q的值。

解答：(1) 令 $P(x)=x^3+2x^2-x+a$, 由于 $x-1$ 是它的因式，故 $P(1)=0$, 所以$a=-2$, 那么

$P(x)=x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+1)(x+2)$。

大阪产业大学

(2) $p=-3$, $q=1$。

工学院大学

分 数 式

8. (1) $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ 时，试求 $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}$ 之值。

(2) $\dfrac{x-1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{a}{x+3}-\dfrac{b}{x+1}$ 时，求a,b之值。

解答：(1) $x-y=2\sqrt{3}$, $xy=1$, $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}$

$$=\frac{x^3-y^3}{xy},$$

$$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=30\sqrt{3}.$$

足利工业大学

(2) $$\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}=\frac{a}{x+3}-\frac{b}{x+1}, \qquad \cdots\cdots①$$

右边

$$\frac{a(x+1)-b(x+3)}{(x+3)(x+1)}=\frac{(a-b)x+(a-3b)}{(x+3)(x+1)},$$

由于①式对于 x 是恒等式，所以

$$\begin{cases} a-b=1, \\ a-3b=-1. \end{cases}$$

故 $\begin{cases} a=2, \\ b=1. \end{cases}$

福井工业大学

9. 对于实数 $x,y,(xy\neq 0)$

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}=\frac{x+y}{1+x+y}\cdots\cdots①$$

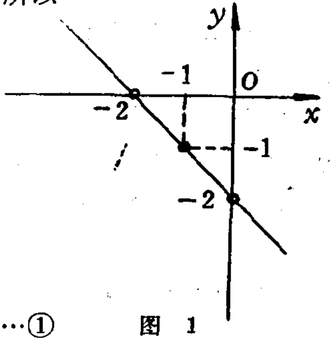


图 1

式成立时，

(1) 试求 $x+y$ 的值。

(2) 画出①式的图形（坐标轴省略）。

解答：(1) 令①式中的 $x+y=t$，去掉分母，则有

$$(t+2xy)(t+1)=t(1+t+xy).$$

$\because$ $xy\neq 0$,

$\therefore$ $t=x+y=-2$.

(2) 图 1 的直线[除去 $(-2,0),(0,-2),(-1,-1)$ 三点]。

日本兽医畜产大学

无 理 式

10. 设 a,b 是有理数，令 $A=\frac{a+\sqrt{2}}{b+\sqrt{2}}$, $B=(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})$，而且 A, B 满足 $B=\frac{8A}{(1+A)^2}$ 的关系式。利

用“$\sqrt{2}$ 是无理数”的概念，来求 a，b 的关系式。

解答：

$$\frac{8A}{(1+A)^2}=\frac{8(a+\sqrt{2})}{b+\sqrt{2}}\div\frac{(a+b+2\sqrt{2})^2}{(b+\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{8(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})}{(a+b+2\sqrt{2})^2},$$

$\because\quad B=\dfrac{8A}{(1+A)^2},$

$\therefore\quad (a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})=\dfrac{8(a+\sqrt{2})(b+\sqrt{2})}{(a+b+2\sqrt{2})^2},$

$\therefore\quad (a+b+2\sqrt{2})^2=8,$

$\therefore\quad (a+b)^2+4\sqrt{2}(a+b)=0,$

$\therefore\quad (a+b)(a+b+4\sqrt{2})=0,$

$\because$ a,b是有理数，$4\sqrt{2}$ 是无理数，所以

$a+b+4\sqrt{2}\neq 0,$

$\therefore\quad a+b=0$。

岩手医科大学

11.(1) 试求满足$\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$的整数a,b。

(2) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 是二次方程式 $x^2+sx+t=0$ 的根，试用(1)的结果求出有理数 s,t。

解答：(1) 原式两边平方，

$$9-4\sqrt{5}=a+b-2\sqrt{ab},$$

$\therefore\quad a+b=9,\ ab=20$。

若求满足 $a>b$ 的整数 a,b,则有

$a=5,\ b=4$。

（2）由于一个根是$\sqrt{5}-2$，把它代入方程，则有

$$9-4\sqrt{5}+s(\sqrt{5}-2)+t=0。$$

又，已知s，t是有理数，则有

$$\begin{cases} 9-2s+t=0, \\ -4+s=0。\end{cases}$$

$$\begin{cases} s=4, \\ t=-1。\end{cases}$$

另解：在有理系数的方程中，如果$\sqrt{5}-2$是根，则$-\sqrt{5}-2$也是根。由根与系数的关系可知：

$$s=-\{(\sqrt{5}-2)+(-\sqrt{5}-2)\}=4,$$

$$t=(\sqrt{5}-2)(-\sqrt{5}-2)=-1。$$

熊本工业大学

12．（1）试证明：变量t在$t>0$的范围变化时，对于函数$f(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$，

$$g(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1},$$

$f(t)$的最小值是$2+\sqrt{3}$，$g(t)$的最大值是$2-\sqrt{3}$。

（2）令$a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$，$b=p\sqrt{xy}$，$c=x+y$，对于任意的正数$x,y(>0)$，把a,b,c作为三边长度的三角形总是存在，求此时p值的范围。

讨论：t以$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$和$t+\frac{1}{t}$的形式出现。

由于 $t+\frac{1}{t}=\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-2$，令 $\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=u$，讨论一下 $t>0$ 时 u 值范围，作为u的函数f(t)、g(t)，求其取值范围及其最大值和最小值。

$u+\sqrt{u^2-1}$ 是增函数；

$u-\sqrt{u^2-1}$ 是什么函数，要用分子的有理化来解决。

解答： (1) 因为在 $t>0$ 的范围，$\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\geqslant\sqrt{\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}}=1$，所以 $u=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\geqslant 2$，故 u 取值的范围为 $u\geqslant 2$。随着 u 的增加，$f=u+\sqrt{u^2-1}$ 也增加。故 $u=2(t=1)$ 时 f 最小，最小值为：

$$2+\sqrt{2^2-1}=2+\sqrt{3}.$$

$g=u-\sqrt{u^2-1}=\frac{1}{u+\sqrt{u^3-1}}$随着 u 的增加而减小。

故 $u=2(t=1)$ 时 g 最大，最大值为：

$$2-\sqrt{2^2-1}=2-\sqrt{3}.$$

(2) 对于正数 x，y，因为 $c^2>a^2$，所以 $c>a$。由于三角形存在，所以 $c+a>b$，$c-a<b$，

$$x+y+\sqrt{x^2+xy+y^2}>p\sqrt{xy},$$

$$x+y-\sqrt{x^2+xy+y^2}<p\sqrt{xy}.$$

两边均除以$\sqrt{xy}$，令 $\frac{x}{y}=t$，则有

$$f(t)>p,\qquad g(t)<p.$$

由于对任意的正数 x，y 都成立，所以对 f(t) 的最小

值，g(t) 的最大值都成立是充分必要的。因此，$2+\sqrt{3}>p$，$2-\sqrt{3}<p$。

$$\therefore \quad 2-\sqrt{3}<p<2+\sqrt{3}.$$

京都大学

13. (1) 证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是无理数。

(2) 已知$p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$q=1-p$，求$\frac{\log p}{\log q}$的值。

解答：

(1) $\sqrt{2}$是无理数，要证明$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha$是无理数，用反证法。

若把$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha$看作是有理数，由$\sqrt{3}=\alpha-\sqrt{2}$得

$3=\alpha^2-2\alpha\sqrt{2}+2$（两边平方）。

$$\because \quad \alpha\neq 0,$$

$$\therefore \quad \sqrt{2}=\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}.$$

它表示无理数$\sqrt{2}$是有理数，结果有矛盾，故$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\alpha$是无里数。

$\sqrt{2}$是无理数的证明从略。

京都教育大学

(2) $p=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，$q=1-p$，故有

$$q=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=p^2,$$

$$\frac{\log p}{\log q}=\frac{\log p}{\log p^2}=\frac{1}{2}.$$

九州大学

复　　数

14. 对于复数 $z=x+yi$，画出 $z^2+\frac{9}{z^2}$ 为实数且以 x，y 为坐标的点 p 之图形。其中 x 和 y 是实数，i 是虚数单位。

论计：$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$.

解答：令 $R=z^2+\frac{9}{z^2}$，

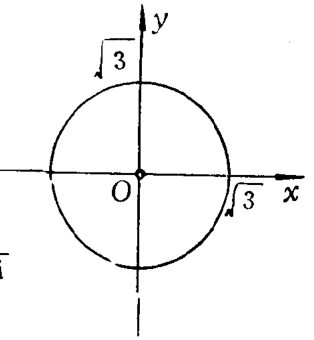


图 2

∵ $R=\left(z+\frac{3}{z}\right)^2-6$，

$z=x+yi$，

∴ $z+\frac{3}{z}=x+yi+\frac{3}{x+yi}$

$=x+yi+\frac{3x-3yi}{x^2+y^2}$

$=\frac{x(x^2+y^2+3)}{x^2+y^2}+\frac{y(x^2+y^2-3)}{x^2+y^2}i$.

$$\therefore R=\left\{\frac{x^2(x^2+y^2+3)^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2(x^2+y^2-3)^2}{(x^2+y^2)^2}-6\right\}$$

$$+\frac{2xy\{(x^2+y^2)^2-9\}}{(x^2+y^2)^2}i,$$