高中数学综合題彙編

楊 大 淳等編

科 学 技 术 出 版 社

高中数学綜合題彙編

楊大淳　陈鴻俠　范其魯

科学技术出版社

1959年·北京

总号：1322

高中数学綜合題彙編

編　者：杨大淳　陈鸿依　范其鲁

出版者：科学技术出版社

(北京市西直門[illegible])

北京市书刊出版业营业許可証出字第091号

发行者：新华书店

印刷者：北京市通州区印刷厂

开本：787×1092 1/32　印张：6 11/16

1959年4月第1版　字数：10[illegible],000

1959年4月第1次印刷　印数：52,050

統一书号：13051·253

定价：(8)6角

編者的話

几年来，为了适应教学的需要，我們曾經編写和汇集了一些題目．在使用的过程中，这些題目还能起巩固知識、熟練技巧和发展思考能力的作用；并且也能激发学生們的学习兴趣．因此，我們从这些題目里，择录出一部分綜合性的題目（其中也有一小部分比較灵活的題目），編成了这一本小册子，提供給讀高級中学的学生們和自修高中数学的同志們作参考．

这本小册子分为两部分，前一部分是題目，后一部分是这些題目的解答．我們建議，讀者在用这本书的时候，对于每一个題目，都应該依靠自已的思考去解决它，不要急于翻看解答部分．

由于过去的数学教学工作結合生产很差，我們的业务水平也低，編写的題目和題解都可能有不少缺点，还希望讀者提出意見．

一个数学題目，往往有很多种解法．这本书里的題目，大部分只列一种解法，而且不一定是所有解法中最好的一种（內中一部分几何題，我們采取了比較簡单的三角解法）．如果讀者有更簡捷的解法，希望能告訴我們．同时对解法中的錯誤，也希望給以指正，以便修訂．

本书共編入 200 个題目，由于絕大部分是綜合性的，所以很难划分类别，只根据每一个題目的主要內容，大致地排列了一下．

最后，我們愿再重复一下，数学綜合題的方向还有待摸索，本书只能供参考，并希望讀者多加批評和指教。

編　者

于北京五中

题　目

1　已知两个最简根式 $\sqrt[3a+2]{4a+3b}$ 与 $\sqrt[b+4]{2a-b+6}$ 是同类根式，試求 a、b 的值。

2　如 $4x^2-4x-15\leqq 0$，試化簡 $\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$。

3　如 $x>0$，$y>0$，

且 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$，

試求 $\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$ 的值。

4　如 $x=(a+\sqrt{a^2-1})^{\frac{2mn}{m-n}}$，

化簡 $(x^{\frac{1}{m}}+x^{\frac{1}{n}})^2-4a^2x^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}$（这里 $|a|>1$）。

5　化簡 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{3638}$。

6　化簡 $\dfrac{15i^{-24}-5\sqrt{2}\,i^{31}}{(3+\sqrt{2}\,i^{21})(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i^{-33})}$。

7　如 $\dfrac{(y^2+x^2i)+(10+i)}{x(1+2i)+y(1+3i)}=x(1+i)-y(1-4i)$，求 x、y 的实数值（这里 x、y 都不是零）。

8　如 a、b、c、d 都是实数，且满足关系 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$，求証：以 a、b、c、d 为边的四边形不是菱形就是正方形。

9 如 $abc = 1$,

求証 $\dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{b}{bc+b+1} + \dfrac{c}{ca+c+1} = 1$.

10 如 x、y 都是实数，且 $y = \sqrt{\lg \dfrac{3x^2 - 14x + 14}{x^2 - 6x + 8}}$，試求 x 的許可値的范围.

11 求等差級数 $16.9 + 17.06 + \cdots + 80.9$ 的前 200 項的和减去后 100 項(就是从末項起向前数 100 項)的和的差.

12 求在 200 和 700 之間所有的 11 的倍数的数的和.

13 級数 $\lg 1000 + \lg(1000 \cos 60°) + \lg(1000 \cos^2 60°) + \cdots + \lg(1000 \cos^{n-1} 60°) + \cdots$ 的前多少項的和为最大(已知 $\lg 2 = 0.3010$).

14 如一級数的第 n 項 $a_n = \lg \dfrac{3}{\sqrt[3]{2^{4n-1}}}$，求其前 n 項的和.

15 取偶数数列 $2, 4, 6, 8, \cdots, 2n, \cdots$ 的首項，第二、三項的和，第四、五、六項的和，以此类推，构成級数 $2 + (4+6) + (8+10+12) + \cdots$. 試求这个級数的第 n 項以及其前 n 項的和.

16 如 $\left\{\left(1+\dfrac{4}{x-2}\right)(x-4+4x^{-1}) - \sqrt{3}\left[1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \cdots\right]\right\} \div \dfrac{x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-1}}{(\sqrt{x}+2)^{-1}} = \left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$，求級数 $(x+x) + (2x+x^2) + (3x+x^3) + \cdots + (nx+x^n) + \cdots$ 的前 n 項的和.

17 等比級数 $3 + 6 + 12 + \cdots$ 的前多少項的和就开始大于 149997 (已知 $\lg 2 = 0.3010$).

18 求級数 $a + (ax+b) + (ax^2+bx+b) + (ax^3+bx^2+$

$+bx+b)+\cdots+(ax^{n-1}+bx^{n-2}+bx^{n-3}+\cdots+b)+\cdots$ 的前 n 項的和(这里 $x \neq 1$)。

19 在不等边三角形 ABC 中,三个內角 A、B、C 成等差数列,其公差为 θ。又 $\operatorname{cosec} 2A$、$\operatorname{cosec} 2B$、$\operatorname{cosec} 2C$ 也成等差数列. 試求无穷級数 $\cos^2\theta+\cos^2\theta\log_{0.5}\operatorname{tg}\theta+\cdots+\cos^2\theta\log_{0.5}^{n-1}\operatorname{tg}\theta+\cdots$ 的和。

20 一个无穷递縮等比級数中,所有的奇数位次項的和比所有的偶数位次項的和多27;又去掉这个級数的前两項之后,它的和为 60,求这个級数.

21 如 $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_2\left(x-\frac{3}{8}\right)+2^{\log_2 4}=0$,求无穷級数 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots$ 的和。

22 如 x、y 都是实数,且 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}+\sqrt{\frac{2x+1}{3-4x}}+1$,試求无穷級数 $y+xy+x^2y+\cdots+x^{n-1}y+\cdots$ 的和。

23 化簡 $\log_{2-\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})$.

24 化簡 $\sqrt{(\log_3 10)^2-6\log_3 10+9}$.

25 化簡 $\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$.

26 化簡 $\log_5\frac{\sqrt[3]{25}}{5}\cdot\log_2[4^{\frac{1}{2}\log_2 3}\cdot(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}-5^{\log_5 4}]$.

27 如 x、y 都是实数,且 $(2x-1)^2+(y-8)^2=0$,試求 $\log_8 xy$ 的值。

28 如 x、y 都是实数,且 $y=\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$,試求 $\lg(x+y)$ 的值。

29 已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$,試求 a、b、c 之間的关系。

30 求証

$$(\log_2 3 + \log_4 9 + \log_8 27 + \cdots + \log_{2^n} 3^n)\log_9 \sqrt[n]{32} = \frac{5}{2}.$$

31 求証 $\dfrac{1}{\log_5 19} + \dfrac{2}{\log_3 19} + \dfrac{3}{\log_2 19} < 2$.

32 解不等式 $\lg(x^2 - x - 6) < \lg(2 - 3x)$.

33 解不等式 $\sqrt{x-1} < x - 2$.

34 解不等式組 $\begin{cases} \dfrac{x-6}{2x-5} \geqq 0, \\ \log_3(2x-3) < 1. \end{cases}$

35 如 x、y、α 都是实数，且 $x^2 + y^2 = 1$，求証:

$x \sin\alpha + y\cos\alpha$ 的絕对值不大于 1.

36 m 为哪些实数值时，x 的任何实数值都不滿足不等式

$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) < 0$.

37 如 $|x-2| < 3$，解方程

$|x+1| + |x-5| + |x-3| = 8$.

38 解方程 $2(10x+13)^2(5x+8)(x+1) = 1$.

39 如方程 $x^2 - 2px + 3q = 0$ 的一根是另一根的 3 倍；方程 $x^2 + qx + 3p = 0$ 的一根是另一根的二分之一. 求实数 p、q 的值(这里 p、q 都不是零).

40 如 a、b、c 表示一个直角三角形 ABC 的三个边，且 c 表斜边，又三角形 ABC 的内切圓分别切 BC、CA、AB 于 D、E、F，則 BD 和 AE 为方程 $2x^2 - 2cx + ab = 0$ 的两个根.

41 如 α、δ 为实数系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根，且 α、β、γ、δ 成等差数列，試求以 β、γ 为根的二次方程.

42 如整数系数方程

$2ax^2 + 2(2a-b-1)x + (2a-2b-1) = 0$

和整数系数方程

$$x^2+(2a+b+3)x+(a^2+ab+6)=0$$

都有两个相等的实根，試求 a、b 的值. 并各取这两个方程的一个根为根作一个二次方程.

43 如方程 $x^2-4x\cos 2\theta+2=0$ 和方程

$$2x^2+4x\sin 2\theta-1=0$$

有一个根互为倒数，求 θ 角 $(0<\theta<\pi)$.

44 如方程 $x^2+px+q=0$ 的二根为 $\operatorname{tg}\theta$ 和 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$，又这个方程的两个根的比是 $3:2$，試求 p、q 的值.

45 如方程 $(m+1)x^2+(2m-1)x+(m-1)=0$ 有虚根，求証方程 $(m-3)x^2-2(m+3)x-(m+5)=0$ 必有不等实根(这里 m 是实数).

46 当实数 m 为什么值时，二次方程

$$(5m+1)x^2+(7m+3)x+3m=0$$

的根为：(1) 两个虚数；(2) 两个正实数；(3) 两个負实数；(4) 一个正实数，一个負实数；(5) 一个是零.

47 不必解方程，說明下列方程在实数集合內无解.

(1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}+1=0$;

(2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}-1=0$;

(3) $\sqrt{x-8}+\sqrt{2-x}-5=0$;

(4) $x+\sqrt{x-5}=2$;

(5) $\sqrt{2-x-x^2}+\sqrt{x^2-9}-3=0$.

48 如 $A=\sqrt{2x+7}$, $B=\sqrt{2-x}$, $C=\sqrt{5-x}$，求使 A、B、C 都有意义的 x 的实数值的集合；又 x 为什么实数值时，能使等式 $A-B=C$ 成立？

49　解方程 $x^2-6x-6-x\sqrt{x^2-2x-2}=0$.

50　解方程 $\sqrt[n]{x^n+\sqrt[n+1]{a^nx^{n^2}}}+\sqrt[n]{a^n+\sqrt[n+1]{a^{n^2}x^n}}=b$ $(x>0,\ b>a>0)$.

51　如 $A=\lg\sqrt{x+1}$，$B=\lg\sqrt{4-x}$，$C=\lg\sqrt{x-2}$，問：x 为哪些实数值时，A、B、C 都有意义？又 x 为什么数值时，$A+B-C$ 的值等于 $25^{\log_5\sqrt{\lg 2}}$？

52　解方程 $\log_{16-3x}(x-2)=\log_8 2\sqrt{2}$.

53　解方程 $\log_2 3\cdot\log_9 x\cdot\log_4 x=1$.

54　解方程 $\lg^2 9x-3\lg(x+2)\lg 9x+2\lg^2(x+2)=0$.

55　解方程 $3^{\log_3 x}+7^{\log_x 1}=5^{\log_{25}(2x+5)}$.

56　解方程

$$\left(\sin\frac{\pi}{36}\right)^{\lg(1+\sin x)-4\lg\cos x+\lg(1-\sin x)}=4\sin^2\frac{19}{6}\pi.$$

57　求满足条件

$$2^{\sqrt{6}\operatorname{tg}2\theta\cos 3\theta-3\sqrt{2}\cos 3\theta+\sqrt{3}\operatorname{tg}2\theta}=\left(\sin\frac{29}{6}\pi\right)^{-3} \text{ 和 } 0<\theta<2\pi$$

的所有的 θ 角.

58　如 a、b 为方程 $f(x)=x^3-3b^2x+2c^3=0$ 的根，則以 a、b、c 为边的三角形是一个正三角形.

59　如 $f(x)=a^2x^2+abx+b^2$，今以 $x+1$ 和 $x-2$ 除 $f(x)$，余数分别为 7、13，試求 a、b 的值.

60　求証 $f(x)=x^{4444}+x^{3333}+x^{2222}+x^{1111}$ 可被 $x^4+x^3+x^2+x$ 整除.

61　已知一个三角形的三个内角 A、B、C 成等差数列，这三个角的正切值（即 $\operatorname{tg}A$、$\operatorname{tg}B$、$\operatorname{tg}C$）恰为方程

$$x^3-(3+2k)x^2+(5+4k)x-(3+2k)=0$$

的三个根，又这个三角形的面积数为 $2(3-\sqrt{3})$，試求这个三角形的三个角和三个边.

62 設一个一元四次式 $f(x)$ 的 x^4 項的系数和常数項分别为 1 和 48，又它的四个根分别是两个正三角形的边和高，又这两个正三角形的面积的比是 4:1. 求这个一元四次式.

63 如 a、b、c 为整数系数方程 $12x^3-28x^2+17x+d=0$ 的根，且 $b=a+1$，試求 a、b、c、d 的值.

64 如 $f(x)=6x^4+5x^3+2ax^2-bx+4$ 能被 $x-1$ 整除，被 $x+2$ 除余 30，求解方程 $f(x)=0$.

65 解方程 $2^{4x+1}+3\cdot2^{3x}-17\cdot2^{2x+1}-3\cdot2^{x+4}+32=0$.

66 解方程 $60\lg^4x+28\lg^3x-23\lg^2x-7\lg x+2=0$.

67 如 $1+i$ 为实数系数方程 $f(x)=x^4+3x^2-2ax+b=0$ 的根，試求 a、b 的值；并求解方程 $f(x)=0$.

68 如实数系数方程 $x^3+2kx^2+9x+5k=0$ 的一个虚根的模数等于 $\sqrt{5}$，試求 k 的值；并解这个方程.

69 求証方程 $x^4+3x^2+2x+6=0$ 沒有实根.

70 如 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n$ 都是实数，而且各不相等，則方程

$$\frac{1}{x+m_1}+\frac{1}{x+m_2}+\frac{1}{x+m_3}+\cdots+\frac{1}{x+m_n}=0$$

沒有虛根.

71 解方程 $a(x-1)^6+b(x-1)^3+c=0$.

这里 a 为方程 $\lg 10+\frac{1}{3}\lg(3^{6\sqrt{x}}+271)=\lg 50+\lg 2$ 的根；b 为质数，且能使 $\lg(b^2-12b-85)$ 和 $\sqrt{20b-b^2}$ 都有意义；c 滿足条件：球的面积数等于其体积数，而 c 恰为这个球体积的 $\frac{6}{\pi}$ 倍的相反数.

72 如 a 是 1 的一个 7 次虛根，求証

$$\frac{a^4}{1+a}+\frac{a^5}{1+a^3}+\frac{a^6}{1+a^5}=-2.$$

73 問有多少个数滿足下列三个条件:

(1) 它們的常用对数的首数都是 3;

(2) 小数部分只有十分位，而不是零;

(3) 各位数碼全不相同.

74 如 $(\sqrt[4]{27}-\sqrt[3]{3^{-2}})^{6n}$ 展开式中的末項为 $\left(\frac{1}{25^3}\right)^{\log_5 9}$，試求其第七項.

75 在 55 和 555 之間插入几个等差中項时，其中最末一个等差中項等于 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$ 展开式中含 x^3 項的系数.

76 如 $(\sqrt[8]{x^{-4}}+x)^n$ 展开式中，第五、六、七項的系数成等差数列，試求展开式中不含 x 的項.

77 如 $(x^{\lg x}+3)^n$ 展开式中，末三項的系数的和等于 22，又它的中項等于 $-540{,}000$，求 x 的值.

78 在 $(\sqrt[3]{36}-\sqrt[7]{6^x})^9$ 展开式中第八項等于 $6^{-\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^{\log_5 \frac{27}{8}}}$ 的相反数，求 x 的值.

79 如 $(ax+1)^8$ 和 $(x+a)^9$ (这里 $a\neq 0$) 展开式中，含 x^4 項的系数相等，求 a 的值.

80 如 $(ax+1)^{2n}$ 和 $(x+a)^{2n+1}$ (这里 $a\neq 0$) 展开式中，含 x^n 項的系数相等，求証 $\frac{1}{a}$ 必是方程

$$n^2(n+1)x^3+(2n+1)^2x^2-(2n+1)^3=0$$

的根.

81 求 $(1+a_1)(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n$ 的展开式的所有項的系数的和.

82 在 $(\sqrt[3]{x^{-1}}-\sqrt[5]{x^{-2}})^n$ 的展开式中,所有偶数項的系数的和等于 1024, 試求它的两个中項.

83 試求以 11 除 101^{10} 的余数.

84 如 n 表整数, 求証 $(a+bi)^n$ 和 $(a-bi)^n$ 是共軛复数(这里 a、b 都是实数,且 $a+bi\neq 0$).

85 不用数值計算或查表,求証

$$\frac{1}{1+\sin 15^\circ-\cos 15^\circ}=\frac{1}{\sin 30^\circ}+\frac{1}{\sin 45^\circ}.$$

86 已知 $0^\circ<x<45^\circ$, 且有

$$\lg \operatorname{tg} x-\lg \sin x=\lg \cos x-\lg \operatorname{ctg} x+2\lg 3-\frac{3}{2}\lg 2,$$

試求 $\cos x-\sin x$ 的值.

87 設 $\operatorname{tg}(\theta-\alpha)\operatorname{tg}(\theta-\beta)=\operatorname{ctg}^2\theta$, $|\theta|<\frac{\pi}{4}$, 試証

$$\theta=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

88 如果由四个数 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、2、$\sqrt{6}$ 中, 任取两数之和減去另两数之和, 則所得这些結果分别是 7.5° 和它的一些整数倍的正切值.

89 設 $e^x-e^{-x}=2\operatorname{tg}\theta$, 試証

(1) $e^x+e^{-x}=2\sec\theta$

(2) $x=\log_e \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$$(e>0,\ 0^\circ<\theta<90^\circ)$$

90 已知 $\frac{a}{c}=\sin\theta$, $\frac{b}{c}=\cos\theta$,

$$(c+b)^{c-b}=(c-b)^{c+b}=a,$$

且 $a>0$, $b>0$, $c>0$, $c>b$, $0<\theta\leqq\frac{\pi}{2}$, 試証

$$(\lg a)^2=\lg(c+b)\lg(c-b).$$

91 如果 $\cos\alpha=\operatorname{tg}\beta$, $\cos\beta=\operatorname{tg}\gamma$, $\cos\gamma=\operatorname{tg}\alpha$,
試証 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma=4\sin^2 18^\circ$.

92 設 $x_1^2+y_1^2=1$, $x_2^2+y_2^2=1$, $x_1x_2+y_1y_2=0$,
試証 $x_1^2+x_2^2=1$, $y_1^2+y_2^2=1$, $x_1y_1+x_2y_2=0$.

93 試証明能适合方程

$$\sin x+\sin^2 x=1$$

的 x 值,必能适合方程

$$\cos^2 x+\cos^4 x=1.$$

94 解三角方程

$$\operatorname{tg}(x+\alpha)\left(\cos 2x-\frac{1}{3}\right)=\sin 2x.$$

95 解三角方程

$$\operatorname{tg}(x+30^\circ)=2\cos x.$$

96 等式

$$\sin(x+\alpha+\beta)-\cos(x+\alpha+\beta)+2\sin x\sin\alpha\sin\beta+2\cos x\cos\alpha\cos\beta=0$$

中,如果

(1) α、β 中有一个等于 $n\pi-\frac{\pi}{4}$,則原等式为恆等式;

(2) α、β 皆不等于 $n\pi-\frac{\pi}{4}$,則原等式为方程,并求这方程的解. (n 为整数)

97 試比較

$$2+\sin\alpha+\cos\alpha \quad 与 \quad \frac{2}{2-\sin\alpha-\cos\alpha}$$

兩式的大小关系.

98 設 $0<x<\pi$, 求証

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{8}-\operatorname{ctg}x>3.$$

99 設 α、β、γ 为銳角三角形三个內角,試証

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{tg}\beta(\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\geqq 6.$$

100 解不等式

$$2\cos x-2\sin x+\sqrt{3}>\sqrt{3}\operatorname{ctg}x. \quad (0^\circ<x<90^\circ)$$

101 三角形 ABC 中,已知 $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $C=30^\circ$, 試求 $AC+BC$ 的最大值.

102 設 $(a-1)(b-1)>0$, 且 a、b、θ 皆为实数, 試求 $\dfrac{(a+\cos\theta)(b+\cos\theta)}{1+\cos\theta}$ 的最小值.

103 如果 $a>b>0$, 則

$$\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$$

不能介于 $\dfrac{a-b}{a+b}$ 及 $\dfrac{a+b}{a-b}$ 之間.

104 設 $\sin 2x$ 及 $\sin x$ 分別为 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的等差中項及等比中項,求 x.

105 如果三角形三边 a、b、c 的倒数成等差数列,則 b 边所对的角必为銳角.

106 如果 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}2\beta$、$\operatorname{tg}\beta$ 成等差数列时,則有

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\sin 2\beta.$$

107 設 θ 为满足方程 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ 的最小正角，試求 $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin 8\theta$ 的值.

108 一直角三角形的两直角边为 a 和 b，a 边所对的角为 $\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}$，試証 a 与 b 有下列的关系式

$$\lg\frac{1}{\sqrt{6}}(a+b)=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

109 $\triangle ABC$ 的周长等于这个三角形内切圓半径的 12 倍，且有 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C$，試求这三角形三边的比.

110 設 $A+B+C=180°$，且

$$\frac{x}{\sin A}=\frac{y}{\sin B}=\frac{z}{\sin C},$$

求証 $(x-y)\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+(y-z)\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+(z-x)\operatorname{ctg}\frac{B}{2}=0$.

111 等腰三角形 ABC 中，BC 为底边，BD 为底角 B 的平分綫，且有 $AD+BD=BC$，求这三角形的各角.

112 三角形三边成等差数列，公差为 1，且最大角为最小角的二倍，求这三角形各边长.

113 三角形 ABC 的三边 a、b、c 成等比数列，試証

$$\cos(A-C)=1-\cos B-\cos 2B.$$

114 三角形 ABC 的面积为 $10\sqrt{3}$ 平方尺，周长为 20 尺，且角 A 为 $60°$，求这三角形的三边长.

115 三角形 ABC 中，如果三个內角間有关系式

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{4},$$

則角 A 所对边的傍切圓面积与外接圓面积相等.

116 $\triangle ABC$ 的外接圓半径为 R，內切圓半径为 r，三条边外

的傍切圆半径分别为 r_a、r_b、r_c，且 $\frac{1}{r_a}$、$\frac{1}{r_b}$、$\frac{1}{r_c}$ 成等差級数，r、r_b、R 成等比級数，求 B。

117 三个銳角之中，第一个角的一半的正切等于第三个角的一半的正切的立方，而第三个角的正切又等于第二个角正切的二倍，則这三个銳角成等差級数。

118 火車站鉀楼上鉀的表面半径为 a，中心距地面为 b，若在地面上某点直对鉀面，試証自这点望鉀面所张最大的角为 $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$。

119 有人在地面上測得某工厂的水塔的仰角为 β，并測得塔上蓄水庫的視角为 α，此人向水塔前进 a 尺，測得这蓄水庫的視角仍为 α，試求这水塔与蓄水庫的高。

120 欲測对岸两棵树 P、Q 間的距离，在河岸上选得 A 处，測得有最大的张角 α，另在岸上 B 点处，測得 $AB=a$，而 P、Q、B 三点恰在一直綫上，这直綫 PB 与 AB 所夹的角为 β，求 PQ。

121 方程 $3x^3+px^2+qx-4=0$ 的三个根分别为同一个正三角形的边长、半径、边心距，求 p、q 的值。

122 一个三角形的三条边的长度分别为方程

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

的三个根，求这个三角形的面积。

123 一个正三角形的三条边分别增加 3、4、5 之后得到的三角形的面积为 84，求这个正三角形的边长。

124 方程 $x^3-12x^2+47x-k=0$ 的三个根分别为一个直角三角形的三条边的长，求 k 值。

125 P 为正三角形 ABC 的外接圆 O 外的一点，且 $AP=3$，