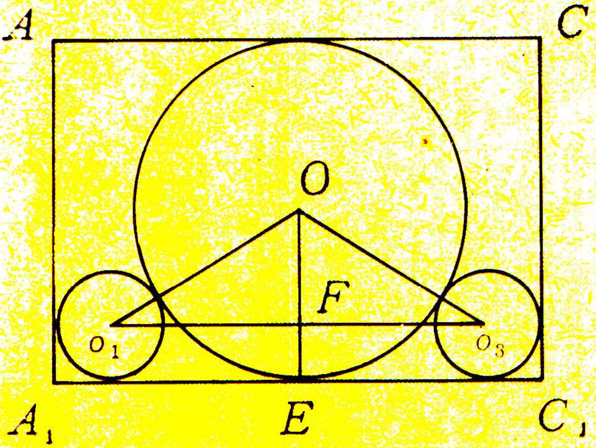
徐博良 陈育彬 编著



图形与数学解题

TUXING
YU SHUXUE JIE TI

湖南教育出版社

图形与数学解题

徐博良 陈育彬 编著

湖南教育出版社

图形与数学解题

徐博良　陈育彬　编著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷一厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印张：11　字数：270000

1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷

印数：1—3000

ISBN 7－5355－2595－4/G・2590

定价：14.10 元

目 录

绪　论………………………………………………………………（1）
第一章　数学解题的图形形式……………………………………（16）
第二章　图形对数学解题的作用…………………………………（27）
第三章　图形构造应遵守的原则…………………………………（49）
第四章　平面图形与数学解题……………………………………（67）
　第一节　图形的构造………………………………………………（67）
　第二节　平面图形的变换…………………………………………（88）
　第三节　复合函数图象画法………………………………………（96）
　第四节　平面区域问题……………………………………………（102）
　第五节　平面图形典型问题例举…………………………………（107）
第五章　空间图形与数学解题……………………………………（229）
　第一节　直观图的画法……………………………………………（229）
　第二节　几何体的截面……………………………………………（240）
　第三节　平面图形的翻折…………………………………………（248）
　第四节　平面几何图形的变换……………………………………（264）
　第五节　空间图形的变换…………………………………………（272）
第六章　图形解题中应防止的误病………………………………（314）
练习参考解答与提示………………………………………………（332）

绪　论

数学以现实世界中的空间形式与数量关系为研究对象，也就是说，数学是研究数形及其关系的一门科学．数与形结合的观点是研究数学的一个基本观点，深刻地理解这一观点，有利于提高学生的数学素养，有利于发展学生分析问题与解决问题的能力．

许多数学问题，初看似乎无从下手，难于思考，或者过程复杂、运算冗繁，但如能画出相应的图形后，问题的解题思路便非常明朗，解题过程便十分简单．下面我们选用数例有一定难度的世界名趣题或数学竞赛题来加以说明．

例 1　一组割草的人要把两片草地的草割掉，大的一片草地比小的一片大一倍．全体组员先用半天时间割大的一片草地，到下午他们对半分开：一半人仍留在大草地上，到傍晚时正好把大草地上的草割完；另一半人就到小草地上去割，到傍晚还剩下一小块，这小块由一人去割正好一天可以割完．问这组割草的人共有多少个？8

这里介绍俄国伟大作家托尔斯泰非常称赞的一种图形解法．

图 0-1 中左边的长方形代表大草地，右边的长方形代表小草地，且不妨设大草地的面积为 1 个单位，则小草地的面积就为$\frac{1}{2}$个单位. 根据题中条件，从图中可见，一半组员半天割了$\frac{1}{3}$，全体组员半天割了$\frac{2}{3}$，一天割了$\frac{4}{3}$，所剩下的一小块应是$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，这也就是一人一天所割的面积单位. 于是，一天割了$\frac{4}{3}$草地的人（全体组员）应是：

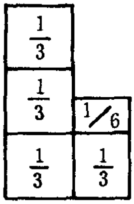


图 0-1

$$\frac{4}{3}\div\frac{1}{6}=8(\text{人}).$$

也较容易

这是一道算术题，若用纯算术方法解题是较困难的，若多角度地观察思考问题，通过图形把抽象问题给出了具体解释，解题便很方便了. 当然本题也可构造如图 0-2 的线段形式来给出解题.

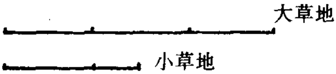


图 0-2

例 2 要把一根长为 4000mm 的条形钢材截成 518mm 和 698mm 的两种毛坯（损耗不计）. 应该怎样下料使材料利用率最高？

解：设截 518mm 长度的为 x 根，698mm 的为 y 根，依题意有：

$$\begin{cases}518x+698y\leqslant 4000,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

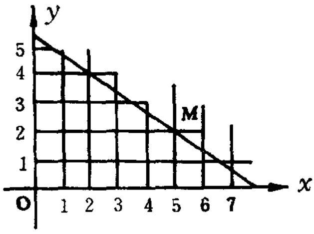


图 0-3

于是问题转化为在不等式组所确定的区域内，寻找合适的整数解. 为此，在坐标纸上作直线：$518x+698y=4000$，$x=0$，$y=0$ 在它们所围成的三角形区域内，找得最靠近直线 $518x+698y=$

4000 的整点为 $M(5,2)$. 即把钢材截成 518mm 长的毛坯 5 根、698mm 长的毛坯 2 根最省料.

许多生产、生活、科技中的数学问题借助于图形(曲线与方程)可得到理想的简捷解法. 本题若用拼凑方法寻找最佳整数解是麻烦的.

培养学生解决实际问题的能力是数学教育的重要任务之一.

例 3 已知: $0<x<1, 0<y<1, 0<z<1$, 求证: $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.

分析: 用代数法解此不等式解法较多, 若从结论观察, 式中 $x(1-y)$, $y(1-z)$, $z(1-x)$ 表示三个积, 由此构造边长为 1 的正方形, $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)$ 由小长方形来实现(如图 0-4).

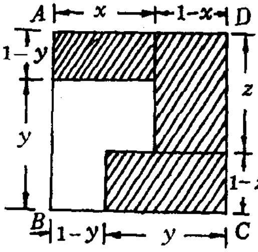


图 0-4

证明: 以 1 为边长作正方形. 由 $0<x<1, 0<y<1, 0<z<1$, 在正方形 $ABCD$ 各边上分别取长为 x, y, z, 并作小长方形(如图 0-4), 由图可知: 阴影部分面积小于正方形面积.

$\therefore\quad x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$ 证毕.

从上面解题可见, 构图证明比任何一种代数方法更简便, 而且不必借助于基本不等式公式. 正确的构图是证明此不等式的关键. 我们只有学会正确的图形构造, 才能运用图形解决问题.

例 4 对于 x 的哪些实数值, 下列等式成立:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$.

这里根式仅表示算术平方根.

解: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\sqrt{2x-1}|+|\sqrt{2x-1}-1|\right)$$

因此,本题等价于:对于 x 的哪些实数值,下列等式成立?

a′) $|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|=2$;

b′) $|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|=\sqrt{2}$;

c′) $|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|=2\sqrt{2}$.

$|\sqrt{2x-1}+1|+|\sqrt{2x-1}-1|$的几何意义为:抛物线 $y=\sqrt{2x-1}$上任一点到两直线 $y=-1$ 和 $y=1$ 的距离之和(如图 0-5).两直线间的距离为 2,由图知 b′)对于 x 的任何值都不成立;夹在两直线间的抛物线 $y=\sqrt{2x-1}$上的任意一点到两直线的距离之和都是 2.

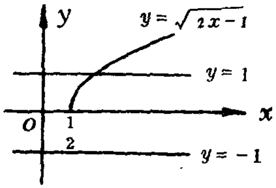


图 0-5

解$\begin{cases}y=1\\y=\sqrt{2x-1}\end{cases}$ 得 $x=1$.

故当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,a′)成立.

c′)成立,则 $y>1$,故 c′)为 $\sqrt{2x-1}-1+\sqrt{2x-1}+1=2\sqrt{2}$,即 $\sqrt{2x-1}=\sqrt{2}$,解得 $x=\frac{3}{2}$.

所以:a) 当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时成立;b) 对于 x 的任何值都不成

立;c）当 $x=\dfrac{3}{2}$时成立.

这是一道数学竞赛题.本题若不构造方程曲线几乎无从下手.仅化去绝对值符号与根号就不胜其烦.但构造方程曲线后，从图形上根据绝对值几何意义便能方便地给出解答.

例 5 某杂志发表了 7 个题目，当从读者寄来的解答中选出每题的两个解答，准备把它登在一期杂志上，编辑发现所有 14 个解答是 7 个读者提出的，它们之中每个人恰好提出了 2 个.证明：编辑可以发表每道题的一个解答，使得在发表的解答中，这 7 个读者中每一个人恰好有一道解答.

这种题目.画一个图的想法是很自然的.我们用一些字母来表示读者，用数字表示解答，再用一些线来表示读者和它的解答.无论怎样画，我们得到的图形总是封闭的，于是，总可以选出其中的 7 根线段（如：$\begin{matrix}a\\|\\2\end{matrix}$ $\begin{matrix}b\\|\\5\end{matrix}$ $\begin{matrix}c\\|\\1\end{matrix}$ $\begin{matrix}d\\|\\3\end{matrix}$ $\begin{matrix}e\\|\\7\end{matrix}$ $\begin{matrix}f\\|\\6\end{matrix}$ $\begin{matrix}g\\|\\4\end{matrix}$），使得包含 14 个不重复的顶点.

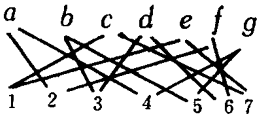


图 0-6

这类问题若用拼凑方法是很麻烦庞杂的，通过构图就可简单地得到解决.

例 6 4 个城市举行足球比赛，每个城市派出甲乙两个球队，其中：(1)同一城市两队不进行比赛；(2)每两队间的比赛不超过一次.比赛后，除了某城市的甲队外，其余各队比赛的场数各不相同.问此城市乙队比赛了几场？3

分析：容易知道，各队比赛过的场数为 0,1,2,3,4,5,6.

不失一般性，设 A 队赛了 6 场，而 B 队没有比赛，那么 A、B 队是同一城市的.再可设 C 队赛了 5 场，而 D 队赛了 1 场，从图中我们也很容易看出 C、D 队是同一城市的.同样也可推知 E、F

队必是同一城市的. 最终 G、H 队也是同一城市的，他们都赛了 3 场，而 H、G 队恰好就是甲、乙两队，因为甲队比赛过的场数和其他队中的一个是相同的. 于是此城市乙队比赛了 3 场.

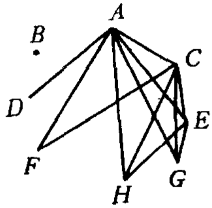


图 0-7

例 5、例 6 两题，若不借助于图形是很"绕"脑子的，借助于构图，通过(双方)连线；再加以分析，便不难解决.

例 7 假定某轮船公司，较长时间以来，每天中午有一只轮船从 A 地开往 B 地，并且在每天同一时间，也有一只轮船从 B 地开往 A 地，轮船在途中所花时间，来去都是 7 昼夜，问今天中午从 A 地开往 B 地的轮船在整个航运途中，将遇到几只同一公司的轮船从对面开来?

此题若不认真思考，很可能认为遇到 7 只轮船，这是错误的. 这个错误是只考虑了以后开出的轮船，忽视了已在途中航行的轮船. 为了得出正确解答，采用图解法处理. 图 0-8 中下行数字表示船开出的时间，(如"-6"表示在前第 6 天中午开出)，上行数字表示今天中午从 A 开出的轮船相遇对方开来轮船次数.

由图可知，这只轮船将遇到 15 只轮船，出发时遇到一只，到达 B 地时遇到一只，途中遇到 13 只.

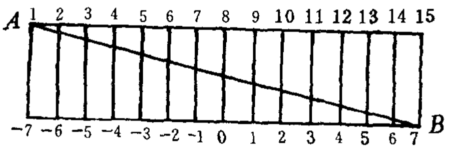


图 0-8

这是一道著名的"刘卡趣题". 上世纪法国数学家刘卡在一次国际会议期间，当来自各国的著名数学家出席晨宴快结束时，突然向在场的人们提出的被他称为最困难的一个题目. 本题若不借助于图形很易错误解答，但画出图形后，错误的答案在图形

上能清楚地显现出来.

例 8 一个公司有 15 个负责人，19 个车间，要把这些负责人落实到车间中去，使每个车间有 3 个负责人，并且，每两个人不能同时在两个不同的车间，请你设计一种这样的分配方案.

分析：如果想要凭空得出结果来，简直是不可能的. 寻找 15、19、3 这些数字的实际意义. 设想构造一个正方体，其各面的中心、顶点和立方体的中心，恰好有 15 个顶点，而这些点中有一些是三点共线，恰好有 19 根这样的线段，于是问题很漂亮地得到解决，即将 15 个负责人分别放在 15 个点上，每一条线段表示一个车间，任一种安置方法便得到一种设计分配方案.

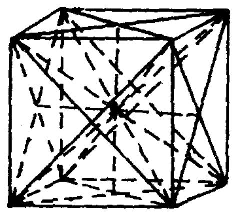


图 0-9

相仿，读者可以思考这样一个问题：“一个大公司的管理机构由 15 个经理组成，且这些机构有 20 个委员会，这些委员会要求这样组成：

(1)每个经理参加 4 个委员会；(2)每个委员会包含 3 个经理；(3)没有任何 2 个委员会包含有同样参加这两个委员会的一个以上的经理. 问应怎样组成？”(提示：利用正方体各面中心连线组成的正八面体.)

这样一道费脑筋的数学问题放置到一个数学模型（这里指图形)中去，问题的解答是很显然的. 我们要学会抓住数学问题的一些数字或其它特征，并与相称的数学图形进行联想，找出它们间的联系，把抽象的数学问题转化到具体图形中去解决.

例 9 水池装有编号为①、②、③、④、⑤的 5 条水管，其中有些是进水管，有些是出水管. 如果同时开放两条水管，注

满水池的时间如下表所示，那么单开一条水管最快注满水池的水管编号为：

A. ①；　　B. ②；　　C. ④；　　D. ③或⑤.

开放水管号	①②	②③	③④	④⑤	⑤①
注满水池时间(小时)	2	15	6	3	10

分析:本题给出的数据虽然并不算少,但可供计算的数据却极少,若慢慢根据条件理出一些结果,耗时甚多. 如果本题采用图表作业就非常理想.

解: 对两个水管来说,若甲注满水管快于乙注满水管,则记甲＞乙. 若在两个水管中有出水管,这样记法仍可行,即可记进水管＞出水管;若其中两者均为出水管时,则两者表现为没有比较关系,但使用图表作业时不会受到妨碍. 图 0-10 中用实线连结两栏表示对这两栏进行比较,比较结果标在实线下面. 图 0-10 中按照自上而下的顺序进行.

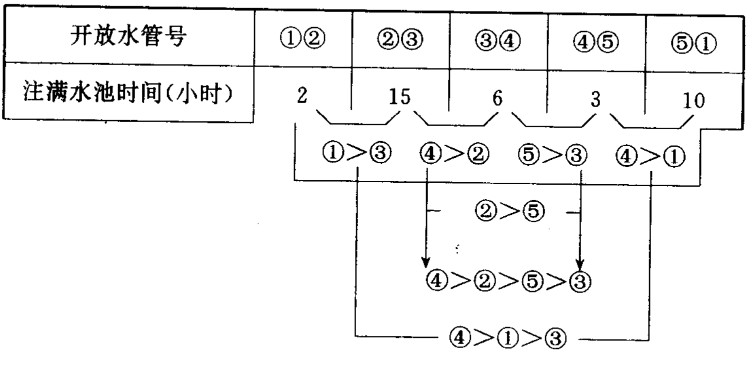


图 0-10

其结果很显然是④号水管注满水池快于其它水管.

这是一道数学竞赛试题,若列不等式解将难于进行解题,从图形上通过有序排列、联线比较,便很方便得出结论.

例 10 有限个实数(可以重复)按一定顺序排成一列.任意连续七个数之和为负,任意连续十一个数之和为正.确定这些实数最多有多少个.

分析:将这有限个实数依次编号为①、②、③、…,用虚线表示它所连结的连续若干数之和为负,用实线表示它所连结的连续若干数之和为正.用(1)、(2)、(3)、…表示图上作业的顺序为第一步、第二步、第三步等,根据题目条件得到如下图表:

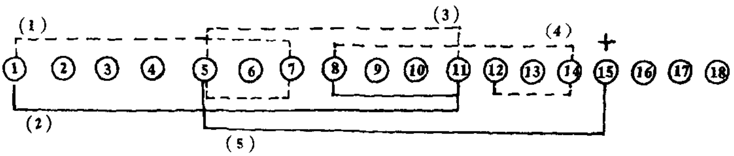


图 0-11

由(1)、(2)得出⑧、⑨、⑩、⑪四数和为正,由(3)、(4)得出⑤、⑥、⑦的和与⑫、⑬、⑭的和分别为负,再由⑤、⑥、⑦的和为负结合(4)、(5)得到⑮号数为正.在此有序数表上,根据上面同样的方法(即得到第⑮号数为正的方法),可推出第⑯号数必为正;再"拉动"一"格",又得到⑰号数为正,这样继续下去可得出自⑮号数开始以后每数均为正,但与⑫、⑬、⑭三个连续数的和为负矛盾,这表明,所给实数是不会超过 16 个的.

本题为了便于理解,作出了一些文字说明与叙述,事实上作为解题者为了解题作出图形也就足够了.

这是一道有一定难度的数学竞赛试题,若不借助于数表,问题不知从何处下手,极难处理.问题若转化到有序数表中去,就给思考本题带来了顺序性,问题解决也便可望了.

例 11 在一个棋盘上有一个马,试问它能否经过五步后又跳回起跳原点? $2n+1$ 次呢? 证明你的结论. No.

解:如图 0-12,设马的初始位置在棋盘上 A 点,将棋盘上所

有节点相间地涂上黑白两种颜色，且使 A 点为黑色点.马从 A 起跳，经过一步后，它总是落在一个白色节点上(不论哪个方向).相应地，若马从某一个白色节点起跳，经过一步后，总是落在一个黑色节点上.故马跳五次所经历的节点的颜色变化如下：

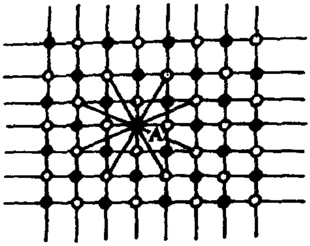


图 0-12

$$(A\text{ 点})\text{黑}\xrightarrow{①}\text{白}\xrightarrow{②}\text{黑}\xrightarrow{③}\text{白}\xrightarrow{④}\text{黑}\xrightarrow{⑤}\text{白}$$

显然，不论马如何跳五次，它最后总必须落在白色节点上，故跳五次不可能回到原点.

类似地，马经过 $2n-1$ 次跳动，则其颜色变化如下：

$$(A\text{ 点})\text{黑}\xrightarrow{①}\text{白}\xrightarrow{②}\text{黑}\cdots\xrightarrow{2n-1}\text{白}\xrightarrow{2n}\text{黑}\xrightarrow{2n+1}\text{白}$$

最后总是白色，故马跳 $2n+1$(奇数)次，不可能跳回原点.

例 12 如图 0-13，能否沿此图上的线画出一条线，它经过每个节点恰好一次.

解：注意到图中恰好有 16 个节点，且具有对称性，故可将这 16 个节点一一相间地涂上黑白两种颜色，易知这可以做到.

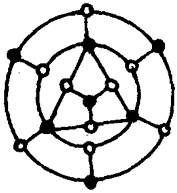


图 0-13

根据节点的颜色分布规律，可以看出每条线段或圆弧的两个端点总是异色的.于是到达了一个白点(或黑点)后所画的线紧接着必须到一个黑色(或白色)节点.由于图中有 7 个黑色节点，9 个白色节点，假设可以画出一条满足题设要求的线的话，应首先从白色节点出发，但即使这种情况，经过 7 次颜色变化：

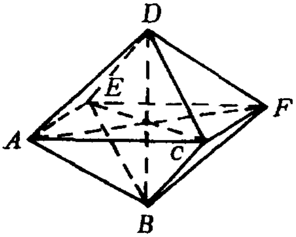
$$\text{白}\longrightarrow\overset{①}{\text{黑}}\longrightarrow\text{白}\longrightarrow\overset{②}{\text{黑}}\longrightarrow\text{白}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\overset{⑦}{\text{黑}}(\longrightarrow\text{白})$$

此时尚有 2 个白色节点未通过，故不可能达到题设要求.

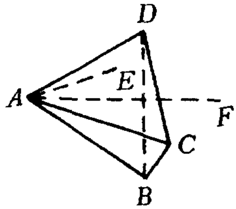
这两个问题，将节点涂色是解题的关键. 由此看出：在给出图形的数学问题中，对图形的恰当处理是非常重要的. 涂色也是处理图形的方法之一，这在中学数学中不多见.

下面两例，我们进一步讨论线与面的涂色问题.

例 13 证明任意选出 6 个人，那么或者在其中可找出 3 个人，使每人与其余 2 人相识. 或者在其中可找出 3 个人，使每人与其余 2 人都不相识(假设 2 人相识是互相的).



(1)



(2)

图 0-14

证：我们把 6 个人分别看作八面体的六个顶点，于是，命题就化为等价的问题：如果用任意的方式把八面体的每条棱和每条对角线染成绿色(相识)或红色(不相识)，那么，需要证明：在顶点与八面体顶点重合的某个三角形中，所有的边都染上同一颜色.

把每个顶点同另一顶点用棱或对角线连结起来(见图 0-14(1))，在连结这个顶点与其余五个顶点的五条线段中，至少有三条染成同一颜色，不妨设是以 A 为顶点连结的五条线段是 AB、AC、AD、AE、AF. 其中 AB、AC、AD 染成同一色(见图 0-14(2))，设为绿色，取出这三条，我们知道：

(1)若 BC 也为绿色，则 ABC 便是所求的；

(2)若 BC 是红色,CD、BD 若有一条是绿色,不妨设 CD,则 ACD 便是所求. 又若 CD、BD 都是红色,则 BCD 便是所求的了.

这些问题若不用图形涂色方法处理,是难于进行解题的,读者不妨用其它方法思考一下.

例 14 (缺角棋盘问题)给你一张 8×8(格)的棋盘和 32 张长方形纸条,每张纸条恰好能盖住棋盘上相邻的 2 个小方格,因而 32 张纸条恰好盖住了棋盘上 64 个小方格. 现将棋盘对角上两小方块 A、B 切掉,能否以 31 张纸条把余下的 62 个方格完全盖住? 试证明你的结论.

证明:连同 A、B 将所有 8×8 个小方格相间地涂上黑白两种颜色,使每一个白色小格四方均为黑色格子,每一个黑色格子四方均为白色格子,其中可令 A 为白色,这样 B 也为白色. 由于剩下 62 个方格中有黑色方格 32 个,白色方格 30 个,注意到一张纸条盖住的 2 个方格总是一黑一白两个异色格,因此容易看出 31 张纸条无论如何也不能完全盖住这剩下的 62 个方格.

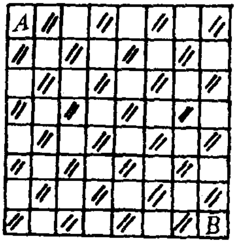


图 0-15

例 15 赵,钱,孙,李分别教数学、物理、化学、英语,赵只能教物理、化学,钱只能教数学、英语,孙只能教数学、物理、化学,李只能教化学. 为使他们分别教一门胜任的课程,问应该怎样安排他们的课程.

解:注意到一个人能教和只能教的课程这两点,列出一个表来,可能更易于安排一些. 以下以"○"表示该教师能教的课程,"●"表示该教师必须安排教授这门课程,以"⊗"表示由于受到条件的限制不能再安排教授该门课程,为反映出图表作业全过

程，现作出两个表：

课程 姓名	数	物	化	英
赵		○	○	
钱	○			○
孙	○	○	○	
李			○	

（1）

课程 姓名	数	物	化	英
赵		●	⊗	
钱	⊗			●
孙	●	⊗	⊗	
李			●	

（2）

图 0-16

由表(1)的行与列中可见唯一安排方法是：李教化学，钱教英语，再从第一行可见，赵教物理；第三行中可知孙教数学（如表(2)）.

例 16 某学校举办数学竞赛，A、B、C、D、E 五位同学得了前五名，发奖前，老师让他们自己猜一猜各人的名次排列情况.

A 说：B 第三名，C 第五名.

B 说：E 第四名，D 第五名.

C 说：A 第一名，E 第四名.

D 说：C 第一名，B 第二名.

E 说：A 第三名，D 第四名.

老师说，每个名次都有人猜对，问这五位同学的名次如何？

解：列图表，把各人猜测之情况（名次）列于该人相应的名次上. 例如 A 说：B 第三名，C 第五名，则在 A 后第三名处标“○”并记“B”，在这一栏的第五名处标“○”并记“C”，其它类似. 再把同一人的两个“○”连起来，得图 0-17(1).

根据“每个名次都有人猜对”同时“每人只能得一个名次”的原理对图 0-16(2)进行作业，以“●”表示这名次对，以“○”表示