初等数学自学丛书

几何

刘增贤　王汇淳　合编

中央广播电视大学出版社

刘增贤 王汇淳 编

中央广播电视大学出版社

目　　录

基 本 知 识

几何学是数学的一个重要分支，它研究的对象是现实世界的空间形式和数量关系，而且主要的是空间形式，具体地说，几何学研究的是图形的性质和图形之间的关系。

现实世界的图形是多种多样的，由直线或直线段所组成的图形称为直线形。平面几何主要研究最基本、最常见的图形——直线形和圆。研究它们的性质、作图法和长度、面积等计算问题。

一、算术中有关几何部分的复习

在算术课程中，我们已经接触过一些简单的图形，并能计算一些简单图形的面积与体积，这里作一简要的复习。

(一) 长方形

两组对边分别平行，四个内角都是直角的四边形叫长方形，又称为矩形。

若长方形的两邻边长分别用a、b表示，周长用s表示，面积用A表示，则有：

$$s=2(a+b)$$

周长等于相邻两边和的2倍。

$$A=a\cdot b$$

长方形面积等于两邻边长的乘积。

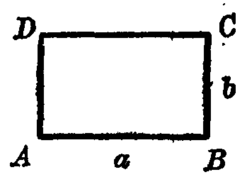


图 1

(二) 正方形

邻边相等的长方形叫正方形，若其边长为a，则有：

$$s = 4a$$

周长等于边长的4倍。

$$A = a^2$$

正方形面积等于边长的平方。

（三）平行四边形

两组对边分别平行的四边形叫平行四边形。从平行四边形一条边上一点到对边引一条垂线，这点和垂足之间的线段叫做平行四边形的高，这条对边叫平行四边形的底。如图2中的DH是平行四边形$ABCD$的高，AB是平行四边形$ABCD$的底。

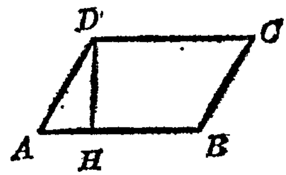


图 2

若平行四边形的底和高的长分别用a与h表示，底的邻边长用b表示，则

$$S = 2(a + b)$$

周长等于相邻两边和的2倍。

$$A = a \cdot h$$

面积等于底乘高。

（四）梯形

只有一组对边平行的四边形叫做梯形。在梯形里，互相平行的一组对边，分别叫做上底和下底，不平行的一组对边叫做梯形的腰，从上底的一点到下底引一条垂线，这点和垂足之间的线段叫做梯形的高。若梯形的上底、下底、高的长分别用a、b、h表示，则

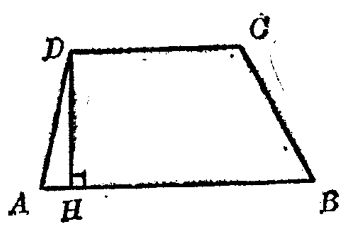


图 3

$$A=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$$

梯形面积等于上下底之和乘以高的一半。

（五）三角形

由三条首尾顺次相接的线段围成的图形叫做三形角．从三角形的一个顶点到它的对边作一条垂线，顶点和垂足之间的线段叫做三角形的高，这条边叫做三角形的底。若三角形的底与高的长分别用c与h表示，则

$$A=\frac{1}{2}c\cdot h$$

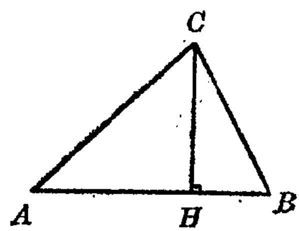


图 4

三角形面积等于底高乘积的一半。

（六）圆

通过用圆规画圆我们可以了解到：圆上各点到圆心的距离相等．圆上任意一点与圆心之间的线段叫做圆的半径，其长用r或R表示，则

$$S=2\pi R$$

圆的周长等于半径与π乘积的2倍。

$$A=\pi r^2$$

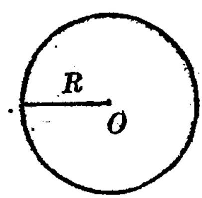


图 5

圆的面积等于半径的平方乘以π。

这里π是圆周率，它是一个无限不循环的小数，它的不足与过剩近似值分别为3.1415与3.1416。

（七）长方体

长方体的长、宽、高的长度分别用a、b、c表示，体积用V表示，则有：

$$V = a \times b \times c$$

长方体的体积等于其长、宽、高的长度的乘积.

（八）直棱柱

直棱柱的底面积用A表示，高用h表示，体积用V表示则有：

$$V = A \times h$$

直棱柱的体积等于底面积与高的乘积.

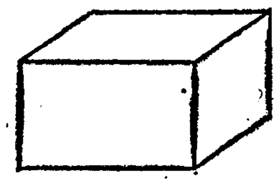


图 6

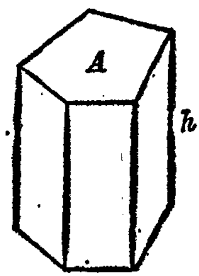


图 7

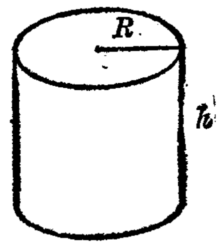


图 8

（九）直圆柱

直圆柱的底面圆半径用R表示，高用h表示，体积用V表示，侧面积用$A_{侧}$表示，则

$$A_{侧} = 2\pi Rh$$

直圆柱的侧面积等于底面圆的周长与圆柱高的乘积.

$$V = \pi R^2 h.$$

直圆柱的体积等于底面面积与圆柱高的乘积.

二、基本图形的简单性质

（一）直线、线段和射线

1．直线

木工锯木板时所画的墨线，双手拉紧的绳子，穿过小孔

射出来的光线，这些都给我们直线的形象．但是在几何中的直线是可以向两个方向无限延伸的．

直线可以用表示它上面任意两个点的大写字母表示，如“直线AB”；也可以用一个小写字母表示，如“直线l”．(图9)

图 9

画直线可以用直尺．先在纸上画两点，经过这两点用直尺可以画一条直线，木工锯木板也是先在木料上定出两点，然后用墨斗沿着这两点弹出直线．无数次实践使我们总结出关于直线的一个基本性质：

通过两点只能引一条直线，或者说：两点确定通过它们的一条直线．

事实上，用直尺只能画出直线的一部分，移动直尺后可以把这一部分向两个方向任意地延伸．

两条直线的公共点，称为它们的交点．

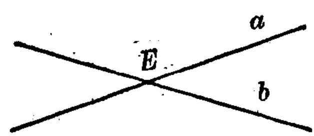


图 10

根据上述直线的基本性质，可以推导出如下结论：

两条直线至多有一个交点(图10)．

因为如果有两个(或多于两个)交点，两条直线便要重合为一条了．

2．线段

直线上任意两点间的部分叫做线段，这两点叫做线段的端点．

线段通常用表示它们两个端点的大写字母表示，例如“线段AB”或者“线段BA”；或者用一个小写字母表示，例如“线段b”(图11)。

图 11

利用直尺可以把一条线段向任何一方延长，例如，我们可以经过点B把线段AB延长，也可以经过点A向BA方向延长，它们的延长部分用虚线表示，如图(12)。

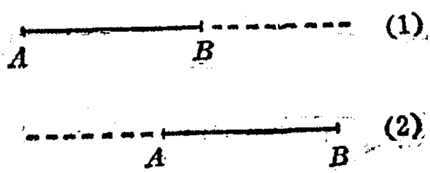


图 12

图12(1)称为延长AB。

图12(2)称为延长BA或反向延长AB，线段的延长部分叫做延长线。

比较两条线段的长短，是把其中的一条线段移到另一条线段上去进行的。我们把移动一个图形简称移形，几何图形具有这样一个性质：移形是不会改变它的形状和大小的。

现在我们来比较线段AB与线段CD的长，先把AB放到CD上，使点A与点C重合起来，并且使线段AB沿着线段CD落下，如果B点和D点也重合在一起，那么线段AB和线段CD称为相等，这时可写成：

$$AB=CD \quad 或 \quad CD=AB$$

图 13

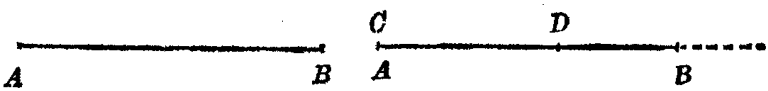
如果B落在C、D这两点之间，如图14(1)，则称线段AB比线段 CD 短，这时可写成：

$$AB<CD \qquad \text{或} \qquad CD>AB$$

如果B点落在线段CD的延长线上，如图 14(2)则称线段AB比线段CD长，这时可写成：

$$AB>CD \qquad \text{或} \qquad CD<AB$$

(1)



(2)

图 14

在线段AB上取任意一点P，就分得两条新的线段 AP 和PB，如图15所示．线段 AB 叫做线段AP与PB 的和．线段AP或PB叫做线段AB与另一线段的差，这可以写成：

$$AB=AP+PB \qquad AP=AB-PB \qquad PB=AB-AP$$

图 15

在线段AB上有一点M，如果使得

$$AM = MB$$

那么这一点M就叫做线段AB的中点，或者说点 M 平分线段AB。

对于线段，可以进行度量，即可以用有刻度的直尺来量出线段的长度．通常所用的长度单位是米(m)、厘米(cm)、毫米(mm)，或尺、寸等．线段的相等、长短以及和差关系与其度量数的相等，大小及和差关系是一致的．即在取定度量单位后，那么相等的线段对应相同的长度，较长的线段所对应的长度也较大，又若线段AB等于线段AP 与线段PB之和，那么线段AB的长度也等于线段AP与线段PB的长度之和．

实践告诉我们：

在连接两点的线中，线段最短(如图16)．连接这两点的线段的长度，叫做这两点间的距离．

图 16

3．射线

直线上某点一侧的部分称为射线．这一点称为射线的端点．象手电筒、探照灯射出的光线，都给我们以射线的直观形象．

射线用表示它的端点和射线上任一点的大写字母表示，并把表示端点的字母写在前面．例如(图17)中的射线记为：

图 17

“射线OC”．

射线具有下面的基本性质：

设AB是给定的线段，OC是已知的射线，则在射线OC上有且仅有一点P，使得线段

$$OP=AB$$

（二）角

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。

两条射线的公共端点叫做角的顶点。

组成角的射线叫做角的边．如图18。

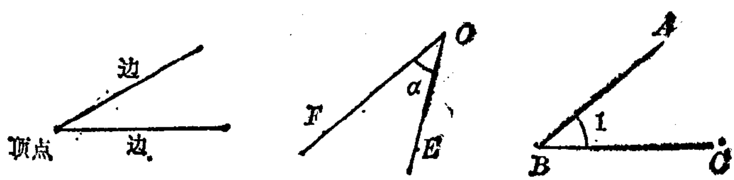


图 18

角用符号"∠"表示，图中的角记作$\angle ABC$或用$\angle CBA$表示，角的顶点的字母必须写在其他两个字母中间，在不会和其他角发生混淆的情况下，$\angle ABC$可以简写为$\angle B$。为了简便，有时在角的里边标上数字或希腊字母表示角．如图18中的$\angle EOF$可记为$\angle\alpha$，$\angle ABC$可记为$\angle 1$。

把两个角$\angle ABC$和$\angle DEF$迭置起来，使两角的顶点B和E重合，边BA和ED重合，且使两角位于重合边的同侧。当BC边与EF边也重合时，则称$\angle ABC$与$\angle DEF$相等．记作：

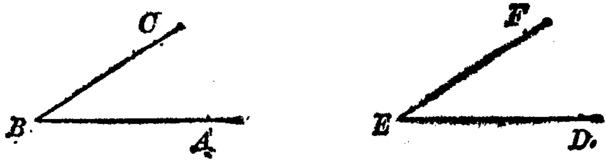


图 19

$$\angle ABC = \angle DEF \quad 或 \quad \angle DEF = \angle ABC$$

当BC边与EF边不重合，并且BC边位于$\angle DEF$的内部时，那么就说$\angle ABC$小于$\angle DEF$或说$\angle DEF$大于$\angle ABC$记作

$$\angle ABC < \angle DEF 或 \angle DEF > \angle ABC$$

如果两个角共有一个顶点和一条公共的边，而且其他两边落在公共边的两旁，这样的两个角叫做互为邻角．如图20，$\angle AOB$与$\angle BOC$就互为邻角．这时，$\angle AOC$叫做$\angle AOB$与$\angle BOC$的和，$\angle AOB$或$\angle BOC$叫做$\angle AOC$与另一角的差．这时可以写成：

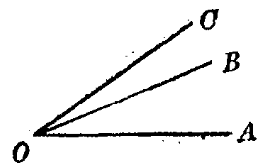


图 20

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

$$\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$$

$$\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$$

在$\angle AOB$的内部有一射线OT，如果使得

$$\angle AOT = \angle TOB$$

那么这条射线OT就叫做$\angle AOB$的平分线．或者说OT平分$\angle AOB$，如图21(1)．

如果构成角的两条射线OA与OB恰成一直线．这样所得的角$\angle AOB$叫做平角．如图21(2)．

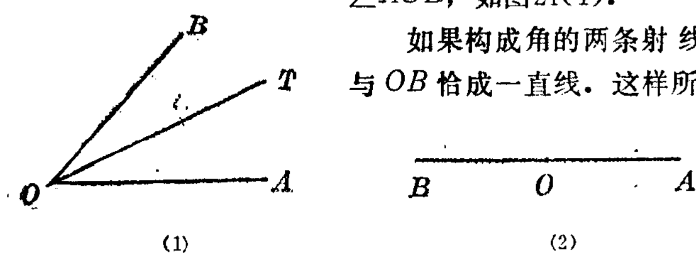


图 21

对于角也可以引进度量，这时，必须选择一个度量单位，

为此我们规定：把平角分成180等份，每一份就是1度的角，将它作为度量角度大小的单位，记作1°．每一度又分成60等份，每一份是1分，记作1′．每一分再分成60等份，每一份是1秒记作1″．它们是60进制：

$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60''$$

$$1' = \frac{1}{60}^\circ \qquad 1'' = \frac{1}{60}'$$

度量角用量角器（也叫半圆仪），如图22．

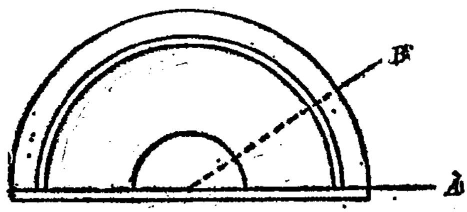


图 22

平角等于180°。

平角的一半称为直角，直角等于90°．

小于直角的角称为锐角，大于直角而小于平角的角称为纯角，如图23．

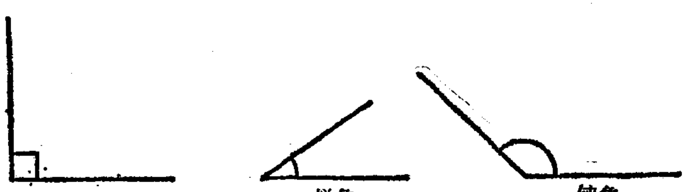


图 23

注意：角的相等、大小关系、和差关系与角的度量数的相等、大小关系、和差关系是一致的．

例1 把$20°30'15''$化为度。

解 先把$15''$化为分：$15''=\left(\frac{15}{60}\right)'=0.25'$

$\therefore\quad 30'15''=30.25'$

再把$30.25'$化为度：$30.25'=\left(\frac{30.25}{60}\right)^\circ\approx 0.504°$

$\therefore 20°30'15''\approx 20.504°$

例2 如图24中，$\angle AOD$是直角，$\angle 1=21°30'$，$\angle 2=50°15'$，问$\angle 3$是多少度？

解 $\because\quad \angle AOB=90°$，$\angle 1=21°30'$，$\angle 2=50°15'$

$\therefore\quad \angle 3=90°-(21°30'+50°15')$

$=90°-71°45'$

$=18°15'$

答：$\angle 3=18°15'$

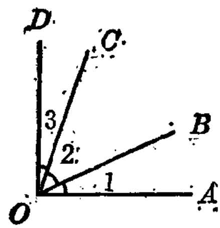


图 24

如果两个角的和等于$90°$，那么这两个角叫做互为余角，其中一个角称为另一角的余角。在图25(1)中，$\angle 1$与$\angle 2$互余，$\angle 1$是$\angle 2$的余角，$\angle 2$也是$\angle 1$的余角。图25(2)中的$\angle AOB$与$\angle BOC$也互余，其中$\angle AOB$是$\angle BOC$的余角。

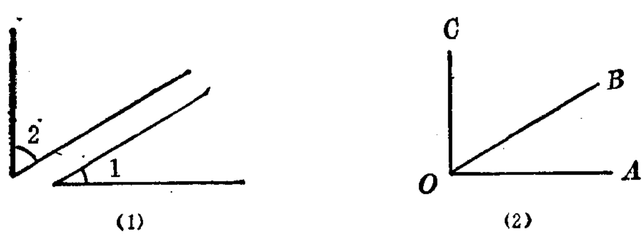
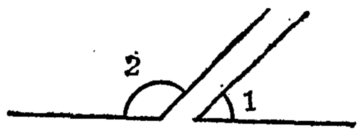
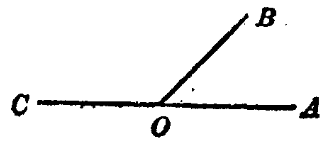


图 25

如果两个角的和等于180°，那么这两个角叫做互为补角，如图26(1)中$\angle 3$与$\angle 4$互补．$\angle 3$称为$\angle 4$的补角．如果两个角又相邻又互补．那么这两个角叫做互为邻补角，其中之一称为另一角的邻补角，如图26(2)中的$\angle AOB$与$\angle BOC$互为邻补角，$\angle AOB$称为$\angle BOC$的邻补角．



(1)



(2)

图 26

显然，如果两个角相等，那么它们的余角或补角也相等．即

同角或等角的余角相等；

同角或等角的补角相等．

如果一个角的两边是另一角的两边的反向延长线，那么这两个角就叫做对顶角．如图27中，$\angle 1$和$\angle 2$就是对顶角．

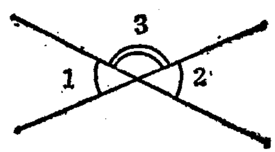


图 27

在图27中我们看到，$\angle 1$是$\angle 3$的邻补角，$\angle 2$也是$\angle 3$的邻补角，根据“同角的补角相等”，可知$\angle 1=\angle 2$，这就是说：

如果两个角是对顶角，那么它们相等，简言之，对顶角相等．

两条直线相交，必构成两对对顶角，如果其中有一个角是直角，那么可以推断，其余三个角也都是直角．（如何推断请读者自己考虑）这时，两直线的位置关系称为互相垂直．

其中一条直线称为另一条直线的垂线，交点称为垂足。

我们用符号“⊥”表示“垂直于”。例如图28中直线AB垂直于CD。记为 $AB \perp CD$ 或 $CD \perp AB$，O点为垂足。

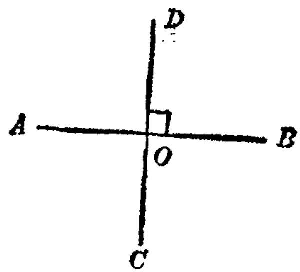


图 28

（三）圆和圆弧

日常见到的车轮、水管的横截口等，它们都给我们提供了圆的直观形象。如果以射线OA绕着它的端点O在平面上旋转一周，这时射线上的一点A也绕着点O旋转一周，它的运动痕迹就是平面上的一条首尾衔接的曲线，我们称之为圆。射线的端点O叫做这圆的圆心。连接圆心与圆周上任意一点的线段叫做半径，常用字母R或r表示，圆用符号“⊙”表示，以O为圆心的圆记作“$\odot O$”；

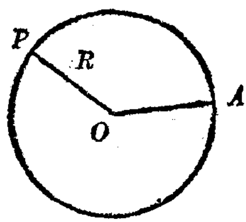


图 29

如果两个圆的半径相等，把它们的圆心迭合在一起后，这两个圆就全部迭合在一起了，可以全部重合在一起的两个圆叫做等圆，因此，半径相等的圆是等圆，并且等圆的半径相等。

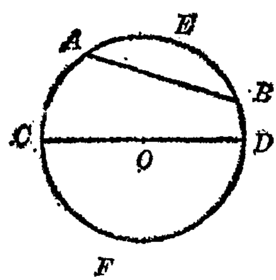


图 30

连接圆上任意两点的线段叫做弦，经过圆心的弦叫做圆的直径，如图 30 中的线段AB是弦，线段CD是直径。