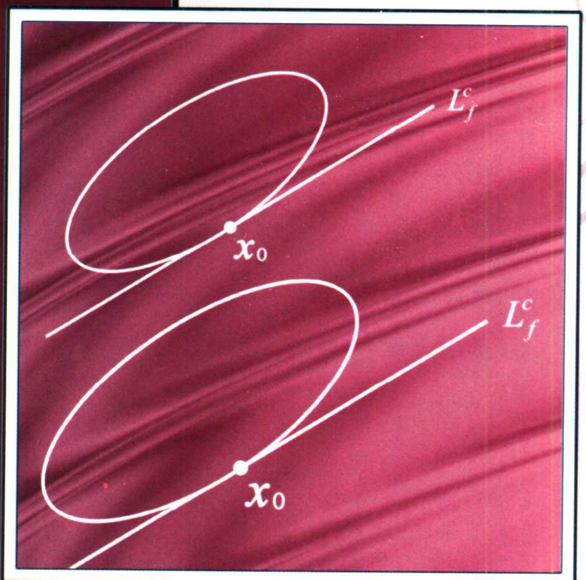
研究生系列教材

应用泛函分析原理



李广民
刘三阳
编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

研究生系列教材

应用泛函分析原理

李广民　刘三阳　编著

西安电子科技大学出版社

2003

内 容 简 介

本书根据作者近10年来为工科研究生讲授"应用泛函分析"课程的教学内容充实修改而成. 其主要内容有：实分析基础、距离空间、线性赋范空间与内积空间、线性泛函与线性算子、不动点定理与最佳逼近、线性算子谱论初步和抽象空间的微积分等. 在讲述上尽量通俗直观、深入浅出，对诸多抽象概念和定理提供了较多的例子. 习题难易适中并附有解答或提示.

本书适合工科研究生和数学专业本科生作为教材或教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析原理/李广民等编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2003.8
(研究生系列教材)
ISBN 7-5606-1265-2
Ⅰ.应… Ⅱ.李… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.O177
中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第048112号

责任编辑 夏大平
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)8242885 8201467 邮　编 710071
http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销 新华书店
印刷单位 西安文化彩印厂
版　　次 2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷
开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张15.125
字　　数 353千字
印　　数 1～4 000册
定　　价 20.00元
ISBN 7-5606-1265-2/O·0064(课)

XDUP 1536001-1

如有印装问题可调换

前　　言

泛函分析是一门较新的数学分支，它综合运用分析、代数和几何的观点与方法，研究“函数的函数”、函数空间和它们之间的变换. 泛函分析不仅在核心数学中占有重要地位，而且其思想和方法在数学和工程科技的众多领域获得广泛而深刻的应用，成为科学研究的重要基础和工具. 著名数学家徐利治教授指出：“泛函分析是一门很优美的数学，它的高度概括性、应用的广泛性以及表述形式的简洁性，常能激发善教者和善学者的赞美和喜悦.”

本书是在作者近10年来为工科研究生讲授“应用泛函分析”课程的讲稿的基础上充实修改而成的. 其主要内容有：实分析基础、距离空间、线性赋范空间与内积空间、线性泛函与线性算子、不动点定理与最佳逼近、线性算子谱论初步、抽象空间的微积分等.

本书取材较广、适用面宽，除一般泛函分析的基本内容外，还补充了实变函数的基础知识和抽象空间的微积分，并对诸多概念和定理提供了较多的例子. 在讲述上力求深入浅出、循序渐进、通俗直观而又不失数学的严密性. 书中习题难易适中，并且基本上提供了解答或提示.

宋国乡教授在百忙之中仔细审阅了书稿；研究生院领导给予了热情支持和鼓励；西安电子科技大学出版社，特别是夏大平编辑，为本书的出版付出了辛勤的劳动；于沛、冯育强、周杰、王新辉、刘振华等同志进行了细心校对，在此一并表示感谢.

由于作者水平有限，尽管作者作了很大的努力，书中可能还存在这样那样的缺点或错误，恳请读者批评指正.

此书的出版得到了西安电子科技大学研究生教材建设基金的资助.

作者

2003 年 4 月

目　　录

第一章　实分析基础

1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

集合是数学研究的基本对象，是现代数学的基础．它已被广泛地应用于数学及其它学科的许多领域．一般认为，伟大数学家康托([德]G. Cantor)是集合论的创立者，按照他的定义是："一个集合是由我们思想中的或者有感知的一些确定的，可以分辨的对象所组成，并且被看成一个整体的任意一个集体"．定义中说到的"对象"称为集合的元素或元．

通常用大写字母表示集合，用小写字母表示集合的元素，如果 A 是一个集合，那么 $x\in A$表示 x 是 A 的一个元素，当 x 不是 A 的元素时，用 $x\notin A$(或 $x\overline{\in} A$)表示．

表示集合的方法通常有两种：

(1) **列举法**．把集合中的元素全部列出来．例如：

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

表示全体自然数组成的集合；

$$A=\{1,3,5\}$$

表示由数 1，3，5 组成的集合．

(2) **特征表方法**．把集合中的元素的特征表示出来．例如

$$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

表示 $\mathbf{R}^2$ 中以原点为中心的单位圆；

$$C=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

表示实直线上的闭区间$[a,b]$．

设 A，B 是两个集合，用 $A\subset B$ 表示 A 的每一元素也是集合 B 的一个元素．如果 $A\subset B$，则称 A 是 B 的一个子集，即 A **包含**在 B 中；如果 $A\subset B$，且 $A\supset B$(把 $A\supset B$ 看作与 $B\subset A$等价)，称 A 等于 B，记为 $A=B$；如果 $A\subset B$，且 $A\neq B$ 时，称 A 为 B 的**真子集**．

集合包含$\supset(\subset)$有两个简单的性质：

(1) $A\subset A$；

(2) 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$．

不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$，例如：

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\ x、y\text{ 为实数}\}\neq\varnothing$$

设 A 是一个给定的集合，考虑 A 的子集

$$\{x \in A \mid x \neq x\}$$

这个集没有元素，是一个空集$\varnothing$，显然$\varnothing \subset A$. 若 $A \neq \varnothing$，则 A 至少有两个子集：A 和$\varnothing$. 如果 A 只有这样两个子集，则 A 只含有一个元素.

1.1.2 集合的运算

1. 集合的并集

设 A，B 是两个确定的集合，则称由 A 的元素与 B 的元素的全体构成的新集合为 A 与 B 的并集，记为 $A \cup B$，即有

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

设$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$为某一族确定的集合($\Lambda$ 为某指标集)，则称由各个 A_λ 的元素的全体构成的新集合为它们的并集，记为$\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即有

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in \text{ 某个 } A_{\lambda_0}, \lambda_0 \in \Lambda\}$$

2. 集合的交集

设 A，B 是两个确定的集合，则称由 A，B 的公共元素组成的新集合为 A 与 B 的交集，记为 $A \cap B$，即有

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

由所有 $A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的公共元素组成之集称为它们的交集，记为$\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid x \in A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

3. 集合并、交集的运算性质

关于集合的并与交，有以下运算性质.

定理 1.1.1(分配律) 设 E 是一个集合，$\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$是一族集合，则有

(1) $E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$ (1.1 - 1)

(2) $E \cup (\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cup A_\lambda)$ (1.1 - 2)

证 仅证(1)，(2)同理可证. $\forall x \in E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$，有 $x \in E$，$x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，即$\exists \lambda_0 \in \Lambda$，使 $x \in A_{\lambda_0}$，从而 $x \in E \cap A_{\lambda_0}$，故 $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$，即

$$E \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$$

反过来，$\forall x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$，则$\exists \lambda_0 \in \Lambda$，使 $x \in E \cap A_{\lambda_0}$，即 $x \in E$ 且 $x \in A_{\lambda_0} \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$，故有 $x \in E \cap (\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)$，即

$$E \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \cap A_\lambda)$$ □

4. 差集与余集

设 A，B 是两个确定的集合，定义 A 与 B 的**差集** $A-B$(也记为 $A \backslash B$)为属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，即

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \overline{\in} B\}$$

特别地，若 $B \subset A$，则称 $A-B$ 为 B 关于 A 的**余集**，记为 B_A^C，即

$$B_A^C = A - B \qquad B \subset A$$

在同一问题中，若考虑的某集合是某一大集合 X 的子集，则称 X 为基本集合，或称为空间. 例如，$\mathbf{R}^1=\{x\mid x$ 为实数$\}$，$\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数$\}$，集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$A=\{1, 3, 5\}$都是 $\mathbf{R}^1$ 的子集，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$是 $\mathbf{R}^2$ 的子集. $\mathbf{R}^1$，$\mathbf{R}^2$ 都是基本集合(或称为空间).

集合 B 关于基本集合 X 的余集，简称为余集，记为 B^C，即

$$B^C = X - B \qquad B\subset X$$

5. 并、交集的余集的运算规则

关于并、交集的余集有以下的结论.

定理 1.1.2(De. Morgan 公式) 设$\{A_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$是一族确定的集合($A_\lambda\subset X$)，则有

(1) $$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C \tag{1.1-3}$$

(2) $$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C \tag{1.1-4}$$

这两个公式称为 De. Morgan 公式.

证 仅证(1)，公式(2)同理可证. $\forall\ x\in(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C$，即 $x\in X$，$x\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，从而$\forall\ \lambda\in\Lambda$，$x\overline{\in}A_\lambda$. 由 $x\in X$ 知，$x\in A_\lambda^C(\forall\ \lambda\in\Lambda)$，所以 $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$.

反过来，设 $x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$，则$\forall\ \lambda\in\Lambda$，有 $x\in A_\lambda^C$. 由 $x\in X$，$x\overline{\in}A_\lambda(\forall\ \lambda\in\Lambda)$，从而 $x\overline{\in}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，所以 $x\in(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C$. 故有

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$$ □

1.1.3 可数集与不可数集

集合按元素的“个数”可分为两类，即有限集与无限集. 若一个集合的元素的个数是有限的，则称为有限集，否则称为无限集. 有限集比较简单，这里主要讨论无限集.

定义 1.1.1(映射) (1) 设 A，B 是两个非空集合，若存在法则 f，对每一 $x\in A$，在 B 有一个确定的元素 y 与之对应，则称 f 是定义在 A 上而在 B 中取值的映射，记为 f：$A\to B$，并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$. 称 A 为 f 的定义域，$f(A)=\{f(x)\in B\mid x\in A\}$为 f 的值域.

(2) 设 f：$A\to B$，满足：

① $B=f(A)$，

② x_1，$x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，

则称 f 是**一一映射**.

设 f 是 A 到 B 的一一映射，则对每个 $y\in B$ 有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$，定义 $g(y)=x$(当 $f(x)=y$ 时)，则 g 是 B 到 A 的一一映射，我们称 g 是 f 的**逆映射**，记为 f^{-1}. 容易得到：g 是 f 的逆映射，则当且仅当 $gf=I_A$，$fg=I_B$.

定义 1.1.2(对等) 设 A，B 是两个确定的集合，若存在 f：$A\to B$ 是一一映射，则称 A 与 B 存在**一一对应**，或称它们相互对等，记为 $A\sim B$.

显见对等关系有以下性质.

(1) **自反性**：$A\sim A$；

(2) **对称性**：若 $A\sim B$，则 $B\sim A$；

(3) **传递性**：若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$.

由对等的意义易知，对有限集而言，"$A\sim B$"与"A，B 所含元素个数相同"是同一概念. 对于无限集，有以下的定义.

定义 1.1.3(可列集) 设 A 是无限集，$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$是自然数集，若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 A 为**可列集**(也称**可数集**)，否则称 A 为**不可列集**.

注 1.1.1 A 是可列集是指 A 的一切元素可以用自然数编号，使 A 写成 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$的形式. 例如：

全体偶数集$\{0, 2, 4, \cdots, 2k, \cdots\}$是可列集；

全体整数集$\{0, -1, 1, -2, 2, \cdots, -n, n, \cdots\}$是可列集.

关于可列集的运算有以下的结论.

定理 1.1.3(可列集的运算性质)

(1) 有限个可列集的并集是可列集；

(2) 可列个可列集的并集是可列集.

证 (1) 设 E_1，E_2，$\cdots$，E_N 是 N 个可列集. 记 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{N}E_i$. 分别把 E_1，E_2，$\cdots$，E_N 的元素列出有

$$
\begin{array}{l}
E_1:\ x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \cdots,\ x_i^{(1)},\ \cdots \\
E_2:\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \cdots,\ x_i^{(2)},\ \cdots \\
\qquad\quad \vdots \\
E_N:\ x_1^{(N)},\ x_2^{(N)},\ x_3^{(N)},\ \cdots,\ x_i^{(N)},\ \cdots
\end{array}
$$

取 E 的元排列为

$$E:\ x_1^{(1)},\ x_1^{(2)},\ \cdots,\ x_1^{(N)},\ x_2^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_2^{(N)},\ \cdots$$

则 E 为可列集.

(2) 设 E_1，E_2，$\cdots$，E_n，$\cdots$是一列可列集，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$.

$$
\begin{array}{l}
E_1:\ x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ \cdots,\ x_i^{(1)},\ \cdots \\
E_2:\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)},\ \cdots,\ x_i^{(2)},\ \cdots \\
E_3:\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)},\ \cdots,\ x_i^{(3)},\ \cdots \\
\qquad\quad \vdots \\
E_n:\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)},\ \cdots,\ x_i^{(n)},\ \cdots \\
\qquad\quad \vdots
\end{array}
$$

E 的元素可排列为(依箭头方向排列)

$$E:\ x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_1^{(2)},\ x_3^{(1)},\ x_2^{(2)},\ x_1^{(3)},\ \cdots$$

则 E 为可列集. □

推论 1.1.1 全体有理数之集 $\mathbf{Q}$ 是可列集.

证 令 $\mathbf{Q}_+=\{x\in\mathbf{Q}\mid x>0\}$，$\mathbf{Q}_-=\{x\in\mathbf{Q}\mid x<0\}$，记 $E_n=\left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, \cdots, \dfrac{i}{n}, \cdots\right\}$，$n=1, 2, 3, \cdots$. 显见 E_n 是可列集，则 $\mathbf{Q}_+=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ 是可列集. 同理可证 $\mathbf{Q}_-$也是可列集. 把 $\mathbf{Q}_+$，$\mathbf{Q}_-$的元素分别排列为

$$\mathbf{Q}_+: x_1, x_2, x_3, \cdots, x_i, \cdots$$

$$\mathbf{Q}_-: y_1, y_2, y_3, \cdots, y_i, \cdots$$

则 **Q** 的元素可排列为

$$\mathbf{Q}: 0, x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots, x_i, y_i, \cdots$$

则 **Q** 是可列集. □

在介绍了实数的完备性理论之后，可以证明：$[0, 1]$中的全体实数构成的集合是不可列集.

1.2 实数的完备性

1.2.1 有理数及其稠密性

所谓有理数，是指形如$\frac{n}{m}$(m 为正整数，n 为整数，并且 m 与 n 互质)的数.

可以证明：每个有理数$\frac{n}{m}$是一个无限循环小数(有限循环小数可以看作以 0 为循环节的无限循环小数). 因此，每一个无限不循环小数必不是有理数，我们称它为无理数. 通常由 **Q** 表示有理数集，即

$$\mathbf{Q} = \{x \mid x \text{ 为有理数}\}$$

有理数集的性质：

(1) 任何有理数可以由整数 1 经过有限次的有理运算(即加、减、乘、除)而得到.

(2) 任何两个有理数经过有理运算后，仍得到有理数，也就是说，有理数集 **Q** 对于四则运算封闭.

(3) 有理数集 **Q** 是可列集，即 **Q** 的元数“个数不多”，是最小的“无限数集”.

除以上性质外，还有所谓的**稠密性**，即：

(4) 任何两个有理数 $q_1 = \frac{n_1}{m_1}$, $q_2 = \frac{n_2}{m_2}$之间，还存在有理数 $q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{m_1} + \frac{n_2}{m_2}\right)$.

由此可得：任何两个有理数之间有无穷多个有理数；任何开区间(a, b)内含有无穷多个有理数. 这就体现了有理数的稠密性.

关于有理数，我们应注意以下两点：

(1) **不是有理数的数大量存在**. 例如：单位正方形对角线的长度 $\sqrt{2}$ 就不是有理数，π、e 也不是有理数；再如数 0.1010010001000010…就不是有理数，我们称它们为无理数. 我们说无理数大量存在，事实上，对实数而言，则有

$$\text{有理数} + \text{无理数} = \text{无理数}$$

便知无理数的“个数”不比有理数少.

(2) **有理数集不具有完备性**. 也就是说，在有理数集合 **Q** 中，极限运算是不通行的. 例如：有理数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbf{Q}$，在实数范围内有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \in \mathbf{R}^1 \qquad \mathbf{R}^1\text{ 表示实数集}$$

但 $\mathrm{e}\overline{\in}\mathbf{Q}$. 即在有理数范围内$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$不存在.

以上两点说明：尽管有理数在实轴上稠密，但它没有填满实轴，还有大量的空隙存在.

1.2.2 实数及其完备性

一切无限小数统称实数，其中，循环小数为有理数，不循环小数为无理数. 常用 $\mathbf{R}^1$ 表示全体实数集合. 我们知道，自然数在数直线上是很稀的. 有理数在数直线上处处稠密，但有空隙存在. 全体实数和数直线上的点一一对应，所以这种空隙不存在了. 实数系的这种“没有空隙”的性质，就是实数的完备性(或连续性). 下面来讨论刻画实数完备性的几个等价命题.

1. 确界的存在性

定义 1.2.1(有界集) 设 $A\subset\mathbf{R}^1$ 是非空数集.

(1) 如果存在 $M\in\mathbf{R}^1$，使$\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant M$，则称 M 为数集 A 的一个上界；

(2) 如果存在 $m\in\mathbf{R}^1$，使$\forall\ x\in A$，有 $x\geqslant m$，则称 m 为数集 A 的一个下界；

(3) 如果数集 A 既有上界又有下界，则称 A 为有界数集.

注 1.2.1 数集有界的等价定义：如果存在 $M>0$，使$\forall\ x\in A$，有$|x|\leqslant M$，则称 A 为有界数集.

定义 1.2.2(确界) 设 $A\subset\mathbf{R}^1$ 是非空数集，若存在这样一个实数 β，满足：

(1) $\forall\ x\in A$，有 $x\leqslant\beta$，

(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in A$，使 $x_0>\beta-\varepsilon$，

则 β 叫 A 的**上确界(或最小上界)**，记为

$$\beta=\sup A \quad \text{或} \quad \beta=\sup_{x\in A}\ \{x\}$$

上面第一条件意味着 β 是数集 A 的一个上界，而第二条件显示出凡小于 β 的任何实数都不是 A 的上界. 因此，β 也叫做数集 E 的最小上界.

不难证明：若 β 是 A 的上确界，则存在 $x_n\in A$，使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\beta$.

同样，给定数集 $A\subset\mathbf{R}^1$，若存在 $\alpha\in\mathbf{R}^1$，满足：

(1) $\forall\ x\in A$，有 $x\geqslant\alpha$，

(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in A$，使 $x_0<\alpha+\varepsilon$，

则称 α 为数集 A 的**下确界(或最大下界)**，记为

$$\alpha=\inf A \quad \text{或} \quad \alpha=\inf_{x\in A} f\{x\}$$

实数的完备性质(即没有空隙)，在理论上十分重要. 为了在应用这些性质时更加确切，可以把它表述成以下的公理.

定理 1.2.1(确界存在公理) 任何有上(下)界的数集必存在上(下)确界.

注 1.2.2 并不是任何数集都有上、下确界. 对于有限数集而言，上、下确界必存在，分别是该数集的最大、最小数. 对于无限数集来讲，上、下确界未必存在，例如，自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$有下确界 0，而无上确界.

注 1.2.3 无限数集 A 即使它有上确界 β(或下确界 α)，然而 β(或 α)可以属于 A，也

可以不属于 A. 例如：$A=(0, 1]$，

$$\alpha = \inf A = 0 \overline{\in} A, \quad \beta = \sup A = 1 \in A$$

有了确界存在公理，则可以证明数列极限存在性定理之一：单调有界准则.

定理 1.2.2(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.

证 仅对单调增加的有上界数列予以证明. 设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$$

且$\exists\ M \in \mathbf{R}^1$，$\forall\ n \in \mathbf{N}$，有 $x_n \leqslant M$.

考虑数集 $A=\{x_n | n \in \mathbf{N}\}$，$A$ 是非空的有上界的数集，由定理 1.2.1 知 A 存在上确界 $\beta=\sup A$.

$\forall\ \varepsilon>0$，由上确界的定义知 $\exists\ x_N$，使得

$$\beta - \varepsilon < x_N$$

当 $n>N$ 时，由$\{x_n\}$单调增加得

$$\beta - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$$

即

$$|x_n - \beta| < \varepsilon \qquad n > N$$

这就是

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \beta$$ □

2. 区间套定理

定理 1.2.3(区间套定理) 设闭区间列$\{[a_n, b_n]\}$满足：

(1) $\forall\ n$，$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$

则有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$，且 c 是所有区间的唯一公共点，即

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

证 由定理条件(1)知$\{a_n\}$是单调增加且有上界 b_1 的数列，$\{b_n\}$是单调减少且有下界 a_1 的数列. 根据定理 1.2.2 知

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a = \sup\{a_n\}$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = b = \inf\{b_n\}$$

且

$$a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$$

再由定理条件(2)知

$$0 \leqslant b - a \leqslant \lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0$$

记 $c=a=b$，则有

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c = \lim_{n \to \infty} b_n$$

如果存在 c_1 满足

$$a_n \leqslant c_1 \leqslant b_n$$

则

$$0 \leqslant |c_1 - c| \leqslant b_n - a_n \to 0 \qquad n \to \infty$$

即 $c_1 = c$. □

注 1.2.4 在区间套定理中，如果将闭区间改为开区间，或将条件(1)、(2)中任一条去掉，结论将不再成立.

例 1.2.1 证明[0, 1]中的全体实数构成的集合是不可数集.

证 用反证法. 如果[0, 1]中的全体实数构成之集是可列的，则它们可以排列为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \tag{1.2-1}$$

使[0, 1]中的数都在数列(1.2-1)式中出现. 将[0, 1]分成三等分：$\left[0, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$，则这三个小区间中至少有一个不含 x_1，记此小区间为$[a_1, b_1]$. 再把$[a_1, b_1]$三等分：$[a_1, c_1]$，$[c_1, d_1]$，$[d_1, b_1]$，它们中至少有一个小区间不含 x_2，记为$[a_2, b_2]$，依次可得闭区间列$[a_n, b_n]$，其中不含 x_n，满足：

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{3^n} \to 0 \qquad n \to \infty$$

根据区间套定理知，存在唯一 $c \in [0, 1]$，满足 $c \in [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, 3, \cdots$. 按照$[a_n, b_n]$的取法，$x_n \overline{\in} [a_n, b_n]$，故 $c \neq x_n$，从而 c 在数列(1.2-1)式中不出现，从而矛盾. □

3. 致密性定理

定理 1.2.2 说明：单调有界数列必收敛，这是一个非常重要的极限存在准则. 如果数列有界而不单调，则数列的敛散性不能用定理 1.2.2 来判别，此时数列可能收敛也可能发散. 但有界数列无论收敛与否，它都有一个非常重要的性质，我们称之为“致密性定理”，它是由德国数学家魏尔斯特拉斯(Weierstrass)首先发现的，也称为 Weierstrass 定理. 为了介绍这一定理，先给出子列的概念.

在数列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

中，保持原来顺序自左向右自由选取无穷多项，如

$$x_2, x_5, \cdots, x_{50}, \cdots$$

这种数列称为$\{x_n\}$的**子列**. 为方便，用另一种下标来表示它. 在选出的子列中，记第一项为 x_{n_1}，第二项为 x_{n_2}，…，第 k 项为 x_{n_k}，于是$\{x_n\}$的子列就表示成

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$$

或$\{x_{n_k}\}$，k 表示 x_{n_k}是子列$\{x_{n_k}\}$中的第 k 项，n_k 表示 x_{n_k}在原数列$\{x_n\}$中是第 n_k 项. 对每一个 k，$n_k \geqslant k$，且 $n_{k+1} > n_k$. 子列$\{x_{n_k}\}$中的下标是 k 而不是 n_k. $\{x_{n_k}\}$收敛于 a 是指：$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, K > 0$，当 $k > K$ 时，有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

记为

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$$

定理 1.2.4(致密性定理) 任一有界数列必有收敛子列.

证 设$\{x_n\}$是一有界数列，即存在 $a, b \in \mathbf{R}^1$，使 $a \leqslant x_n \leqslant b$，把闭区间$[a, b]$二等分，至

少有一个小区间含有$\{x_n\}$中的无穷多个数，把这个小区间记为$[a_1, b_1]$. 如果这两个小区间都含有$\{x_n\}$的无限多个数，则任取其一作为$[a_1, b_1]$. 再将$[a_1, b_1]$二等分，记含$\{x_n\}$中无穷多个数的小区间为$[a_2, b_2]$. 把这种分割无限地进行下去，便得到一列闭区间$[a_n, b_n]$，$n=1, 2, \cdots$，满足：

(1) $[a_n, b_n]$中含有$\{x_n\}$中的无穷多个数；

(2) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]$；

(3) $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to 0 \quad (n\to\infty)$.

由区间套定理，必有唯一点$c\in[a, b]$，使

$$\lim_{n\to\infty}a_n = c = \lim_{n\to\infty}b_n \quad 且 \quad \{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

由于$[a_1, b_1]$中含有$\{x_n\}$中的无限多个数，故可在$[a_1, b_1]$中任取$\{x_n\}$的一项，记为x_{n_1}，它是$\{x_n\}$的第n_1项. $[a_2, b_2]$中含有$\{x_n\}$的无限多项，则$[a_2, b_2]$必含有$\{x_n\}$第n_1项以后的无限多项，任意取一项，记为$x_{n_2}(n_1<n_2)$，继续在$[a_k, b_k]$中取$x_{n_k}(n_1<n_2<\cdots<n_k)$. $\{x_{n_k}\}$就是$\{x_n\}$的一个子列，且$a_k\leqslant x_{n_k}\leqslant b_k$. 令$k\to\infty$，可得$x_{n_k}\to c$. □

4. 柯西收敛原理

单调有界准则给出了数列极限存在的一个非常重要的判别法，单调有界只是数列极限存在的充分条件而不是必要条件. 关于数列极限存在的充分必要条件的寻求，必须从数列自身的性质出发. 经过许多人的不断努力，终由数学家柯西([法]Cauchy)给出了非常漂亮的结果，称之为柯西收敛原理. 下面先给出“基本列”的概念.

定义 1.2.3(基本列) 设$\{x_n\}$为一数列，如果$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当$n, m>N$时，有$|x_n-x_m|<\varepsilon$成立，则称$\{x_n\}$为一基本列，或柯西列.

定理 1.2.5(柯西收敛原理) $\{x_n\}$是收敛数列$\Longleftrightarrow\{x_n\}$是基本列.

证 $\Rightarrow$ 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，当$n, m>N$时，有

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |x_m - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

故有

$$|x_n - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

这表明$\{x_n\}$是基本数列.

$\Leftarrow$ 首先证明$\{x_n\}$是有界数列. 取定$\varepsilon=1$，则存在N，当$m=N$，$n>N$时，有

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_N| < 1$$

即当$n>N$时，有

$$|x_n| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| < |x_N| + 1$$

记

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

则有$|x_n|<M$，即$\{x_n\}$有界.

其次证$\{x_n\}$收敛. 由致密性定理知数列$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$. 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ K>0$，当$k>K$时，有$|x_{n_k}-a|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 由$\{x_n\}$是基本列知存在$N$，当$k\geqslant N$(此时$n_k\geqslant k$)

时，有

$$|x_{n_k} - x_k| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

取 $N^* = \max(N, K)$，则当 $k \geqslant N^*$ 时，有

$$|x_k - a| \leqslant |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. □

5. 有限覆盖定理

设一区间集 E(即 E 的元素为区间)及某一区间 I，若 $\forall\ x \in I$，则 $\exists$ 区间 $\Delta \in E$，使 $x \in \Delta$，则称 E **覆盖** I. 例如：

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots \text{及}[1, 2]$$

覆盖了区间 $[0, 2]$；区间集

$$E = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in [0, 1], \varepsilon > 0\}$$

覆盖了区间 $[0, 1]$.

定理 1.2.6(有限覆盖定理) 若由开区间所组成的区间集 E 覆盖一个闭区间 $[a, b]$，则总可以从 E 选出有限个开区间，使这些开区间也覆盖 $[a, b]$.

证 用反证法. 设 $[a, b]$ 不能被 E 中有限个开区间所覆盖，将 $[a, b]$ 等分成两个子区间，则至少有一个子区间不能被 E 中有限个开区间所覆盖，记这个子区间为 $[a_1, b_1]$. 再等分 $[a_1, b_1]$，记不能被 E 中有限个开区间所覆盖的子区间为 $[a_2, b_2]$. 如此继续分割下去，便可以得到一列闭区间 $[a_n, b_n]$. 它们满足：

(1) 每一个 $[a_n, b_n]$ 不能被 E 中的有限个开区间所覆盖；

(2) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$，$n = 1, 2, \cdots$；

(3) $b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b - a) \to 0$，$n \to \infty$.

由条件(2)、(3)，根据区间套定理，则存在惟一的 $c \in [a, b]$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 再由覆盖的定义知，在 E 中存在一个开区间 $(\alpha, \beta) \in E$，使

$$c \in (\alpha, \beta) \quad \text{或} \quad \alpha < c < \beta$$

由数列极限的性质知，$\exists\ N$，当 $n > N$ 时，有

$$\alpha < a_n < b_n < \beta$$

即当 $n > N$ 时，$[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$，这就是说，可以用 E 中的一个开区间覆盖 $[a_n, b_n]$，这与条件(1)相矛盾. □

注 1.2.5 在定理 1.2.6 的条件中，若 E 中的区间不是开区间或 $[a, b]$ 不是闭区间，则定理的结论不一定成立. 例如，就不能从区间集

$$\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots \text{及}[1, 2]$$

中选出有限个区间来覆盖闭区间 $[0, 2]$.

注 1.2.6 上面我们介绍了刻画实数完备性的六个定理. 证明过程是由定理 1.2.1 推出定理 1.2.2，依此类推，推得定理 1.2.6，还可以从定理 1.2.6 出发而推出定理 1.2.2(即