普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学系列教材

大学数学

2

Mathematics

湖南大学数学与计量经济学院组编

主编　曾金平　李晓沛

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学系列教材

大学数学

（二）

湖南大学数学与计量经济学院组编

主编　曾金平　李晓沛

高等教育出版社

内容简介

本书是《大学数学》系列教材之一，内容包括解析几何与线性代数的理论与应用等。各节后配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书结构严谨、内容丰富、条理清楚、重点突出、难点分散、例题较多，且在内容取舍上既充分注重了传统的知识内容，又加强了现代数学内容介绍，并较好地处理了有关的知识块之间的关系，避免了不必要的重复，使之有机地融合在一起。

本书可作为大学非数学类理工科本科生数学教材，也适合各类需要提高数学素质和能力的人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

大学数学. 2/曾金平，李晓沛主编. —北京：高等教育出版社，2003
ISBN 7-04-011421-6

Ⅰ. 大... Ⅱ. ①曾...②李... Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 076553 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版　高等教育出版社照排中心
印　　刷　北京民族印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 1 月第 1 版
印　　张	13	印　　次	2003 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	210 000	定　　价	14.10 元

大学数学系列教材

湖南大学数学与计量经济学院组编

总主编 刘楚中 **副总主编** 黄立宏

《大学数学》(一) 主编 黄立宏 戴斌祥

《大学数学》(二) 主编 曾金平 李晓沛

《大学数学》(三) 主编 刘楚中 曹定华

《大学数学》(四) 主编 杨湘豫 邓爱珍

《大学数学》(五) 主编 李董辉 曾金平

《大学数学习题集》(附习题解答)

主编 刘陶文 彭亚新

前　　言

本系列教材是国家教育部“新世纪高等教育教学改革工程”本科教育教学改革项目的研究成果之一，是湖南大学自1989年以来非数学类理工科各专业数学课程教学与教材改革有关成果的延续。

本系列教材对非数学类理工科数学课程所授知识进行了重新分块，进一步理顺了非数学类理工科数学各门课程之间的关系和内涵。在内容叙述与介绍中以物理、力学和工程中的数学模型为背景，辅以代数结构，注意内容间的有机结合，避免不必要的重复；注意连续和离散的关系，加强函数的离散化处理；内容展开注重由浅入深、由特殊到一般，给学生一个完整的知识体系，并注重培养学生研究问题和解决实际问题的能力；采用近代数学观点和数学思想方法，以集合、向量及映射贯穿全书，加强了近代数学思想方法和数学实践的内容，为学生今后学习近代数学知识奠定了良好的基础，使之更符合新世纪培养高素质人才的要求。在教材编写中特别注重教育观念、教学内容和教学模式的更新，注重对学生数学素质、计算及应用能力、创新意识和工程意识的培养。教材编写以培养学生的良好数学素质为主要目标，同时为适应近年来随经济发展出现的专业调整和专业知识更新，为在教育教学改革中已调整、拓宽的各专业服务，本系列教材还适当地开设了一些有关的现代数学的知识窗口，以拓宽学生知识面，使教材具有较宽的口径和较大的适应性。本系列教材中，概念、定理及理论叙述准确、精炼，符号使用标准、规范，知识点突出，难点分散，证明和计算过程均着重体现近代数学思想方法，例题、习题等均经过精选，具有代表性和启发性。本系列教材适合大学非数学类理工科本科生，以及各类需要提高数学素质和能力的人员使用。本系列教材中难免会有不妥之处，希望使用本教材的教师和学生提出宝贵意见。

本系列教材包括《大学数学(一)》(含一元微积分、常微分方程、级数、差分方程等)、《大学数学(二)》(含代数与几何等)、《大学数学(三)》(含多元微积分、向量分析、场论、积分变换、偏微分方程等)、《大学数学(四)》(含概率论、数理统计等)、《大学数学(五)》(含数值计算、数学建模、计算机与数学等)、《大学数学习题集》(附习题解答)。整套教材由刘楚中任总主编，黄立宏任副总主编。本册《大学数学(二)》由曾金平、李晓沛主编，参加编写的人员有：彭亚新、

邓爱珍、蒋月评。

本系列教材编写得到湖南大学教务处的大力支持，在此表示衷心感谢。

湖南大学《大学数学》教材编写组

2002 年 2 月

目　录

第一章　向量代数与空间解析几何

向量是由力学、物理学发展需要而引入的数学概念，随着向量理论的深入研究，它已成为研究数学本身的许多问题的基础之一.

与平面解析几何类似，引进空间直角坐标系可把空间中的点与有序实数组及向量联系起来，运用数的代数运算来表示相应的向量运算. 还可运用向量运算解决空间中的几何问题.

第一节　向量的概念及向量的表示

一、向量的基本概念

1. 向量的概念

在日常生活中，我们常遇到两种量. 一种是只需用大小就能表示的量，如温度、质量、面积、功等等，这种量称之为数量；另一种是既需要用大小表示，同时还要指明方向的量，如力、位移、速度等等，这种量称之为向量.

在几何上，用有向线段表示向量(见图 1－1). 线段的长度等于向量的大小，箭头所指的方向为向量的方向，称点 A 为向量的起点，点 B 为向量的终点. 记为$\overrightarrow{AB}$. 向量也可用一个英文字母表示，如向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{F}$ 等等.

向量的大小(或长度)称为向量的模. 记为 $\|\boldsymbol{a}\|$，$\|\overrightarrow{AB}\|$. 模等于 1 的向量叫做单位向量. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 模等于零的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$. 零向量的方向可看成是任意的.

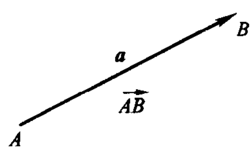

图 1－1

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同(即在同一直线上或在两平行直线上，且指向相同)，且模相等，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 于是，一个向量与它经过平移以后所得的向量是相等的. 具有这种可在空间中任意平移性质的向量叫做自由向量. 因此，我们在讨论向量时只需考虑它的大小和方向，其起点位置可以任意选取.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的加法与减法

由物理学的知识人们知道，可以用平行四边形法则或三角形法则求两个

力的合力. 对速度、位移等的合成均可按这两种方法进行. 因此，我们规定：设有两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，并由此作平行四边形 $ABCD$（图 1－2），则其对角线向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求和方法称为平行四边形法则.

求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可用下述的三角形法则：平移向量 $\boldsymbol{b}$ 使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（图 1－3）.

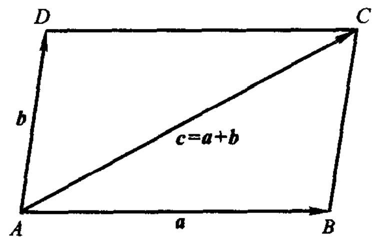

图 1－2

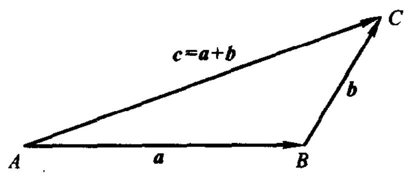

图 1－3

由图 1－4 和图 1－5 可以看出，向量的加法服从交换律和结合律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

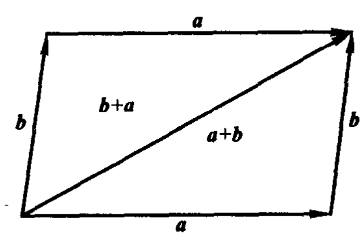

图 1－4

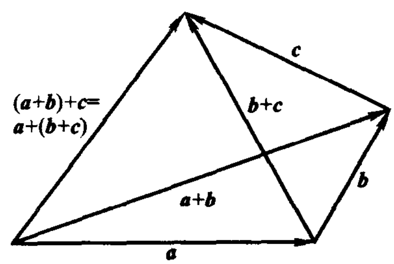

图 1－5

对任意的向量 $\boldsymbol{a}$，下面的关系式成立：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量的减法是向量加法的逆运算. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 之差，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，并有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

向量的减法同样有平行四边形法则和三角形法则，读者不难根据图 1－6 自行完成这两个法则的文字叙述.

3. 向量与数的乘法

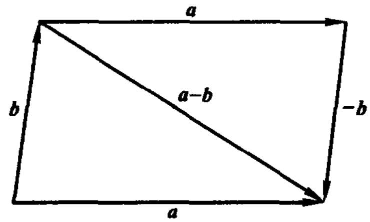

图 1-6

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是按下面规定所确定的一个向量：

(1) $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}\|$，即向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，即 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量与数的乘法满足下面的运算规律：设 λ,μ 为实数，对向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 有

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 位于同一直线上或分别位于两条平行的直线上，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向是任意的，故规定零向量平行于任何一个向量.

由向量与数的乘积的定义可知下面定理成立.

定理 1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

例 1 设 $\boldsymbol{a}^\circ$ 是与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，试用 $\boldsymbol{a}^\circ$ 表示 $\boldsymbol{a}$.

解 因为 $\boldsymbol{a}^\circ/\!/\boldsymbol{a}$，且 $\boldsymbol{a}^\circ$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，所以存在实数 $\lambda>0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^\circ$. 因此，$\|\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{a}^\circ\|=|\lambda|=\lambda$，即 $\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^\circ$.

例 2 证明平行四边形的对角线互相平分.

证 如图 1-7 所示，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 设 E 为对角线 AC 与 BD 的交点. 则存在实数 λ,μ，使得：

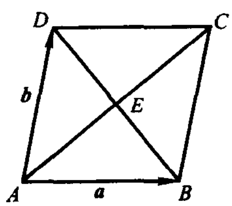

图 1-7

$$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$
$$\overrightarrow{ED}=\mu\overrightarrow{BD}=\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

又因为
$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED},$$
故
$$\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$
即
$$(1-\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}.$$

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 不平行，从而使上式成立的 λ 和 μ 要满足方程组

$$\begin{cases}1-\lambda-\mu=0,\\ \lambda-\mu=0.\end{cases}$$

因此，$\mu=\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$，即 E 是对角线 AC 与 BD 的中点.

4. 向量在轴上的投影

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点，规定它们正向之间位于 0 到 π 范围内的那个夹角为这两个向量的夹角，记为 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 或记为 θ，α，φ 等. 类似地，可以把两根轴之间的夹角及向量与轴之间的夹角定义为它们正向之间的夹角，其取值范围为 0 到 π 之间.

已知空间中一点 A 及一根轴 $\boldsymbol{u}$，过点 A 作垂直于轴 $\boldsymbol{u}$ 的平面 π，则平面 π 与轴 $\boldsymbol{u}$ 的交点 A' 称为点 A 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影.

设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影分别为 A' 和 B'，则当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 同向时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影定义为 $\|\overrightarrow{A'B'}\|$；当 $\overrightarrow{A'B'}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 反向时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影定义为 $-\|\overrightarrow{A'B'}\|$，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{AB}$（图 1-8），即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \text{当 } A'B' \text{ 与轴 } \boldsymbol{u} \text{ 同向时；}\\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \text{当 } A'B' \text{ 与轴 } \boldsymbol{u} \text{ 反向时.}\end{cases}$$

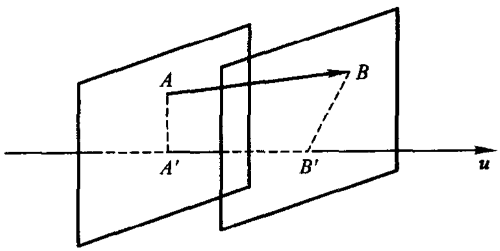

图 1-8

向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 $\boldsymbol{u}$ 上的投影可以通过 $\overrightarrow{AB}$ 的模及 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 夹角的余弦值表示：

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|\cos\varphi, \tag{1}$$

其中 $\varphi=\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{u}\rangle$. 一般地有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle.$$

由此容易看出，向量在轴上的投影是可正、可负的数量，且相等的向量在同一轴上的投影相等.

如果向量 $\boldsymbol{b}$ 与轴 $\boldsymbol{u}$ 同向，则规定 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}$. 于是，由公式(1)有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

由向量在轴上投影的定义，便能看出下面关于向量在轴上的投影定理成立.

定理 2　已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 及轴 $\boldsymbol{u}$，则有

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

我们把定理的证明留给读者. 定理可以推广到有限个向量的和的情况，即

推论 1　$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n$.

二、空间直角坐标系及向量的坐标表示式

有许多关于向量的问题仅靠几何方法是很难解决的，只有将向量与数量建立起联系，把向量的运算归结为相应的数的代数运算，向量理论才能得到广泛的应用. 为此，我们在 $\mathbf{R}^3$ 空间中引进空间直角坐标系，建立空间中点与实数的关系，并由此建立向量与有序实数组的关系.

1. 空间直角坐标系

过空间 $\mathbf{R}^3$ 中某一点 O 作三条两两相互垂直的数轴 Ox,Oy,Oz，它们均以点 O 为原点，且有相同的单位长度，这样就建立了一个空间直角坐标系. Ox,Oy,Oz 称为坐标轴，简称为 x 轴，y 轴，z 轴，点 O 称为坐标原点. 习惯上，我们将坐标轴 x 轴，y 轴，z 轴的正方向按右手规则排列：即以右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴正方向转动 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴的正方向时，拇指所指的方向是 z 轴的正方向（图 1－9）. 以后我们所说的空间直角坐标系就是这种右手直角坐标系，通常记为坐标系 $Oxyz$.

三条坐标轴中任意两条所确定的平面称为坐标面. 由 x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫 xy 坐标面，类似还有 xz 坐标面，和 yz 坐标面.

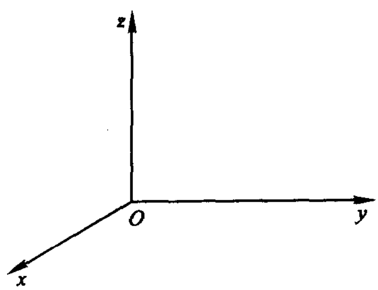

图 1－9

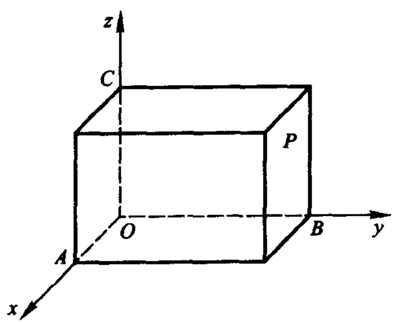

图 1－10

设 P 为空间中任意一点，过点 P 作三个平面分别与三个坐标轴垂直，它们与三个坐标轴的交点依次为 A,B,C（图 1－10）. 点 A,B,C 在三个坐标轴上

的坐标分别记为 x,y,z. 于是空间中的点 P 与三个有序实数 (x,y,z) 建立了一一对应关系，记为 $P(x,y,z)$. 通常称 x 为 P 的横坐标，y 为 P 的纵坐标，z 为 P 的竖坐标.

三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 这八个卦限的次序规定如下(图 1－11)：

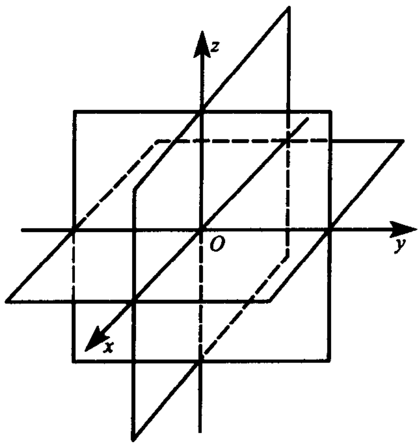

图 1－11

第Ⅰ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$；
第Ⅱ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\}$；
第Ⅲ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\}$；
第Ⅳ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z>0\}$；
第Ⅴ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z<0\}$；
第Ⅵ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\}$；
第Ⅶ卦限：$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\}$；
第Ⅷ卦限：$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}$.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中的任意两点，由图 1－12 可知

$$\begin{aligned}|P_1P_2|^2&=|P_1R|^2+|P_2R|^2\\&=|P_1Q|^2+|QR|^2+|P_2R|^2\\&=|A_1A_2|^2+|B_1B_2|^2+|C_1C_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.\end{aligned}$$

于是得到空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式

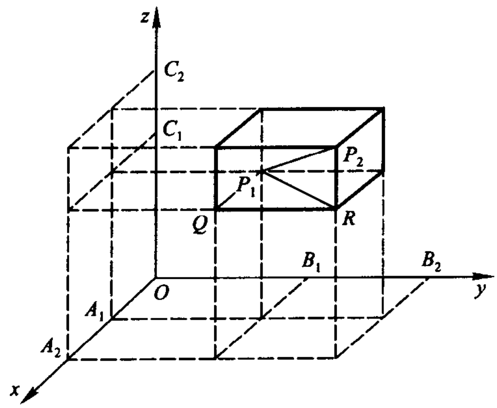

图 1 - 12

$$d(P_1,P_2)=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (3)$$

例 3　证明以点 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证　$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$;

$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$;

$\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{(2-10)^2+(4-(-1))^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}$.

由 $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AC}\|$ 及 $\|\overrightarrow{BC}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{AC}\|^2$ 可知,$\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形.

2. 向量的坐标表示式

在空间 $\mathbf{R}^3$ 中,利用向量在坐标轴上的投影可建立向量与有序实数组之间的对应关系,有序实数称为向量相应的坐标.

$\forall P(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$,称以坐标原点 O 为起点,点 P 为终点的向量$\overrightarrow{OP}$为点 P 的向径,记为 $\boldsymbol{r}$. 向径 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{r}=x;\quad \mathrm{Prj}_y\boldsymbol{r}=y;\quad \mathrm{Prj}_z\boldsymbol{r}=z,$$

称之为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标(图 1 - 13),$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$称为向径 $\boldsymbol{r}$ 的坐标表示式,其中 x,y 和 z 依次称为向径 $\boldsymbol{r}$ 的横坐标,纵坐标和竖坐标.

依次取与 x 轴,y 轴,z 轴同方向的单位向量

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),$$

$$\boldsymbol{j}=(0,1,0),$$

$$\boldsymbol{k}=(0,0,1),$$