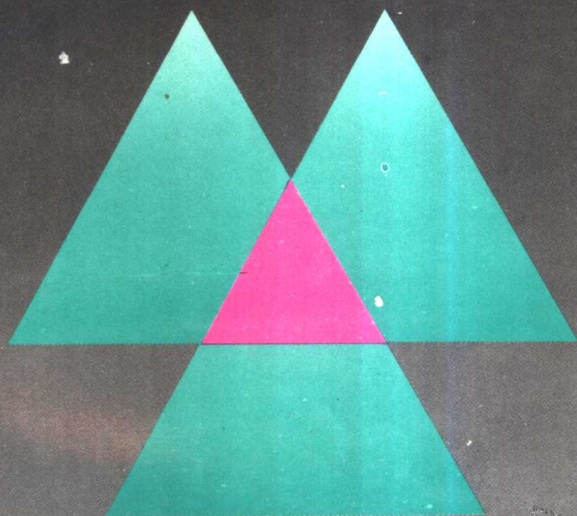


数 学 真 理 论



马·克莱因 著

郭思乐 译

广东教育出版社

数学真理论

马·克莱因 著

郭思乐 译

广东教育出版社

粤新登字03号

数学真理论

马·克莱因 著

郭思乐 译

*

广东教育出版社出版发行

广东省新华书店经销

广州红旗印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 9.75印张 200,000字

1993年2月第1版 1993年7月第2次印刷

印数 1— 册

ISBN 7-5406-1927-9/G·1907

定价：3.45元

译者的话

本书是据前苏联世界出版社出版的马·克莱因的著作译出的。如果说他的《古今数学思想》是从数学自身的发展来论述数学思想的发展的话，那么，置于我们面前的他的另一力作《数学真理论》，则把数学思想的发展放在整个科学发展的框架上，从自然科学的发展同相应的数学的相互关系上去揭示数学的功能和价值。正如作者在书中赞美的，天文学、力学、电磁学和光学、量子力学、相对论等等，都有着一个由一般的观察、实验到逐步成熟的过程，而数学正像一个点石成金的手指头，使这些学科摆脱了观察和实验的局限性而成熟起来，数学对于自然的描述具有不可思议的作用。而且，数学真理一经发现，就可用它的内在的逻辑，去刻划世界，甚至预言未来，而当数学的伟大的预见被后来的事实所验证时，当然就引起了人们惊叹，甚至怀疑数学是否上帝所造的宇宙秩序。于是从中世纪直到近代，数学的发展又伴随着神学和外部世界的存在性的哲学之争。这样的例子在书中比比皆是。就以近代而言，如同作者在书中指出的，当人们在刻划电子在空间中的分布时，波尔恩看到了作为粒子的电子所在的位置是带有概率性的。于是，由赌博而产生的概率理论和方法在描述最幽深的粒子现象中找到了用场。作者指出：

使用概率似乎是挽救危机的一种悲观尝试，但是统计力学确实证实了概率方法的价值。任何一种气体都是许许

多多混乱运动分子的总和。但用有效概率方法能计算出气体压力及其性质，而且这些参数具有物理意义。

但是作者也记录了爱因斯坦、普朗克和薛定谔反对量子力学的概率解释的论述。爱因斯坦说：

“我否认现代统计量子论的主要思想……。我不相信这个基本概念能成为整个物理学的相宜基础……”，“上帝不会投骰子”。

结果，作者认为：

“对于我们最最重要的是要明白：我们的原子结构模型不是物理的。它们自始至终是数学模型。数学在充满混乱的地方展示和建立了秩序。狄喇克和海森堡说，用非矛盾的数学方法描述大自然——这是通向物理真理之路。直观想象或物理解释的必然性——这不过是经典物理学的残余。”

从这些叙述里，我们看到了马·克莱因这本书的基本思想和叙述风格。首先，作者在本书的逐章逐节中，都反映了他的目标：揭示数学作为科学认识的历史发展方法是怎样现实地起作用的，以及确定数学在人类文化的共同体系中的地位。数学对他来说，不仅是简单的、被人类创造出来的强大工具，而且是允许我们实现与外部客观现实进行可靠联系的一种手段，它在很大程度上扩展了直接与我们的感观相联系的信息渠道。其次，在达成他的目标时，马·克莱因表现了坦率的论辩和尖锐地提出问题的风格。这种风格往往不易为人们所理解，但作者给自己提出的任务也就在此：唤起读者的独立思考，而不是用所论的问题的现成答案强加给他们。美国著名社会学家 O. Toffler 提出的评价书的标准是，一本书的优点的最主要的表现

是使读者产生了一些新的问题，也就是刺激了读者的主动性和创造性，鼓励读者就这样那样的问题的实质进行建设性的对话。我们也可以以此来评价马·克莱因的书。此外，像在《古今数学思想》中一样，作者的文学与教育学的天才，他的博识，书中所论及的数学哲学问题的隽永和重要，也将给读者留下深刻的印象。

联系到在本书中还未反映到的现代生物学和社会科学在数学介入以后的长足发展，我们会感到作者努力论证的数学真理的不可思议的效应，实在是一个无可置疑的真理。然而，如数学家莱布尼茨所说的，数学思想史的“作用不仅在于承认前人的功绩，使别的人盼望日后得到同样的赞赏，它的作用更在于促进发现的艺术，并且通过这些光辉的例子，使大家了解获致新发现的方法。”今天，我们来回顾人类历史长河中数学的生长、发育和起作用的过程，也完全是为了指导数学的发现和数学的学习，为此，数学思想史成为数学教育的重要内容。

数学教育学发展到今天，由原来的教材教法发展为众多的基础学科，如数学思维学、数学哲学、数学史等等。其核心问题，始终在于发展人的数学思维。数学在其发展中，为自己立下了一个最高的心智标准，这就是逻辑论证。逻辑论证保证了数学理论的正确无误，同时，促使数学思考以一种严格的思维方式——逻辑思维为主导。尽管逻辑思维遍布在一切科学的发展进程中，然而在数学中表现得最淋漓尽致、最集中和最完善。围绕着逻辑思维，展开了数学的一系列发现活动，当然，这些活动有着大量的似真的、非严格逻辑的猜想的成分，然后由粗到精，由表及里，这才发展成理论的数学。这同数学真理的成长和发育过程，有着有趣的一致性。由此是否可以说，

数学的学习同样地要经历人类的数学发现的某些基本过程。作为数学教师或一般的数学工作者，在探讨数学思维规律的时候了解和懂得数学思想的发展史，其必要性就非常显然了。而马·克莱因的这本书，恰好给我们提供了很好的材料。马·克莱因以其渊博的知识和卓异的见解，给了我们数学和自然科学相伴发展的历史长卷，可以引起我们的深深思考。举一个例。目前我们正在精简课程。其中几何课程的精简的幅度是最大的，也是最令人依依不舍的：那些美妙的、涉及到多个圆的题目，它曾经使多少青年学子废寝忘食！然而只要去看看本书的前面几章，就知道古希腊人发现涉及多圆的题目的直接的来由，乃是当时用于描述地心说的需要，而地心说发展为一个直接的因素，竟是因为地心说所用的曾多至77个圆的体系过分复杂以至于不能自“圆”其说。如果我们不去讨论细节的话，似乎不妨把今天我们几何课程的精简，看成是古希腊人所作过的精简的一种映照。温故知新，将使我们的数学教育工作做得更加自觉。自然，作者在书中也反映了一些偏颇之见，例如过多地颂扬了数学，而不自觉地贬损了诸如实验方法的自然科学手段的作用等等，然而这些不足之处同作者所提供的从资料到见解的大量信息相比，则是瑕不掩瑜的。

因为上述的原因，当我在莫斯科书屋一看到这本书时候，就深深地为它所吸引。回国后，在广东教育出版社的支持下，把它译出。在翻译过程中，承中国科学院上海文献情报中心副主任郑修虹同志对译文进行了十分精心的校阅及修订，她还特地查阅了苏联大百科全书，对全文中的译名进行了订正。广东教育出版社编辑室副主任符绩才同志和梁耀凤编辑给予了指点和支

书的译成和出版提供了帮助的同志们致以深深的谢意。限于水平，译文当仍存在不少问题，请读者多多提出改进意见。

郭思乐 1992年2月于华南师范大学

目 录

历史的回顾：存在外部世界吗？·····	(1)
第 一 章 感觉的欺骗和直观·····	(24)
第 二 章 数学的萌芽及其在认识中的作用·····	(42)
第 三 章 古希腊人的天文世界·····	(59)
第 四 章 哥白尼与刻卜勒的太阳中心论·····	(81)
第 五 章 数学在物理科学中的主导作用·····	(104)
第 六 章 数学与引力之谜·····	(132)
第 七 章 数学与电磁现象的潜在世界·····	(156)
第 八 章 相对论的前奏·····	(182)
第 九 章 相对论世界·····	(200)
第 十 章 物质的“消失”：量子论·····	(223)
第十一章 理论物理学的现实性·····	(242)
第十二章 数学不可思议的效应·····	(258)
第十三章 数学与大自然的行为·····	(280)

历史的回顾：存在外部世界吗？

哲学家是这样的人，他知道某些无论谁也不能知道得这样好的事情。

——笛卡儿

没有不被哲学家们道出过的谬误。

——崔次郎

真正的哲学家难道不是象蜜做的文书一样吗？第一眼看过去简直太美了，但只要再看一眼，留下的只是黏乎乎的斑点。

——爱因斯坦

存在不依赖于人的现实的物理世界吗？存在不依赖于人们是否真正体会到的这些对象：群山、树木、陆地、海洋吗？这样的问题似乎是荒诞的。难道我们没有看到周围世界稳稳当当地摆在那里吗？难道我们的感官不是每时每刻地为我们产生感觉，确证着客观世界的存在吗？但人们思考了这样的问题，并很自然地提出了明显的怀疑。这一怀疑甚至已有证据可以印证。

首先来看看智者或智察的爱好者——哲学家们，他们在许多世纪以来思考过的许许多多的问题，这些问题都涉及到人与其周围世界的联系。（诚然，象所有有爱感的人都缺少相互联系一样，哲学家也常常被“摈弃”。）伟大的哲学家大多数思考过外部世界的问题，一些人持否定态度，另一些人则认为外部

世界固然是存在的，但却怀疑我们能对这个世界认识得有多深刻，以及我们的知识的可靠程度如何。虽然别尔特朗·拉塞尔本人是一个杰出的哲学家，但他在《我们的外部世界的知识》一书中指出：“自古以来，比之其它学科，哲学追求的多，而得到的少”。但了解若干哲学家对此说过点什么是十分有益的。我们将主要对那些非常怀疑人类对周围世界的理解能力的观点感兴趣。

思考认识外部世界问题的第一位哲学家，是爱菲斯的赫拉克利特。他生于公元前6世纪末到5世纪初。赫拉克利特不否认外部世界的存在性，但他断言在这个世界上一切都在不断地变化着。赫拉克利特认为“不可能两次进入同一个急流”，因此我们无论收集了什么样的有关我们的周围世界的事实，它们接着就因为时过境迁，同原来的周围世界没有关系了。

爱皮库尔（公元前341—270年）与赫拉克利特相反，认为我们的感觉指出了通向了解真理的正确无误之路，并从中发现了一个基本原则。依照爱皮库尔的观点，这个感觉告诉了我们物质是存在的，运动在发生，现实性最终不过是空间中现存的原子构成的物体。至于原子本身，它们是永恒的，不可摧毁的。原子是不可分、不可变的。

对外部世界的问题感兴趣的还有柏拉图（公元前427—347年）。他是最有影响的古希腊罗马时代的哲学家。柏拉图认为存在外部世界，他提出：被我们的感觉所接受的世界是五光十色的，多种多样的，不断变化的和随机的。真正的世界是观念的世界，是不变的和永恒的。但是观念的世界不是感觉可达到的，而仅仅是理性才能理解的。观察则是无益的。柏拉图在《国家》中非常明确地指出，现实的、为事物的表面现象所掩

盖的、表现事物内部实质的那些东西，就是数学；对现实的理解，这就意味着暴露它，把它从外表中分离出来，而不是徒具其表。柏拉图强调数学的意义，认为抽象的、非物质的崇高思想的总体系是数学的组成部分。正是这些思想表现了人们所追求的完美样范。这既是物质的，又是伦理的和美学的。柏拉图在《国家》中说道：

一个人张开嘴，眯着眼睛，往上面看看，又往下面看看，他试图在感觉的帮助下认识事物。反正一样，我认为他不论何时都不理解这一点。因为对于类似的事物情况，认识不存在，并且人在这种时候不是往上看而是往下看。尽管他仰面朝天地躺在陆地上或者他在大海上仰泳。

普鲁塔克在《马而策尔拉的生活》中谈到，柏拉图同时代的著名的欧多克斯和阿尔希特在“证明”数学结果时采用了物理论证。柏拉图带着愤怒否决了那种证明，认为它是对几何原理的破坏，因为这些证明诉诸感性经验事实，以取代纯推理的方法。

柏拉图如何看待知识是使我们特别感兴趣的。最直观的表现就是他怎样看待天文学。按他的见解，这门科学不是研究直观的天体运动的。星群在天空中的分布及其有形的运动固然是引人入胜的舞台，但远不能说仅是对运动的某些观察和解释就构成了真正天文学的对象。首先必须“对天上的东西不予注意”，因为真正的天文学研究的是在数学天空中星群运动的规律，而有形的天空不过是这一数学天空不完全的表现而已。柏拉图在《国家》中借苏格拉底之口这样地谈到真正的天文学的研究对象：

天上装点着有形领域的图案，应当承认它是同类事物中至善至美的。但就整体而言，它们却远逊于在真正的数量上以及真正的形式上研究星移斗换及其发生的快慢的规律性……

这就是说，天上的图景应当用作研究真实存在的参考，这就像我们看到了狄拉尔的或其他大师或某一个艺术家的画卷之后，努力尽善地把它绘出来一样。如果谁在几何学上是内行，那么看一看这些图就会认为自己能很出色地绘制出来，但也可能很可笑地把它们看作是真正认识相等、加倍或某个什么比值的源泉。

这就是说，我们将要同研究几何学一样地研究天文学，要采用一般原理。而每当我们实实在在要掌握天文学时，就把那天空中的东西留置一边。

这样的天文学的概念对于现代思维来说是不能接受的。学者们毫不迟疑地责备柏拉图，说他贬低了感性经验的意义，损害了自然科学的发展。但是应当注意到，柏拉图对天文学的态度，在多数情况下类似于几何学家顺利地遵循的方法。几何学家研究的与其说是现实的三角形，还不如说是被思维理想化了的三角形。在柏拉图的时代，观察天文实际上已经达到了可能的极限。柏拉图有权认为，天文学今后的进步需要对收集起来的资料及其理论概括进行深入的思考。

遗憾的是柏拉图的抽象理想概念在若干世纪中延宕了实验自然科学的发展。事实上由它得出的是，真正的知识仅仅借助于抽象观念的哲学静观去获得，而不必观察现实世界的偶然的和不完善的现象。

但是有过（现在也有）这样的哲学家，他们认为存在着现

实世界，并深信我们的感觉给出了关于这个世界的充分准确的概念。亚里士多德与柏拉图相反，不仅肯定对于人类来说外部世界是存在的，而且认为我们关于它的概念是经从中抽象出的各类物质对象（我们感受到的诸如三角形、球、叶子和群山）的共同观念的途径而获得的。亚里士多德批判了柏拉图的影子世界，并把自然科学归结为数学。亚里士多德作为一个物理学家，他在物质对象上看出了现实的本质和现实的源泉，物理和自然科学就整体而言，应当从事周围世界的研究，并在这个过程中找出关于周围世界的真理。按亚里士多德的见解，具有真理性的知识是由感性经验借助于直观和抽象而得到的。抽象的观念的存在是依赖于人的理性的。在寻找真理中，亚里士多德走向所谓共相——从现实事物中抽象出事物的一般性质。按亚里士多德的说法，“在自然科学中应当首先试图确定如何对待起源。自然的途径，是从我们较明白和显著的境界开始，走向在自然方面的更明白和更显著的境界。”亚里士多德举出事物通常的被感性地领会的特性，并赋予它们独立的地位，以把它提高到理想的概念的高度。具体地说，按照他的观点，在曾经居于宇宙中心的并包容了所有的水的地球外面，包围着空气层，再上面，直到月亮的边上，有着充满了称之为火的实体层。实际上，它是火与空气的混合物。所有这些实体，按亚里士多德的说法必然是四个起源：温暖、寒冷、干燥和潮湿（见第五章和第十章）。把这些来源配成成对的组合，有六种可能的方法。但在六个组合中有两个（热和冷，干和湿）按其本质来说不相容，其余的四组产生了四个要素：地球产生于冷和干，水产生于冷和湿，空气产生于热和湿，火产生于热和干。要素不是永恒的，物质不停地从一种形式变为另一种形式，在地

球和月亮之间的世界不断地发生着变化、生长、死亡、分解，气象学和地质学的现象，就有力地证明了这一点。

虽然古希腊思想家对后来的自然科学发展的影响是无可置疑的，但不少人还是喜欢低估他们的观点。的确，尽管古希腊罗马文化百般强调数学，但古希腊哲学却有充分根据可以称之为前科学。那些哲学家们不从事任何认真的试验，而且不去研究科学界如今所能理解的东西。

在中世纪，外部世界的问题已经退居次要地位，所有哲学家的思想都被神学独占了。仅仅在文艺复兴时代，哲学家们才把兴趣转向现实世界。在当时的西欧产生了现代哲学，并随之兴起了对自然科学的探索。

有充分根据可以认为现代哲学的奠基人是列涅·笛卡儿（1596—1650年）。他的《促进科学思维的方法论》（1637年）一书附有的三个附件《屈光学》、《流星》和《几何》属于经典著作之列。虽然笛卡儿认为，他的哲学和自然科学理论破坏了亚里士多德的学说和烦琐哲学，但他在精神深处仍然是烦琐哲学家和亚里斯多德的传统追随者。笛卡儿踏着亚里士多德的足迹，依靠自己的智慧，获得了各种关于存在和现实的本质的命题。很可能正因为此，他的作品对17世纪的自然科学家的影响，要比开始用观察和实验等方法得到真理的（也就是寻找显著区别于传统资料的）那些学者的研究来说影响大得多。

笛卡儿承认他自己并不比别人少走弯路，同时他又很善于寻找建造真理大厦的坚实基础。他发现了一个唯一的对他来说毫不置疑的事实——*Cogito, Ergo, Sum*（我思故我在）原理。笛卡儿意识到自己本人的局限性和不完善性而断言，从其所有的局限感出发来推想，应当存在无限完善的生物。笛卡儿将

自己和这种生物相比较，认为这个生物即上帝应当存在。因为如果没有如此重要的属性——存在性，它就不会完善。按照笛卡儿的观点，关于上帝存在的结论对于自然科学比神学更重要。因为它开辟了解决首要的问题——存在客观世界的可能性。

既然所有对于我们的理智以外的世界的知识都是从自己的感性经验获得的，这就产生了问题：是否存在某个不理睬感觉的东西？并且，客观现实是错觉吗？笛卡儿是这样回答的：上帝就象一个完善的生物，不会那样地欺骗我们；世界原本并不现实，而它却使我们相信世界是存在的。

我们可以首先通过具有客观现实性的某个物理属性，如长度，来理解这一点。物理属性素来是物质本身的概念，并且不是来自我们的感性知觉。因此，在物质世界中，无论什么样的知识都不能（至少不能直接）凭感觉得到。笛卡儿也建议这样地对物质对象的考察结果进行分类：把物质对象的质分为第一性的和第二性的。例如，他认为如颜色这样的质，是第二性的。因为我们的一个感官感受了它，然而长度和运动却是第一性的质。

对于笛卡儿来说，整个物理世界不是别的，而是一个按规律运作的庞大机器，而人类的智慧，其中包括用数学推理的方法，可以发现这些规律。作为一个哲学家，笛卡儿摒弃实验；作为一个自然科学家，他自己在做实验。

哲学家托马斯·霍布斯（1588—1679年）在《庞然大物，君主或公民国家的物质，形式与政权》（1651年）中所阐述的原理，就是当时数学和自然科学所取得的进步的直接结果。其实质就是在我们的外部只存在运动中的物质。外部物体对我们的感官产生压力，并且借助于纯粹的机械过程，在我们头脑中

唤起了感觉。所有这些知识都起源于人们头脑中产生映象的那些感觉。这些映象的链条引起对其他产生得更早的映象的回忆，例如苹果引起了树的映象的回忆。思维——这就是建造映象链的体系。其中值得注意的是，在映象中所铭记的物体及其特性获得了名称，而思维就在于用命题确定名称之间的关系，和寻找必定存在于这些命题之间的相互关系。

霍布斯在《人的本性》（1650年）中断定，思想乃是用映象或关于借助于感觉回到过去的东西的记忆。不存在天赋观念或理想，而且也不存在共相或抽象概念。三角形不是别的什么，而是先前认识的所有三角形的观念（映象）。所有产生观念的实体都是物质的。智慧——也是一种实体。语言（例如自然科学语言和数学语言）则不过是由一些符号或被领会的感觉的名称组成的。所有知识不会超出回忆，并且理念利用的词语决不会超出事物的名称。真理与谬误——这只是命名的属性，而不是物的属性。人是有生命的生物，这是真确的，因此称为人的物体，也称为有生命的物体。

当脑在组织和整理关于物理对象的命题时，就产生了知识并揭示了规律性。正是这些规律性产生了数学课程。因之，大脑的数学活动导出了现实世界的真实的知识，因之，数学就是真理。实质上对于我们可行的现实性仅仅采用数学形式。

霍布斯这样顽强地捍卫数学的真理特权，这招致了甚至数学家内部的反对。数学家德让·瓦里斯在写给自己同时代的杰出的物理学家之一的赫利斯蒂安·惠更斯的信中写道：

我们的庞然大物进行了猛烈的进攻，他在推翻我们的（而且不仅是我们的）大学，特别是打倒神父、全体教士和整个宗教；并断言道，似乎基督的世界没有达到深刻的