中学生课外读物

$$\int dx = x + C$$

微积分初探

傅 钟 鹏

微积分初探

傅 钟 鹏

辽 宁 人 民 出 版 社
1982年·沈阳

微积分初[illegible]

傅钟鹏

*

辽宁人民出版社出版
（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行
沈阳新华印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：6 7/8
字数：139,000　印数：1—9,400
1983年3月第1版　1983年3月第1次印刷
统一书号：7090·228　定价：0.54元

写在前面

在与大自然奋斗的历程中，人类不断将科学技术的发展推向前进，使所有学科的内容都大大丰富了。数学也不例外，它以自己旺盛的生命力屹立于科学之林，就象耸入云天的大树，每年都有新添的枝叶，为它装点健美宏伟的雄姿，为它补充生命的活力。

三百年前，在欧洲数学界，因为有人提出"微积分"，引起一场很大的震动。后来，人们称这段时期为"神秘的时代"，它实在是神秘和令人吃惊的，微积分竟然能够将很多初等数学束手无策的问题迎刃而解，怪不得那时有一个哲学家贝克莱惊叹："谁要是仔细领会一下微分，他就没有必要去斤斤计较上帝创世的任何细节了。"

微积分是什么？它是一种分析数学，研究对象是变量以及反映变量之间相互依赖关系的函数，一般用它来解决物体运动的各参数之间变化问题，求曲线的切线、函数的极值，以及求曲线段的弧长、曲线所围成的面积、曲面所围成的体积，有时还用它来解一些特殊的方程等等。

然而，它的作用如果进一步引伸，远不止上述的那几个方面，以下抄录梁宗巨教授在《世界数学史简编》一书中的

几句话，以见一斑：

“微积分的出现，与其说是整个数学史，不如说是整个人类历史的一件大事。它从生产技术和理论科学的需要中产生，同时又回过头来深刻地影响着生产技术和自然科学的发展。假设我们现在把微积分从工程技术、天文、物理学等学科中抽去，那将是不可想象的事。微积分对今天的自然科学工作者来说，越来越象望远镜之于天文学家，显微镜之于生物学家一样重要了。”

现在，中学课程中已能见到微积分的一些简单内容，同学们将在课堂上接受有关这方面的基础知识。这本小册子作为课外读物，是想较广泛地介绍微积分的实际应用和运算方法，但也只是微积分初步。同学们可以从中看出，微积分并不那么神秘难懂，它作为“阳春白雪”的时代已经过去，如今则是“下里巴人”了。

傅　钟　鹏

一九八一年九月于鞍钢

目　　录

序　　幕

暮云收尽溢清寒，
银汉无声转玉盘。
此生此夜不长好，
明月明年何处看？

宋代诗人苏轼的这首佳作，真不愧为中秋咏月的魁品。可是，他哪里知道，几百年前，早就有人对这个“玉盘”似的明月投去深切的关注，为它废寝忘食。

据神话传说，盘古开天辟地时，他的眼珠化成日月二轮，多么圆呀！怎样画圆呢？上古时期的女娲就是手执“规”的神，她教会大家用圆规画圆。古书《墨经》给圆下个非常恰当的定义，那就是：

“圆，一中同长也。”

历史的车轮转到公元三世纪。

皓洁的月华在天空浮动，浩气直贯天河。每逢望月的夜晚，那座小小的山丘上总能看到一个年轻人，他倒背着手，仰望苍穹，凝视着那一轮圆月，心儿飞向已逝的遥远年代。

这是刘徽。他在孩童时代，就对圆寄托了特殊的感情，

门口一棵围可合抱的古树，也成为他猎中的目标，下决心要利用量得的周长，将树干的直径算出来。

为了解答自己提出的这个问题，他沿用了前人的成果："周三径一"，然而，这不是一个令人满意的答案。他如醉似痴地画圆，一个接着一个，比划，琢磨，演算。而天上的这个"圆"——世人共有的圆，则长期吸引着他，似乎里面映射出的那股清光，既照亮了大地，又照亮他的心田。他决心勇敢地接受大自然的挑战，揭开"圆"的内在秘密。

圆，到底是由什么样的图形演变来的？自从他攻读《周髀算经》以后，眼界大为开豁。那本书中写道：

"数之法出于圆方，圆出于方。"

"环矩以为圆，合矩以为方。"

"方数为典，以方出圆。"

深奥，的确太深奥了，需要花费多大心思去深入研究啊！有一点是容易懂的："环矩以为圆"，那就是说，旋转方尺，就可以得到圆形。但是，另一些观点呢？"圆出于方"、"以方出圆"都说明圆形是从方形推进而来的，这可太费解了。圆与方是截然不同的两种图形，它们之间难道也有什么瓜葛吗？

苍天不负苦心人。攀登，攀登，终于控制了制高点。刘徽发现，周三径一并不是圆周与直径的关系，而是圆内接正六边形周长与直径的比值，拿他的话说，叫做："周三者，从六觚之环耳。"（觚——正多边形的一边；环——周长）。他认为沿用古代所取的圆周率3是错误的，然而，如果不能提出可靠的论据，就没有说服力。取得论据是很难的，不过，他毕竟从研究方与圆的关系中获得成功，在为古算书

《九章算术》作注时谈到："学者踵古，习其谬失。不有明据，辩之斯难。凡物类形象，不圆则方，方圆之率，诚著于近，则虽远可知也。"表达了自己对方圆关系的观点。

刘徽进行长期的追本觅源，刻苦钻研，终于悟出其中真谛实义，创造出震惊古今中外数坛的"割圆术"。可是，刘徽本人并不知道，由割圆术引出的极限概念，竟然与后来出世的"微积分学"基础理论暗合。

连　续

割圆术？当刘老师提到这个方法时，王慧的脑际立即掠过勾股弦关系。正是应用割圆术，并且配合勾股术，才使刘徽以及后来的祖冲之有可能求出实用而准确的圆周率值。

可是，刘老师进一步指出："割圆术的精髓所在，却是寓于其中的一种光辉创见——极限概念。"于是，她做了以下补充。

关于方与圆的关系，古数学家赵君卿说过这样几句话：

"夫体方则度影正，形圆则审实难，盖方者有常而圆者多变，故当制法以理之。"

大意是说，方形的面积容易算，圆形的则难算，这是因为计算方形有固定的方法，而圆形变化很大，因此要推导一种计算方法。

割圆术的可贵之处正是刘徽巧妙地运用了"方形好算，

圆形难算”这个特点，与赵君卿的想法不谋而合。因此，刘徽把圆看做边数无穷的正多边形，它是待求的，未知的；而边数有限的正多边形则是可求的，已知的。用有限来逼近无穷的方法总结了以下一段话：

“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣！”

刘徽的割圆术说明：如圆的内接正多边形的边数无限增加，那末，正多边形的周长就无限接近于圆周的长度，而趋近于一个固定的数值πd（d——圆的直径）。以P_n表示正n边形的周长，则写为

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \pi d$$

王慧和同学们早就掌握了极限概念，也能够娴熟地运用极限的四则运算，可是极限居然与割圆术有如此密切的联系，这还是头一次听到。

然而，使王慧感到意外的是，极限还有简易的运算方法，这可要从刘老师继续讲的“连续”说起了。

一条清澈的溪流从幽静的山林中引出，转过丘陵、平

原，也许还经过田野、村庄，蜿蜒曲折地向前推进。

这样一个平凡的自然现象说明什么呢？说明流体在运动过程中具有连续性。很难想象，这条溪流会在行进中暂时停止一段路程，再从某处又开始流动。也许有这种现象：它从地面消失了，然后又从某处冒了出来，不过，毕竟它是在连续流动的。

那末，这种连续性与数学也有关系吗？

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数叫做基本初等函数。由基本初等函数和常量经过有限次的四则运算，以及有限次的函数复合步骤构成的初等函数，在其定义区间上都是连续的，也就是说，它们所表示的曲线是连续不断的。

这个性质很重要，因为我们所讨论的函数主要是初等函数，既然它们都是连续函数（或根据定义区间的特征成为分段连续函数），对于求函数的极限就大大方便了。现在以图1所示的图形来进行分析：

从图1甲的图形可以看出，在曲线 $y=f(x)$ 上有 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ 两点。如果这两点的横坐标值无限趋近于 x_0，则纵坐标值也就无限趋近于 $f(x_0)$，即 A。

所以，从图1甲看出，极限值 A 也就是以 x_0 代入 $y=f(x)$ 所得的 y 值，即 $f(x_0)$。

因此，如果要求出初等函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（点 x_0 在函数的定义区间内）时的极限，只需直接求出它的函数值 $f(x_0)$ 就是，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

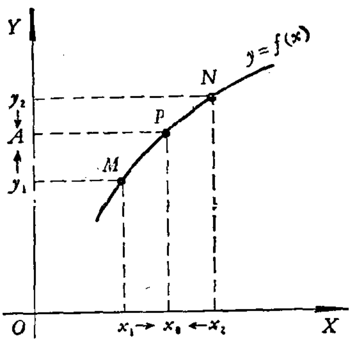


图 1甲

例如，求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-4x+1}$，可用0直接代 x，得答案为1。当然，$x=0$是在函数的定义区间内；而如果求$x\to 2$的极限，则因 $x=2$ 不在函数的定义区间内，没有意义。

如果函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处不连续，就说 x_0是函数 $f(x)$的间断点，如同图1乙那样，曲线在$x=x_0$处间断。当 x从左边趋近于 x_0时，相应于曲线上的点趋近于 P_1 点，而从右边趋近于 x_0 时，相应于曲线上的点却趋近于 P_2，它们的函数值各不相同（分别为A_1和 A_2），并不趋近于一个定值。

我们已经熟悉，反三角函数是多值函数，当 $x\to x_0$时，函数值趋近的值很多，于是，在这种情况下，只采用主值 $\arcsin x$，以区别于多值函数 $\mathrm{Arcsin}\,x$。

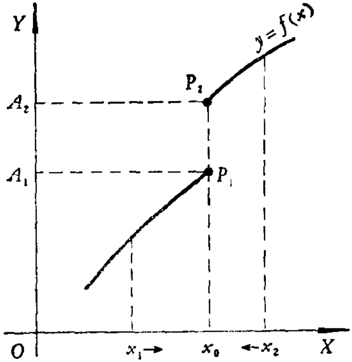


图 1乙

利用函数的连续性来作极限运算，可就省事多了，例如

求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+7}{x-3}$

只需以 $x=2$ 代入即可，得答案为 -11。

又如 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

直接用 $x=0$ 代入得分母、分子都等于零，故需适当变形，使分母有理化。分母、分子同乘 $\sqrt{1+x}+1$，得

$$分式=\frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1}=\sqrt{1+x}+1$$

再用 $x=0$ 代入得答案为 2 。

再如 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$

解：当 $x\to\infty$时，x 和 $\sin x$ 都不存在极限，故不能应用商的运算式；如写成$\frac{1}{x}\cdot\sin x$，则因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，而$\sin x$的值是$-1$至$1$（无论$x$等于多少。$\sin x$称为有界函数），两者相乘，总是等于零，故答案为0。

又：图2中OC、OD分别为$\angle AOB$、$\angle COB$ 的平分线，

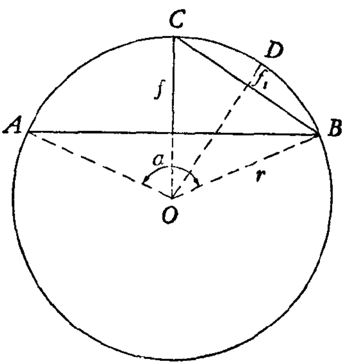


图 2

f、f_1 是弓形 ACB、CDB的矢高。问：当 α 趋于零时，f：f_1 的极限值为多少？

解：$\angle ABC=\frac{\alpha}{4}$（这角所对的弧为$\overset{\frown}{AC}$，故），因此

$$f=BC\cdot\sin\frac{\alpha}{4}$$

$$=2r\sin\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}=2r\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

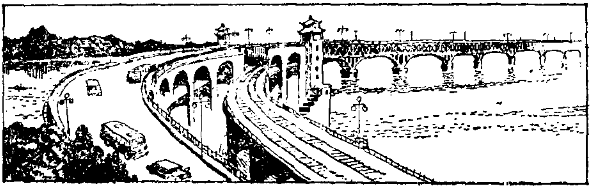
同理 $f_1=2r\sin^2\frac{\alpha}{8}$

故 $f:f_1=\sin^2\frac{\alpha}{4}:\sin^2\frac{\alpha}{8}$

$$=4\sin^2\frac{\alpha}{8}\cos^2\frac{\alpha}{8}:\sin^2\frac{\alpha}{8}$$

$$=4\cos^2\frac{\alpha}{8}$$

当 $\alpha\to 0$ 时，$f:f_1=4\cdot 1=4$。



唯一的通道

谁都理解，桥梁对沟通江河两岸的广阔地区具有何等重要的作用！王慧和同学们不止一次地在电影和报刊上看到现代桥梁的雄姿，可是并不知道，为了设计和建造一座桥梁，工程技术人员要花费多少脑力和体力的代价，才能在构造合理和先进的前提下，使它的投资最少、质量最好。

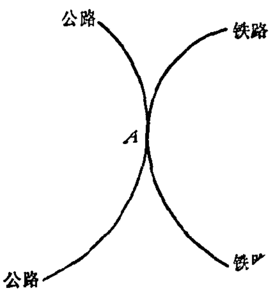


图 3甲-9一

为了节省桥墩建设费用，通常公路与铁路共用一座桥

梁，上面走汽车，下面走火车。拿图3甲来说，它们同过一点A（桥）。现在提出一个这样的问题：

有人走一条路线，这条路线始终都在公路与铁路之间，在图上应该怎样表示呢？

当然，这道题是容易得到解答的，图3乙的$l \sim l$、$m \sim m$、$n \sim n$……就是合适的答案。而图3丙那样的路线$V \sim V$显然不符合题意，因为它并不全在公路与铁路之间，有一部分（BC段）穿过铁路，要从另一座桥过江。

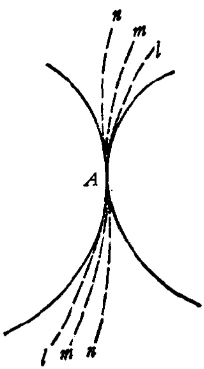


图 3乙

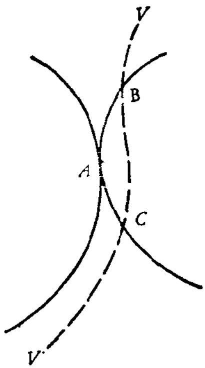


图 3丙

“这么说来，要使路线总是处于公路与铁路之间，它就必然通过A点，A点是它的唯一通道了？”王慧问道。

“是的，无论你们画出多少条路线，它们都必须通过这个‘关口’A点。”刘老师接着说。“根据这一种现象，我们可以证明一个很重要的极限。”

实际上，刘老师讲述的这个极限同学们也略知一二，就

一