高等数学常见错解浅析

•广西教育出版社•

高等数学常见错解浅析

吴增炽　张旭辉　郑盛戡　编著

广西教育出版社

高等数学常见错解浅析
吴增炽　张旭辉　郑盛畿　编著
☆
广西教育出版社出版
（南宁市七一路7号）
柳州市印刷厂印刷　　广西新华书店发行
*
开本 787×1092　1/32　5.125印张　112千字
1987年6月第1版　　1987年6月第1次印刷
印　数：1 — 9,700册
统一书号：7510·70　　定价：0.98 元
ISBN　7—5435—0080—9
G·70

前　言

尽管各种各样的题解集已经不少，我们还要奉献这本小集子，目的是为了让广大读者特别是电视大学和其它成人高校的学生，不但能知道一道数学题应当如何做，而且能知道不应当那样做。做习题当然首先要弄清教材上的有关概念、定理、公式、法则，然后动手去做。但是，有的人往往是公式、法则都记住了，题解集也翻了，自己做起题来还会出错，而且错了还不知道错在哪里，为什么错。本书试图通过对错解的剖析，给出正确的解法，使读者从正反两方面及其对比中学会正确思维的方法，提高解题效率。

书中的题目大部分取自电视大学学生的课外作业、测验和期考的答卷，少量是散落在别的辅导材料中的例子，有一定的代表性和针对性。

“高等数学”是指全部高等数学中的最基础部分，包括数学分析、空间解析几何、常微分方程初步等。本书主要按照电大理工科用的、北京大学邵士敏主编的“高等数学讲义”的体系编写，力图体现教学大纲和电大课程的要求，可供辅导教师、学生和自学青年作教学或自学参考之用。

需要着重说明的是，书中的“正确解法”，只是正确解法之一、或之二之三，不是全部，不是非此皆谬。错解包括错证、错解、错答，为方便起见，书名中统称之为错解。

限于水平，书中错误之处在所难免，是否能达到预想的目的，有待于广大读者的检验。

编著者

1986年6月于南宁

目　录

一 函 数

(一) 集 合

例 1　选择符号"$\in$""$\overline{\in}$""$\subset$""$=$"填空：

(1) $1 \quad \{1\}$；　(2) $0 \quad \varnothing$；

(3) $\varnothing \quad \{0\}$；　(4) $\{1,2\} \quad \{x \mid x^2-3x+2=0\}$；

(5) $\{x \mid x^2<0,\ x\in R\} \quad \{x \mid x^2>0,\ x\in N\}$.

错解　(1) $1\subset\{1\}$；(2) $0\in\varnothing$；(3) $\varnothing=\{0\}$；

(4) $\{1,\ 2\}\subset\{x \mid x^2-3x+2=0\}$；

(5) $\{x \mid x^2<0,\ x\in R\}\overline{\in}\{x \mid x^2>0,\ x\in N\}$.

分析　(1)(2)的错误在于元素与集合的关系的符号选择不对；(3)(5)的错误在于集合与集合的关系的符号选择错了，且空集概念模糊；(4)的符号表达集合与集合之间关系不够准确，对"包含"与"相等"这两个概念区别不清．这些错误的实质是对"符号"表示的真正的含义没有掌握好．

正确解法　(1) $1\in\{1\}$；　(2) $0\overline{\in}\varnothing$；　(3) $\varnothing\subset\{0\}$；

(4) $\{1,2\}=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$；

(5) $\{x \mid x^2<0,\ x\in R\}\subset\{x \mid x^2>0, x\in N\}$.

说明　1° 元素与集合的关系是属于（$\in$）不属于（$\overline{\in}$）的关系（如(1)(2)）.

2° 集合与集合的关系是包含（$\subset$，$=$，$\supset$）不包含（$\not\subset$，$\not\supset$）

的关系（如(3)(4)(5)）.

3° 空集是任何集合的子集（如(3)(5)）.

4° 某些集合既可用列举法表示，也可用构造式法表示(如(4)).

例 2　如果A表示某单位会英语的人的集合，B表示会日语的人的集合，那么$(A\cup B)'$，$(A\cap B)'$各表示什么样的人的集合？

错答　$(A\cup B)'$表示不会英语和不会日语的人的集合.

$(A\cap B)'$表示会英语或会日语的人除外，其它人的集合.

分析　答错的原因是对符号"∪"，"∩"，"′"及其搭配运算后表示的意义没有掌握好，致使连接词选择不当.

正确解答　$(A\cup B)'$表示所有不会英语且（又）不会日语的人的集合，即所有会英语或会日语的人除外，其它的人的集合.

$(A\cap B)'$表示所有不是既会英语且（又）会日语的人的集合，即所有英、日两种语言都会的人除外，其它的人的集合.

说明　1° $A\cup B$表示所有会英语或会日语的人构成的集合，它由三部分组成：会英语而不会日语的人，会日语而不会英语的人，日语、英语都会的人．从而$(A\cup B)'$表示所有这些人除外的其它的人组成的集合，如图1阴影部分.

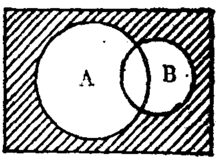

图 1

2° $A\cap B$表示所有既会英语且（又）会日语的人构成的集合，从而$(A\cap B)'$表示所有这些人除外的其它的人组成的集合．如图

2 阴影部分．

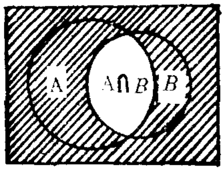

图 2

例 3　调查了某地区100个乡，其中70个乡小麦亩产量在500斤以上，以集合A表示这些乡；40个乡棉花亩产量在120斤以上，以集合B表示这些乡；小麦亩产量在500斤以上而棉花亩产量在120斤以下的有55个乡，试用集合关系表示下列各类乡，并计算出各类型乡的数目：

（1）麦、棉两项亩产量均达到上述指标的乡；

（2）小麦亩产量未达到500斤以上而棉花亩产量在120斤以上的乡；

（3）麦、棉中至少有一项达到上述指标的乡．

错解　设小麦亩产在500斤以上而棉花亩产在120斤以下的55个乡用集合C表示．

（1）麦、棉两项均达到上述指标的乡数目为 $A\cap B=70\cap 40=40$（个）．

（2）小麦未达到指标而棉花达到指标的乡数目为 $A'\cap B=(100-70)\cap 40=30\cap 40=30$（个）．

(3) 麦、棉中至少有一项达到指标的乡数目为 $C\cup B=55\cup 40=95$（个）．

分析　(1)(2)(3)的解答全是错的，错在把集合间的运算与元素的个数运算两者混淆了，对属于集合中的元素属性及集合间的元素关系也分辨不明（如(3)）．

正确解法　(1)$n(A\cap B)=n(A-C)=70-55=15$(个)．

(2)$n(A'\cap B)=n(B-A)=40-15=25$(个)．

(3)$n(A\cup B)=70+40-15=95$(个)．

或：　$55+15+25=95$（个）。

说明　符号n（A）表示集合A中的元素的个数。

（二）实数与绝对值

例 4　下列命题是否成立？成立者在括号内打“√”号；不成立者在括号内打“×”号。

（1）$\sqrt{4}$是无理数；　（　）

（2）$|b-a|=|a-b|$；　（　）

（3）不等式$2<x<3$用区间表示是（3，2）；　（　）

（4）不等式$x\geqslant 2$用区间表示是$[2, +\infty]$；　（　）

（5）$|x|>2$与$x^2>4$等价；　（　）

（6）$0\leqslant(x-2)^2\leqslant 4$与$0\leqslant(x-2)\leqslant 2$等价；　（　）

（7）不等式$|x+1|<2$所表示的邻域中心是1；　（　）

（8）不等式$|x-x_0|\leqslant\delta(\delta>0)$表示以点$x_0$为中心的$\delta$邻域。　（　）

错解　(1)：(√)，(2)：(×)，(3)：(√)，(4)：(√)，(5)：(×)，(6)：(√)，(7)：(√)，(8)：(√)。

分析　(1)——(8)的解答全是错的。

(1)错在没有掌握好无理数、有理数的概念，认为带有根号的数都是无理数。

(2)的错误在于没有认清“$b-a$”与“$a-b$”是互为相反数，仅是符号不同但其绝对值相等。

(3)(4)的错误在于没有掌握好区间记号的规定。(3)应为(2，3)，(4)应为$[2, +\infty)$。

(5)(6)的错误在于没有掌握非负数$|a|$，a^2及其不等

式所表示的实数范围．实际上$|x|>2$与$x^2>2^2$所表示的实数范围是相同的；而$(x-2)^2\leqslant 4$只与$|x-2|\leqslant 2$表示实数范围相同，与$(x-2)\leqslant 2$表示实数范围不同．$(x-2)^2\leqslant 4 \Longleftrightarrow |x-2|\leqslant 2 \Longleftrightarrow -2\leqslant (x-2)\leqslant 2$，它只是$(x-2)\leqslant 2$的一个子集．

（7）的错误在于没有掌握邻域的“中心”概念．因为$|x+1|=|x-(-1)|$，中心应是(-1)而不是1．

（8）的错误是没有掌握“邻域”的概念．因为$|x-x_0|\leqslant\delta \Longleftrightarrow [x_0-\delta, x_0+\delta]$，而邻域是开区间．

正确解答 (1)：(×)，(2)：(√)，(3)：(×)，(4)：(×)，(5)：(√)，(6)：(×)，(7)：(×)，(8)：(×)．

例 5 是否存在实数x，使得$|x-1|=|x-2|$．

错解 不存在实数x，使得$|x-1|=|x-2|$．

理由是：

$$1\neq 2,\ x-1\neq x-2,$$

故 $|x-1|\neq|x-2|$．

分析 由$x-1\neq x-2$导出$|x-1|\neq|x-2|$的结论是错误的，这是推理无据的表现，其实质是不明了绝对值的意义．

正确解法 本题实际是：方程

$$|x-1|=|x-2|$$

是否有实数解？有解的话，解是什么？

解法① 令$x-1=0$，得$x_1=1$；令$x-2=0$得$x_2=2$．

由$x_1=1$，$x_2=2$把全体实数分成$x<1$，$1\leqslant x<2$，$2\leqslant x$三个区间．

当$x<1$时，原方程为

$$-(x-1)=-(x-2)．$$

解得　$1=2$，此时原方程无解；

当$1\leqslant x<2$时，原方程为

$$x-1=-(x-2),$$

解得 $x=\frac{3}{2}$，结合条件$1\leqslant x<2$可知原方程 有解为 $x=\frac{3}{2}$；

当$2\leqslant x$时，原方程为

$$x-1=x-2,$$

解得 $1=2$，此时原方程无解.

故方程$|x-1|=|x-2|$有实数解　$x=\frac{3}{2}$.

即存在实数 $x=\frac{3}{2}$，使得$|x-1|=|x-2|$.

解法②　因为$|x-1|$与$|x-2|$均为非负数，所以

$$|x-1|^2=|x-2|^2,$$

即　$x^2-2x+1=x^2-4x+4$.

解得　$x=\frac{3}{2}$.

即存在实数 $x=\frac{3}{2}$，使得$|x-1|=|x-2|$.

说明　解含绝对值的方程或不等式，关键在于合理地去掉绝对值符号，转化为不带绝对值符号的方程或不等式求解.

当使用定义去掉绝对值符号时，需分段进行讨论.

例 6　证明$|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

错证　分下面几种情况讨论：

1°　当x，y同号时，显然有$|x+y|=|x|+|y|$；

2° 当x，y异号时，显然有$|x+y|<|x|+|y|$；

3° 当$x=y=0$时，显然有$|x+y|=|x|+|y|$.

由1°，2°，3°可知，对任意实数x，y，均有

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

分析 没有讨论x，y之中一个为0，而另一个不为0的情形，犯了以偏代全的错误.

正确证法 下面提供两种证法.

证法① 1°，2°，3°同上.

4°当x，y之中一个为0，而另一个不为0时，显然有$|x+y|=|x|+|y|$.

由1°，2°，3°，4°可知：

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

证法② $\because -|x|\leqslant x\leqslant|x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant|y|$，将两式相加得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|),$$

$$\therefore\quad |x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

(三) 函数概念

例 7 已知$f(x)=x^2+4x+1$，求$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

错解 原式$=\dfrac{[(x+h)^2-x^2]+4[(x+h)-x]+1}{h}$

$$=\frac{2xh+h^2+4h+1}{h}$$

$$=2x+h+4+\frac{1}{h}$$

分析 第一个等号就错了，原因是不理解函数关系“f”.

正确解法 由已知得$f(x+h)=(x+h)^2+4(x+h)+1$，

即 $f(x+h)=x^2+(2h+4)x+h^2+4h+1$，

$\therefore$ $f(x+h)-f(x)=2hx+h^2+4h$

$$\therefore \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2hx+h^2+4h}{h}=2x+h+4.$$

例 8 设 $\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

错解 $\because \dfrac{1}{x}$是x的倒数，

$$\therefore \quad \varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+x}{1-x}.$$

分析 这是对函数关系概念实质理解模糊而产生的错误.

正确解法 $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$.

例 9 求函数定义域：

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\leqslant 0\ ;\\ x\ , & 0<x<1;\\ 2\ , & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

错解① $\because x=1$时，$\dfrac{1}{x-1}$无意义

$\therefore$函数定义域是$x\neq 1$的实数.

错解② 当$\varphi_1(x)=\frac{1}{x-1}$时，函数定义域是$x\leqslant 0$；当$\varphi_2(x)=x$时，函数定义域是$0<x<1$；当$\varphi_3(x)=2$时，函数定义域是$1\leqslant x\leqslant 2$.

分析 解法①的错误在于不理解分段函数在自变量取值不同的区间其对应关系不同，解法②的错误在于认为分段函数是几个函数.

正确解法 分段函数定义域应是各分段区间的并集，故函数定义域为$-\infty<x\leqslant 2$.

例10 求下列函数的定义域：

（1） $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；

（2） $y=\log_2\log_2 x$.

错解 （1） 函数定义域由下列不等式组的解确定：

$$\begin{cases}\frac{1}{1-x}>0, & ①\\ x+2>0. & ②\end{cases}$$

解①得$1-x>0$，即$x<1$，

解②得$x>-2$，

所以函数定义域是$-2<x<1$.

（2） 函数定义域是$x>0$.

正确解法 （1）函数定义域由下列不等式组的解确定：

$$\begin{cases}\frac{1}{1-x}>0, & ①\\ 1-x\neq 0, & ②\\ x+2\geqslant 0. & ③\end{cases}$$

解①得$x<1$，解②得$x\neq 1$，解③得$x\geqslant -2$. 所以函数定义域是$-2\leqslant x<1$.

（2） 函数定义域是由下列不等式组的解确定：

$$\begin{cases} x>0, & ① \\ \log x>0. & ② \end{cases}$$

解①得$x>0$，解②得$x>1$.

所以函数定义域是$x>1$.

说明 分母不等于零，对数的真数大于零，偶次根号下的式子非负都是求函数定义域时常要注意的. 函数的定义域由不等式组的解来确定时，注意不要漏掉某种情形.

例11 求 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ （$0\leqslant x<1$）的值域.

错解 $\because 1\neq 0$，$\therefore \dfrac{1}{1-x}\neq 0$.

即 函数值域为$-\infty<f(x)<0$，$0<f(x)<+\infty$.

分析 错在忽视定义域$0\leqslant x<1$的条件，且推理无据.

正确解法 下面提供两种解法.

解法① $\because 0\leqslant x<1$，$\therefore -1<-x\leqslant 0$，

$\therefore 1-1<1-x\leqslant 1+0$，即 $0<1-x\leqslant 1$.

故 $1\leqslant\dfrac{1}{1-x}<+\infty$，即 $1\leqslant f(x)<+\infty$.

解法② $\because y=\dfrac{1}{1-x}$ （$0\leqslant x<1$），而$1-x\neq 0$，

$\therefore$ 原函数的反函数为 $x=1-\dfrac{1}{y}$ （$0\leqslant x<1$）.

$\because$ $0\leqslant x<1$，$\therefore 0\leqslant 1-\dfrac{1}{y}<1$，$\therefore 0<\dfrac{1}{y}\leqslant 1$.

即 $1\leqslant y<+\infty$是函数 $x=1-\dfrac{1}{y}$ $(0\leqslant x<1)$的定义域.

$\therefore$原函数的值域是 $1\leqslant f(x)<+\infty$.

说明 解法①是用分析的方法通过解不等式求出函数的值域；解法②是利用"反函数的定义域即是原函数的值域"来求的，这是求函数值域常见的两种方法.

例12 求函数$y=\sqrt{x-x^2}$的值域.

错解 $\because$偶次根号下非负，$\therefore x-x^2\geqslant 0$，

故 $0\leqslant\sqrt{x-x^2}<+\infty$，即 $0\leqslant y<+\infty$.

分析 错误在于扩大了值域，错因是仅看到偶次根号下非负，忽略或者不知道二次函数$f(x)=x-x^2$有最大值.

正确解法 $\because$偶次根号下非负，$\therefore x-x^2\geqslant 0$. 当$x=0$时，$x-x^2$达到最小值0，从而$y$有最小值为0；另一方面，

$x-x^2=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$，当 $x=\dfrac{1}{2}$时，达到最大值$\dfrac{1}{4}$，从而 y有最大值$\dfrac{1}{2}$，故函数的值域是$0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$.

说明 利用求函数的最大、最小值的方法，来确定函数的值域也是常见的方法.

例13 平面圆的面积公式是$A=\pi R^2$，其中R是圆的半径，问此函数的定义域是什么？解析表达式$A=\pi R^2$的定义域呢？

错解 函数定义域与解析表达式$A=\pi R^2$的定义域均是$0<R<+\infty$.

分析 解析表达式的定义域为$0<R<+\infty$是错误的，错因是混淆了函数定义域与解析表达式定义域这两个相似而实质不同的两个概念.