數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

MATHEMATICAL METHODS IN INTELLIGENCE GAMES

智力游戲中的數學方法

倪進 朱明書 著

数学方法论丛书

智力游戏中的数学方法

倪 进 朱明书 著

江苏教育出版社

1986·南京

数学方法论丛书

智力游戏中的数学方法

倪　进　朱明书著

出版发行：江苏教育出版社

经　　销：江苏省新华书店

印　　刷：江苏新华印刷厂

开本850×1168毫米　1/28　印张7　　字数153,600

1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷

印数1—4,500册

ISBN 7—5343—0778—3

G·685　　　定价：2.60元

出 版 说 明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史．而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔(Deacartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincare)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解．就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维

的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大力提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去。特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是与我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》（以下简称《丛书》），并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》，我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学教学改革和培养人材的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其他两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1988年1月

序言

我们愿意奉陪大家在数学大花园里悠闲地散散步，希望每位都能摘到一束自己喜爱的花。

本书是《数学方法论丛书》之一，但本书不专门论述数学方法论，而只挑选若干智力题，对它们作一些数学的分析和数学的讨论。我们把冗长的和严格的数学证明都略去了，这样可以突出数学处理和数学思考的方法，又可使本书不至成为一本纯粹的数学书。

如果在各种课程中进行一次调查，也许数学是最不受欢迎的。其原因当然很多，一致公认的至少有：教科书篇幅紧凑枯燥无味，教师迫于学时，只好板起严肃的面孔，把精炼的知识强灌给学生，不管他们是否来得及消化，就逼着他们跳入习题的汪洋苦海，这就使得许多同学对数学兴致索然。

如何能使学习数学象听故事、逛花园或做游戏那样趣味盎然呢？我们希望读者们能在阅读本书之后，或多或少地体味出这种心情。

在花园里散步，不必抱着生物学家的态度，如果你对动物花草感到兴趣，不妨停下来细细观赏。

目录

目录

目

录

一 国际象棋盘上的皇后

在对世界的各式各样观察方式中……最有趣的方式之一是被设想为由模式组成的那个方式。

维纳(N. Wiener)

1.1 高斯的猜想

国际象棋、象棋和围棋号称世界三大棋种。国际象棋中的“皇后”的威力比中国象棋中的“车”大得多:“皇后”不仅能控制她所在的行和列，而且能控制“斜”方向的两条直线。

国际象棋的棋盘上共有8 × 8格，棋盘上最多能放上多少个皇后？当然要求不同的皇后既不在同一行或同一列，又不在同一斜线上。显然，最多只能放上八个皇后。

大数学家高斯(C. F. Gauss)曾猜测“八皇后问题”共有96个解。后经严格证明，实际上只有92个解。本章介绍一种解法，几乎不需要数学的预备知识，并试图解释高斯为什么猜测共有96个解。本章最后一节介绍，为了控制8 × 8格的国际象棋盘，最少需要五个皇后。更有趣的是，五个皇后还能控制“加一行、加一列”的9×9格超级棋盘哩!

1.2 回溯法初步

为了简单起见,我们在本节讨论4 × 4棋盘上的所谓“四皇后”问题。当然要求任何两个皇后不在同一行、同一列或同

一条对角线上。

我们采用 4 维向量表示四个皇后在 4×4 棋盘上的一种放法。例如，(2，4，1，3)对应着图1-1所示的放法。图中“Q”代表皇后。

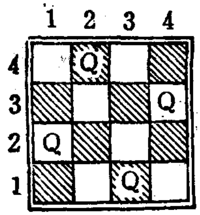


图 1-1

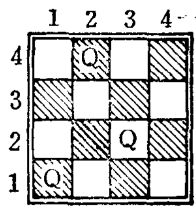


图 1-2

设在棋盘上已经放好三个皇后，第四个皇后还没有放(如图1—2所示)，对应的向量应为(1，4，2，×)，第4个分量“×”，表示第4个皇后尚未确定位置。

为今后的方便，我们约定用“约束条件A”代表“没有两个皇后在同一行、同一列或同一对角线上”。

细心的读者或许已经发现，图1—2对应的(1，4，2，×)，即放好三个皇后以后，第4个皇后不管怎么放法，都不能符合约束条件A。

问题：在约束条件A的限制下，所谓的四皇后问题有没有解？如有解，有多少解？如何找出所有的解？

让我们先看一看图1—3所示的状态树。树根用(×，×，×，×)标记，表示棋盘上没有皇后(空棋盘)。树中每个顶点都对应着棋盘上放皇后的一个状态。第一级顶点为(1，×，×，×)，(2，×，×，×)，(3，×，×，×)和(4，×，×，×)，它们分别表示第一个皇后放在第1行，第2行，第3行和第4行(总假定第i个皇后放在第i列上)，而其他的皇后尚未

放上棋盘。第二级顶点表示棋盘上在第1列和第2列中各放一个皇后，且棋盘上只有这两个皇后。其他情况类似。第4级顶点(也即状态树的树叶)按自然次序排列为(1,1，1，1)，(1，1，1，2)，……，(4，4，4,4)共有$4^4=256$(种)。每一级向下一级分叉成4枝，是一棵完全正则的四分树。限于篇幅，图1—3仅画出该状态树的一小部分。有了图1—3以后，将大大有助于我们去思考和探索"四皇后"问题。

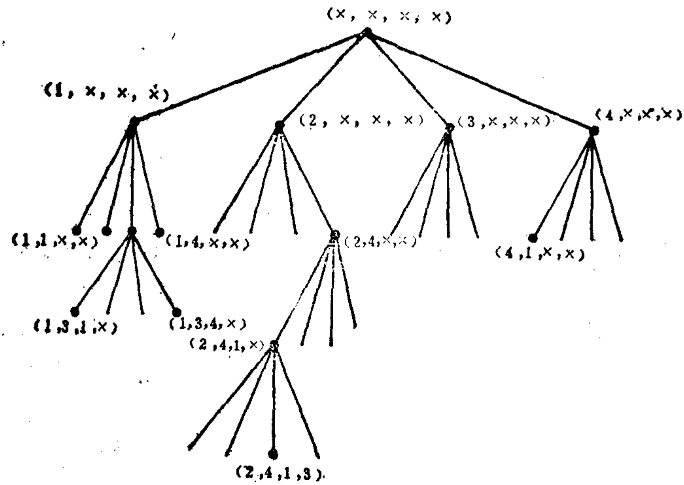


图 1-3

乍看上去，最安全可靠的方法是把$4^4=256$种情况全部检核一遍，将符合条件A的那些找出来.这种数学方法即"列举法"或"穷举法"。然而，有些问题中有无限多的情况，或者虽然是有限的，但是一旦数目很大时，列举法常常不能奏效。因此，必须采用大大节省步骤的改进方法。我们介绍一种"回溯法"，其基本思想如下：

按照自然次序(字典次序)先搜索(1，×，×,×)，再往

第二级顶点搜索(1，1，×，×)。因为(1,1,×，×)表示前两个皇后都位于第一行上，违反约束条件A。所以，以(1，1，×，×)为树根的子树的树叶(1，1，1,1),(1，1，1,2)，…，(1，1，4，4)都不是“四皇后问题”的解，不必逐一去搜索，也不必在状态树图1—3中再继续往下级画。这时，应从顶点(1，1，×,×)“回溯”(退回)到上一级的顶点(1，×，×，×)处，以下一个顶点(1,2，×，×)来考察。这个顶点表示的状态如图1—4，两个皇后在同一对角线上。这仍然违反条件A。于是再返回到(1,×，×,×)，取下一个顶点(1,3，×,×)考察。它符合条件A。接着往下搜索下一级顶点中的第一个(1,3，1，×)，它违反A。继续考察(1，3，2，×),(1,3,3,×),(1,3,4,×)，它们都违反A。于是返回(1，×,×,×)，取(1，4，×，×)为树根。

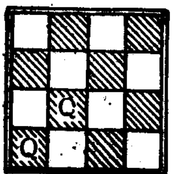


图 1-4

继续按上述方式，凡到某顶点时违反A的话，就不必再去访问该顶点的“子孙”，而应返回它的“父亲”处，选该父亲的下一个“儿子”为考察点……

图1—5中用八个棋盘大略地反映了求出一个解(2，4,1，3)的过程。其中的黑点表示因违反条件A，而在该列中不能放置皇后的位置。图1—5(a)表示第一个皇后放在第一行，第二个皇后就不能放在第1行也不能放在第2行，只能从第3行开始访问。(b)表示以(1，3，×,×)为树根的子树上的树叶都不是问题的解，因为第三个皇后无论怎么放，都违反A。(c)表示(1，4，1，×)违反A，而(1,4，2，×)仍能符合A。(d)表示(1，4，2，×)在考虑第4个皇后位置后，就被否决了。显然，(1，4，3,×)和(1，4，4,×)都不能是问题的解，所以，我们跳到(e)。(f)表示第二个皇后只能放在第4

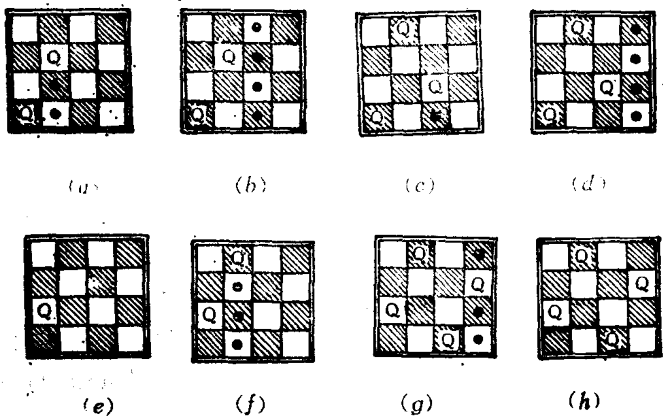
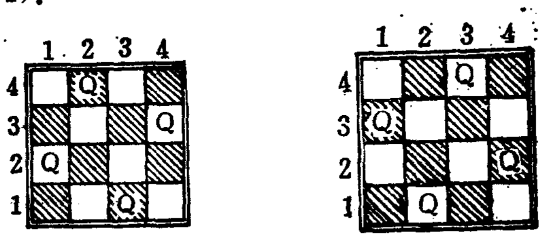


图 1-5

行. (*g*) 表示第 3 个皇后能放在而且也只能放在第 1 行，第 4 个皇后只能放在第 3 行. (*h*)表示一个解 (2, 4, 1, 3) 已被求得.

读者可用回溯法继续探索，不难得到结论："四皇后问题"共有两个解，如图1—6中的(*A*)(2, 4, 1, 3)和 (*B*)(3, 1, 4, 2).



(A)(2,4,1,3)　　(B)(3,1,4,2)

图 1-6

在 4×4 棋盘上的"四皇后问题"在约束条件 *A* 下的位置问题已完全解决. 有没有解？有解. 有多少个解？有两个解.

这两个解是怎样的？图1—6（A）和（B）即是所求的两个解，它们的简便记法为（2，4，1，3）和（3，1，4，2）。这种记法的第一个优点是方便，不必每次画出一个 4×4 棋盘；我们可以看到，再往下的讨论，更能显示这种记法的好处。

让我们用数学家的眼光再仔细审视、欣赏一番这两个解（A）和（B），可以发现（A）、（B）之间尚有一个迷人的特点：原来（A）与（B）是成“镜对称”的！（或者说，它们可以“翻转重合”的），数学上称“镜对称”的（A）、（B）在“本质上”只是一个解，也就是说，虽然（2，4，1，3）与（3，1，4，2）形式上是两个解，本质上只是一个解。于是，我们有了“形式解”与“本质解”的初步概念。

1.3　八皇后问题

现在我们已经有了一些经验，可以开始去求解高斯的“八皇后问题”。在数学研究中，也和其他学科的研究一样，经常采用的一种方法是先研究特殊的、较简单的情形。例如，刚才研究的是 4 × 4 棋盘上的“四皇后问题”。其实，在研究“八皇后问题”之前，也可以先把“五皇后”、“六皇后”、“七皇后”等问题研究一番。虽然它们各有各的特点，很难找出什么普遍规律，然而，仍有一些经验可供进一步研究借鉴。或许有人会怀疑，这样做会浪费时间，还是急于直接去求解“八皇后问题”为好。当然，如果有好办法，那肯定会使研究工作的效率大大提高，甚至会节省大量时间。有许多初学数学的人往往被繁复的数学符号所吓住，而不敢再往下多走几步。在这里，让我们透露一种易被理解并被采用的办法，那就是拿出一张纸和一枝笔，写下一个简单而又特殊的实例，对照书上所论而去看看你的实例。如果已能理解书上所论之意义了，

那就不妨把你的实例重新换上一个稍难的，再去对照一番。

下面，我们列出一大张表，简要说明当 $n=1,2,\cdots,7$ 时，$n\times n$ 棋盘上的各种结果（见表1—1）。

最重要的是当 $n=4$ 时，两个解(2413) 和 (3142)，本质上只是一个解。

当$n=5$时，有10个解，只有 2 个本质解。

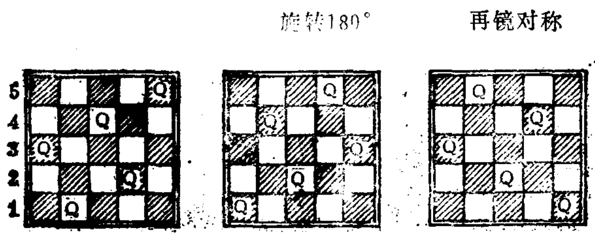
当$n=6$时，有 4 个解，只有 1 个本质解。

当$n=7$时，有40个解，只有6个本质解。

表1-1列出了 $n=4$、$n=5$、$n=6$、$n=7$ 时的所有解与本质解。

$n=5$ 时，有10个解，编号 4*、7*为第二个本质解及其镜对称解，其余8个解皆由第一个本质解 (1)。13524 经旋转和求其镜对称而得，即 35241、24135、52413，和 42531、14253、53142、31425等。

有趣的是，当写出编号为 1、2、3、4*、5后，第5个解为31425，第 6 个解并不需要从实践中去一一摸索，而是用“6”减去每一个数字的差数写成 “35241”，此解不仅完全正确，而且是与“31425”解有某种对称性。这种对称性与“镜对称”不同，相当于旋转 180° 后再“镜对称”(参见图1-7)。



(a) (3,1,4,2,5)　(b) (1,4,2,5,3)　(c) (3,5,2,4,1)

图 1-7

表 1-1

$n=4$

编　　号	解	解	编　　号
1	2413	3142	2

$n=5$

$(k)_m$	编号			编号	$(k)_m$
$(1)_0$	1	13524	53142	10	$(1)'_2$
$(1)'_1$	2	14253	52413	9	$(1)_3$
$(1)_2$	3	24135	42531	8	$(1)'_0$
(2)	4*	25314	41352	7*	$(2)^1$
$(1)'_3$	5	31425	35241	6	$(1)_1$

$n=6$

$(k)_m$	编号			编号	$(k)_m$
$(1)_0$	1	246135	531642	4	$(1)'_0$
$(1)_1$	2	362514	415263	3	$(1)'_1$