高等学校适用教材

高等数学学习指导

——内容·方法·思路·注释

张国玳　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等学校适用教材

高等数学学习指导

——内容·方法·思路·注释

张国玳　编

机械工业出版社

本书是根据国家教育部工科数学课程指导委员会制定的高等数学基本要求及硕士研究生入学考试高等数学考试大纲而编写的，内容包括函数、极限、连续、一元函数微积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、级数及常微分方程等.

附录部分包含通用数学符号，希腊字母，初等数学（代数、三角、几何）中的一些基本公式和曲线图形，初等函数的幂级数展开式，以及几种常用曲线的方程和图形，可供查阅.

本书可作为普通高等院校工科各专业学生，电大、函授大学和业余大学工科本科学生学习高等数学的参考书，亦可供自学及报考硕士研究生人员使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导——内容·方法·思路·注释/张国玳编. —北京：机械工业出版社，2003.6

高等学校适用教材

ISBN 7-111-12215-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 张…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 038592 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：王霄飞　郑　丹
责任编辑：郑　丹　版式设计：张世琴　责任校对：申春香
封面设计：饶　薇　责任印制：付方敏
北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2003 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·10.5 印张·408 千字
定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646

前　言

本书是根据国家教育部工科数学课程指导委员会制定的高等数学基本要求及硕士研究生入学考试高等数学考试大纲编写的．内容适合教学改革要求，是一本与大学本科高等数学教学同步的教学辅助用书，便于本科在读生使用，可正确引导学生的课外学习．全书由内容提要（基本概念、基本理论、基本方法、应用）、例题选解和注释、附录组成．

本书在选题时高度重视对基本知识的训练．为增强读者对基础知识的理解和掌握，既选解了大量有关高等数学基本概念、基本理论和基本方法方面的问题，又选解了富有启发性的典型问题，以及相当数量的综合题，加强了论证题．对运用高等数学的基本原理、基本方法灵活处理问题的能力、推理能力以及综合运用知识解决问题的能力给予了高度的重视．因此，本书可帮助学生对所学基本内容融会贯通，并引导学生向纵深发展．

在选题时，对诸如熟练的运算能力、归纳和抽象思维能力、灵活的反应能力、从具体到一般的联想能力、逻辑推理能力、建立数学模型的能力、自学能力等数学素质给予了高度重视．

在编写过程中，探索了习题的类型化，循序渐进、由浅入深、层次分明地安排例题，有助于学生全面系统地掌握知识．同时考虑到阅读方便，内容叙述广泛采用表格法，计算题采用了详解形式，概念题给出了详细说明，证明题采用了举题型讲方法的格式，给出了分析，写出了思维过程．

本书总结了编者数十年的教学经验，应学生要求在2000年完成初稿，在南京航空航天大学经过两年试用，并进一步修改、充实，最后成书．在编写过程中得到了南京航空航天大学校领导、理学院以及数学系领导的关心、支持和帮助，并得到了基础数学教研室广大教师的支持，对他们以及他们提出的许多宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢．

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

目　录

第1章 函数 极限 连续

1.1 绝对值与不等式

（1）假若 x 为实数，则定义 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$.

对于任何实数 x 和 y，有以下的不等式成立

$|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$

若 $|x|\leqslant y$ $(y\geqslant 0)$，则 $-y\leqslant x\leqslant y$.

若 $|x|>y$ $(y\geqslant 0)$，则 $x>y$ 或 $x<-y$.

（2）变量间进行相互比较对描述和分析变量的变化性态与相互制约关系是非常有用甚至是不可缺少的方法，因此不等式成为数学中的一个重要工具. 应逐步掌握一些已知的不等式.

例 1.1 求证不等式 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$，其中 $a>0$，$b>0$.

证 由 $(a-b)^2>0$,即 $a^2+b^2>2ab\Rightarrow\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$, $a>0$, $b>0$.

$$由\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{2}>\sqrt{\frac{1}{ab}}，即\sqrt{ab}>\frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}.$$

综上，$\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$，其中 $a>0$，$b>0$.

注意 1）由已知不等式出发推出新的不等式；或建立一个不等式，在此基础上推出新的不等式. 这是证明不等式常用的方法.

2）一般地，用数学归纳法可证以下的平均值不等式：

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n},其中\ a_i>0, i=1,2,\cdots,n.$$

即有结论：正数的调和平均值不超过几何平均值，正数的几何平均值不超过算术平均值.

于是，由 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^3b^3c^3}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

这些均为常用的不等式.

例 1.2 求证不等式$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，其中 n 为自然数.

证 因为 $(2n)^2-1<(2n)^2$，即$\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2n}{2n+1}$.

故 $a_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}=\dfrac{1}{a_n(2n+1)}$

即 $a_n^2<\dfrac{1}{2n+1}$，$a_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，$\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

例 1.3 求证柯西不等式$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

其中，a_i，b_i，$i=1,2,\cdots,n$ 均为实数.

证 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2\geqslant0$,即$(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2)x^2+2(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k)x+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant0$ 这是一个关于 x 的二次三项式，其值非负．故判别式

$$\Delta=4(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k)^2-4(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{k=1}^{n}b_k^2)\leqslant0$$

即 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

注意 这里我们引入参数 x 建立了一个不等式，在此基础上证出所要的不等式.

例 1.4 求证贝努里不等式 $(1+x)^n\geqslant1+nx$. 其中，$x>-1$，自然数 $n>1$，等号仅当 $x=0$ 时成立.

分析 凡含有自然数 n 的等式或不等式可考虑用数学归纳法证.

证 当 $n=2$ 时，有 $(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant1+2x$，等号仅当 $x=0$ 时成立.

设 $(1+x)^k\geqslant1+kx$ 成立，则当 $1+x>0$ 时有

$(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k\geqslant(1+x)(1+kx)=1+(1+k)x+kx^2\geqslant1+(1+k)x$

由归纳法知，当自然数 $n>1$ 时，恒有 $(1+x)^n\geqslant1+nx$，$x>-1$.

例 1.5 求解绝对值不等式$\left|\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{4}$，其中 n 为自然数.

解 因为$\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}<\dfrac{1}{2}$

所以 $\left|\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$（去掉了绝对值符号）

从而由$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{4}$可解得 $n>\frac{1}{8}$.

1.2 函数

1.2.1 函数概念

定义 1.1 设 x，y 是同一过程中的两个变量，x 在给定的数集 D 内变化. 若对每一个 $x\in D$，y 按照一定法则 f 有一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 称 x 为自变元，y 为因变元，D 为定义域，y 值的全体 E 称为值域.

函数概念中有两个要素：定义域 D 及对应关系 f. 它们一旦确定，函数就完全确定了，而与自变元、因变元用什么记号无关.

例如，$y=f(x),x\in D$ 与 $u=f(v),v\in D$ 是同一个函数.

两个函数当且仅当定义域及对应关系均相同时才表示同一个函数，否则它们表示不同的函数.

应正确理解函数记号，会求函数定义域.

例 1.6 说明 $y=x$、$y=\sin(\arcsin x)$ 与 $y=\arcsin(\sin x)$ 是不同的函数.

因为 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)\Rightarrow$ 值域为 $(-\infty,+\infty)$.

$y=\sin(\arcsin x)$ 的定义域为 $[-1,1]\Rightarrow$ 值域为 $[-1,1]$.

$y=\arcsin(\sin x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)\Rightarrow$ 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

例 1.7 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1,x\geqslant 0\\ x^2+4,x<0\end{cases}$，求函数 $f(1)$，$f(-1)$，$f(e^x)$，$f(x-1)$，$f(x)-f(x-1)$，$f(x)+1$，并求其定义域.

解 $f(1)=(2x+1)|_{x=1}=3,f(-1)=(x^2+4)|_{x=-1}=5$

$$f(e^x)=\begin{cases}2e^x+1,e^x\geqslant 0\\ e^{2x}+4,e^x<0\end{cases}=2e^x+1,-\infty<x<+\infty$$

$$f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1,(x-1)\geqslant 0\\ (x-1)^2+4,(x-1)<0\end{cases}=\begin{cases}2x-1,x\geqslant 1\\ (x-1)^2+4,x<1\end{cases}$$

$$f(x)-f(x-1)=\begin{cases}(2x+1)-(2x-1),x\geqslant 1\\ (2x+1)-((x-1)^2+4),0\leqslant x<1\\ (x^2+4)-((x-1)^2+4),x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2,x\geqslant 1\\ -(x-2)^2,0\leqslant x<1\\ 2x-1,x<0\end{cases}$$

$f(x)+1=\begin{cases}2x+2, x\geqslant 0\\ x^2+5, x<0\end{cases}$, $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

指出 本题所给函数$f(x)$是在函数定义域的不同部分上用不同的公式表达的一个函数，叫做分段函数.

例 1.8 已知$f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}$，$x>0$，求$f(x)$.

解 令$\frac{1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{t}$，$t>0$，$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1+\sqrt{t^2+1}}{t}$，$t>0$.

故 $f(x)=\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}, x>0$

例 1.9 求函数 $y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\lg(2-x)}+\arcsin\frac{x}{3}$的定义域.

解 由$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0\\ 2-x>0\\ \lg(2-x)\neq 0\\ \frac{|x|}{3}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1\\ x<2\\ x\neq 1\\ -3\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

所以,交集$[-3,-1]\cup(1,2)$为所求函数的定义域.

例 1.10 若$f(x)=\frac{x}{1-x}$，$x\neq 1$，求$f(f(x))$的定义域.

解 $f(f(x))=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$，定义域为 $x\neq\frac{1}{2}$，$x\neq 1$.

例 1.11 已知$y=f(x)$的定义域为$[0,1]$，求函数$y=f(x+a)+f(x-a)$，$a>0$的定义域.

解 依题意，$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$即$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$，$a>0$.

(1) 若$a\leqslant 1-a$，即$a\leqslant\frac{1}{2}$时，上不等式组的解为$a\leqslant x\leqslant 1-a$.

(2) 若$1-a<a$，即$a>\frac{1}{2}$时，上不等式组无解.

综上，当$0<a\leqslant\frac{1}{2}$时，函数$y=f(x+a)+f(x-a)$的定义域为$a\leqslant x\leqslant 1-a$.

指出 具有实际意义的函数，其定义域由实际问题确定. 若函数由解析式给出，则其定义域是使式子有意义的自变量值的集合. 一般遵循的原则有，分数的分母不可为零，对数的真数应大于零，偶次方根的被开方数非负等.

定义 1.2 对于函数$y=f(x)$，如果能将 y 当作自变量，x 作为因变量，则

由$y=f(x)$确定的函数 $x=\varphi(y)$称为 $y=f(x)$的反函数.

数学上，习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此，把$y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$改记为 $y=\varphi(x)$，或用$y=f^{-1}(x)$表示.

给出函数$y=f(x)$，$x\in D$，$y\in E$. 如果$y=f(x)$在 D 内严格单调上升（或下降），则必存在反函数$y=f^{-1}(x)$，它在 E 内也严格单调上升（或下降）.

例 1.12 求 $y=\sin x|\sin x|$，$|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$的反函数.

解 $y=\begin{cases}\sin^2 x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ -\sin^2 x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x<0\end{cases}$，这是分段函数，求反函数也应分段进行.

(1) 由 $y=\sin^2 x$，$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 解出 $\sin x=\sqrt{y}$，即 $x=\arcsin\sqrt{y}$. 反函数为 $y=\arcsin\sqrt{x}$，$0\leqslant x\leqslant 1$.

(2) 由 $y=-\sin^2 x$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant x<0$，$-1\leqslant y<0$ 解出 $\sin x=-\sqrt{-y}$，即 $x=-\arcsin\sqrt{-y}$. 反函数为 $y=-\arcsin\sqrt{-x}$，$-1\leqslant x<0$.

综上，$y=\begin{cases}\arcsin\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -\arcsin\sqrt{-x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$为所求的反函数.

指出 由$y=f(x)$解出 $x=g(y)$，则$y=g(x)$为 $y=f(x)$的反函数. 几何上，直接函数$y=f(x)$与反函数 $y=g(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称，而直接函数$y=f(x)$与反函数 $x=g(y)$是同一图形.

1.2.2 函数几种特性

(1) **有界性**：给出$y=f(x)$，$x\in D$，若存在 $M>0$ 使$|f(x)|\leqslant M$，$x\in D$，则说于 D 上$f(x)$是有界的.

(2) **单调性**：若对(a,b)中任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称$f(x)$在(a,b)内是单调增加（或单调减少）.

(3) **奇偶性**：$f(x)$在$(-a,a)$内有定义，若对$(-a,a)$内任一点 x 都有$f(-x)=-f(x)$（或 $f(-x)=f(x)$），则称$f(x)$是奇函数（或偶函数）.

(4) **周期性**：$y=f(x)$，$x\in D$，若存在非零数 T，对任意的 $x\in D$ 都有 $x+T\in D$ 且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$是 D 上的周期函数，T 称为$f(x)$的周期.

例 1.13 判别函数$f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解 因为$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\lg\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以，$f(x)=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

指出 奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.而定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数 $f(x)$可以表示为一个奇函数$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$和一个偶函数$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$的和.

例 1.14 求证$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$是非周期函数.

分析 我们可以从周期函数定义出发来证明这一题，即找到一个非零常数 T，验证对定义域内任意的 x 都有$f(x+T)=f(x)$成立．否则就是非周期函数.

我们也可以从“周期函数图形是周而复始变化的”这一图像特征出发来证明这题.

证 （反证法）假设存在常数 $T\neq0$，使 $\sin\dfrac{1}{x+T}=\sin\dfrac{1}{x}$，则

$$\sin\frac{1}{x+T}-\sin\frac{1}{x}=-2\sin\frac{T}{2x(x+T)}\cos\frac{2x+T}{2x(x+T)}=0$$

若$\sin\dfrac{T}{2x(x+T)}=0$，则$\dfrac{T}{2x(x+T)}=k\pi$，周期$T=T(x)$随 x 而异，不是常数.

若$\cos\dfrac{2x+T}{2x(x+T)}=0$，则$\dfrac{2x+T}{2x(x+T)}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$.可见 $T=T(x)$，这与已知 T 是一个确定的常数矛盾.

因此$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$不是周期函数.

方法二 令 $\sin\dfrac{1}{x}=0$,则 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$,$n=\pm1,\pm2,\cdots$是此函数的零点.注意到相邻两零点的距离$|x_{n+1}-x_n|=\left|\dfrac{1}{(n+1)\pi}-\dfrac{1}{n\pi}\right|=\dfrac{1}{n(n+1)\pi}\to0,n\to\infty$.

可见,函数的零点不是周期分布的,所以 $y=\sin\dfrac{1}{x}$不是周期函数.

指出 通常,$f(x)$的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$成立的最小正数 T（如果它存在的话）.

例 1.15 设$y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$的图形关于直线 $x=a$ 与$x=b(a<b)$均对称．求证$y=f(x)$为周期函数.

证 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，由条件知$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$.

故有
$$\begin{aligned}f(x)&=f(a-(a-x))=f(a+(a-x))=f(2a-x)\\&=f(b-(b+x-2a))=f(b+(b+x-2a))=f(x+2(b-a))\end{aligned}$$
因此，$f(x)$是周期 $T=2(b-a)$的周期函数.

例 1.16　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调上升且 $f[f(x)]=x$，求证 $f(x)=x$.

证　(反证法) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调上升且 $f[f(x)]=x$，但 $f(x)\neq x$，则存在 x_1，有$f(x_1)=x_0\neq x_1$.

不妨设 $x_1>x_0$，由严格单调上升的定义知$f(x_1)>f(x_0)$. 于是

$$x_1=f[f(x_1)]=f(x_0)<f(x_1)=x_0$$

与 $x_1>x_0$ 矛盾. 所以$f(x)=x$.

例 1.17　求证$f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

证　因为$(1-x^2)^2\geqslant 0$，即 $1+x^4\geqslant 2x^2$.

所以，$0<f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{x^2}{1+x^4}\leqslant 1+\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{3}{2}, x\neq 0$，而 $f(0)=1$.

综上，在$(-\infty,+\infty)$内有 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{3}{2}$. 由定义知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$，内是有界的.

1.2.3　初等函数

1. 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等六类函数统称基本初等函数.

基本初等函数或它们的和与积构成的函数称为**简单函数**.

2. 复合函数

设$y=f(u)$的定义域为 D，$u=\varphi(x)$的定义域为 X，值域为 U. 若 $U\subseteq D$，则称

$$y=f[\varphi(x)], x\in X$$

是由 f 与 φ 复合而成的复合函数.

3. 初等函数

由六类基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算得到的函数，称为**初等函数**.

例 1.18　双曲正弦函数 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$是初等函数，它的反函数是

$$y=\mathrm{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

双曲余弦函数 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$是初等函数，它的反函数是

$$y=\mathrm{arch}x=\pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\ x\geqslant 1$$

例 1.19　将复合函数 $y=x^{x^x}$分解成简单函数.

解　$y=x^{x^x}=e^{x^x\ln x}\triangleq e^u$

$u=x^x\ln x=e^{x\ln x}\ln x\triangleq e^v\ln x$

$v=x\ln x$

例 1.20　将 $y=\sin^3(1+2x)+2^{\arctan\sqrt{x}}$分解为简单函数.

解　$y=u^3+2^v$

$u=\sin t$，$v=\arctan s$

$t=1+2x$，$s=\sqrt{x}$

注　应能够熟练地将复合函数分解为简单函数.

例 1.21　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$. 求函数 $\varphi(x)$ 并写出其定义域.

解　$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，$\varphi(x)\geqslant 0$

于是，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-x\geqslant 1\\1>x\end{cases}\Rightarrow x\leqslant 0$，所以$\varphi(x)$的定义域为 $x\leqslant 0$.

例 1.22　设$\varphi(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1\\0,|x|>1\end{cases}$，$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2,|x|\leqslant 1\\2,|x|>1\end{cases}$，求$\psi(\varphi(x))$.

解　$$\psi(\varphi(x))=\begin{cases}2-\varphi^2(x),|\varphi(x)|\leqslant 1\\2,|\varphi(x)|>1\end{cases}=2-\varphi^2(x),|\varphi(x)|\leqslant 1$$

$$=\begin{cases}2-1,\ |x|\leqslant 1\\2-0,\ |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1,\ |x|\leqslant 1\\2,\ |x|>1\end{cases}$$

1.2.4　函数作图

如能作出函数的图形，那么对函数的了解便一目了然. 中学里曾经介绍过平移、伸缩、叠加、描点等作图方法. 这里指出：务必熟悉常值函数($y=c$)、幂函数($y=x^a$)、指数函数($y=a^x$)、对数函数($y=\log_a x$)、三角函数（$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$)、反三角函数（$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$）等六类基本初等函数的图形. 在此基础上，如能进一步对函数表达式作性质上的探讨，再结合坐标系的转换及描点法，将有助于在更广的范围内更准确地作出函数的图形.

应熟悉本书附录 G 中的常用曲线的图形及方程.

例 1.23　作函数$y=\arccos(\cos x)$的图形.

解　定义域：$(-\infty,+\infty)$. 周期性：$T=2\pi$. 奇偶性：偶函数.

在$[0,\pi]$上，$y=\arccos(\cos x)=x$. 这样先在$[0,\pi]$上作出 $y=x$，利用偶函数图形关于 y 轴对称，作出$[-\pi,0]$上的图形，再利用周期性将$[-\pi,\pi]$上的图形延拓至$(-\infty,+\infty)$. 完成作图，如图 1.1 所示.

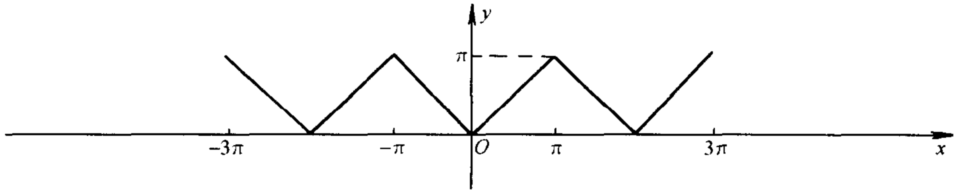

图 1.1

例 1.24 作偏心圆 $r=a\sin\theta(a>0)$ 的图形.

解 尽管可以在极坐标中描点作出其图形，但若将 $r=a\sin\theta$，即 $r^2=ar\sin\theta$ 转化成直角坐标，则为 $x^2+y^2=ay$，即 $x^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}$，这是直角坐标系中的圆. 如图 1.2 所示.

例 1.25 作出心形线 $r=1+\cos\theta$ 的图形.

解 列表

θ	0	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	π	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	2π
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
r	2	↘	1	↘	0	↗	1	↗	2

利用 $\cos\theta$ 的单调性结合描点作图得心形线图形，如图 1.3 所示.

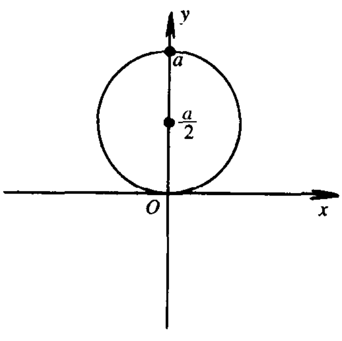

图 1.2

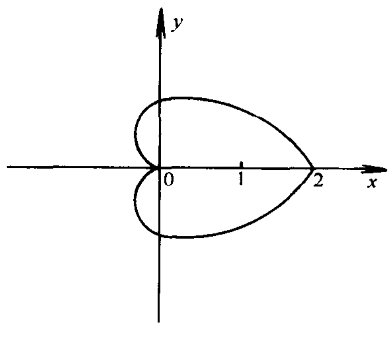

图 1.3

例 1.26 作出双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 的图形.

解 由于代入 $(-x,y)$ 方程不变，所以图形关于 y 轴对称；由于代入 $(x,-y)$ 方程不变，所以图形关于 x 轴对称. 这样可先作出第一象限图形.

由于在直角坐标系中难以作出方程的图形，所以将其转化为极坐标 $r=\sqrt{\cos 2\theta}$，列表如下：

θ	0	$(0,\frac{\pi}{8})$	$\frac{\pi}{8}$	$(\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{4})$	$\frac{\pi}{4}$
$\cos 2\theta$	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0
r	1	↘	$2^{-\frac{1}{4}}$	↘	0

利用单调性及描点作出第一象限图形，再利用对称性作出其他三个象限的图形. 得双纽线图形，如图 1.4 所示.

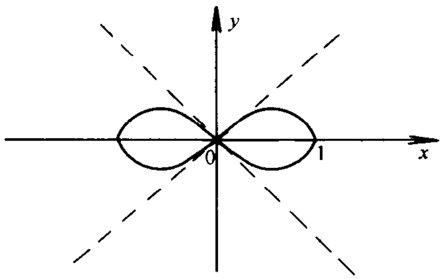

图 1.4

1.3 极限

1.3.1 基本概念——极限、无穷小与无穷大、无穷小比较

定义 1.3 （数列极限）设有数列$\{a_n\}$和常数 l，若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有$|a_n-l|<\varepsilon$，则称 l 为数列$\{a_n\}$的极限，或称数列$\{a_n\}$收敛于 l，记作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$. 若数列极限不存在，则称该数列发散.

定义 1.4 （函数极限）

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限

$f(a-0)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $a-\delta<x<a$ 时,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限

$f(a+0)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $a<x<a+\delta$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

定义 1.5 若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，则称$x\to a$ 时 $f(x)$为**无穷小**.

若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则称$x\to a$ 时 $f(x)$为**无穷大**.

($\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall G>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|>G$)

同一过程中的两个无穷小，虽然都以零为极限，但它们趋于零的速度可能大不相同.

定义 1.6（无穷小比较）　设$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$

（1）若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是 α 的高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$，$x\to a$.

（2）若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=A\neq0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小，记为$\beta=O(\alpha)$，$x\to a$.
特别地，当 $A=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记为 $\beta\sim\alpha$，$x\to a$.

（3）若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 $x\to a$ 时，β 是 α 的低阶无穷小.

（4）若$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha^k}=l\neq0$，$k>0$，则称 $x\to a$ 时，β 是 α 的 k 阶无穷小.

以上的 a 可为 0、有限数，也可为∞. 以上的极限也可为单侧.

1.3.2 基本理论

<table>
<tr><th></th><th>数列</th><th>函数</th></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td>（有界性）若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界：$\exists M>0$ 使$|a_n|\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$</td><td>（局部有界性）若$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，则在 a 的某去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$内$|f(x)|\leqslant M$</td></tr>
<tr><td colspan="2">（惟一性）若 $\{a_n\}$ 收敛（或$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在），则极限值惟一</td></tr>
<tr><td colspan="2">（保号性）若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$，则$\exists\delta>0$在$\mathring{U}(a,\delta)$内恒有$f(x)>0$
⇒若在$\mathring{U}(a,\delta)$内$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则$A\geqslant0$
⇒（不等式性质）设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$
1）若$A>B$，则在$\mathring{U}(a,\delta)$内$f(x)>g(x)$
2）若在$\mathring{U}(a,\delta)$内有$f(x)\geqslant g(x)$，则$A\geqslant B$
若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A>0$，则$\exists N>0$，当$n>N$时有$a_n>0$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">存在定理</td><td>单调有界数列必有极限</td><td>/</td></tr>
<tr><td>/</td><td>$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">夹逼定理　若$\exists\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，有$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$</td></tr>
<tr><td>若 $\{a_n\}$ 收敛于 A，则它的任一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛于 A
⇒若有一个子列发散，则数列 $\{a_n\}$ 也发散
⇒若有两个子列收敛于不同极限，则 $\{a_n\}$ 也发散</td><td>$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\Leftrightarrow$对于任何收敛于 a 的点列 $\{x_n\}$（$x_n\neq a$，$n=1,2,\cdots$），有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$
⇒若$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则$\lim\limits_{x\to a}f(x)$不存在，其中 $n\to\infty$ 时 $x_n\to a$，$y_n\to a$</td></tr>
</table>