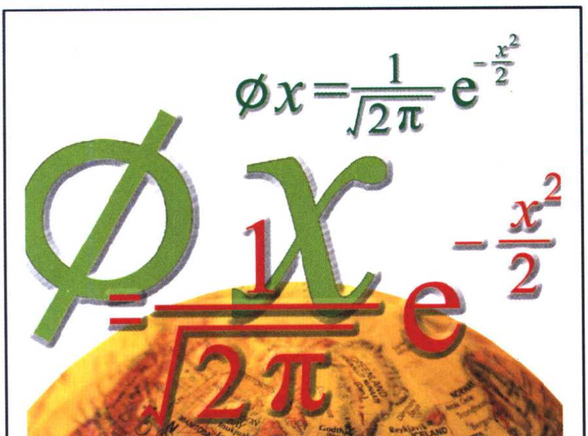
高等学校数学教材系列丛书

概率论与数理统计
——题型·方法



- 解题方法
- 典型例题
- 综合练习
- 模拟考题
- 考研题型

主编 任小红 副主编 梁晓毅 杨战民

西安电子科技大学出版社 http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

概率论与数理统计
——题型·方法

主　编　任小红
副主编　梁晓毅　杨战民

西安电子科技大学出版社
2003

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计——题型·方法/任小红编著.
—西安：西安电子科技大学出版社，2003.7
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 7-5606-1252-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.任…　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材　②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044028 号

责任编辑　戚文艳
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)8242885　8201467　　邮　编　710071
http://www.xduph.com
E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印　　刷　西安兰翔印刷厂
版　　次　2003 年 7 月第 1 版　2003 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 12.6875
字　　数　310 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　15.00 元
ISBN 7-5606-1252-0/O·0063

XDUP　1523001—1

【内容简介】 本书是按照“高等院校工科数学教材编写会议”确定的编写大纲和硕士研究生入学考试大纲，并结合工科院校大学生学习“概率论与数理统计”课程的具体情况编写的. 本书对现行的《概率论与数理统计》教材中的每一章内容作了简明扼要的归纳综合；精选的例题力求做到具有启发性、典型性和针对性. 各章的结构为基本内容、基本要求、基本解题方法、典型例题精解、综合练习题与答案五部分，书后附有 1993 年～2003 年硕士研究生入学考试（概率论与数理统计部分）试题与解答以及两套模拟试题与答案.

本书可作为大学本科生学习和考研复习的辅导教材，也可供教师与科技人员参考.

前　言

“线性代数”、“概率论与数理统计”和“复变函数与积分变换”是理工科高等院校除《高等数学》以外的三门重点数学课程，是许多专业课的理论基础，对后继专业课起着举足轻重的作用．此外，也是许多专业的硕士研究生入学考试的必考内容．因此，学好这三门课对在校的大学生是非常重要的．这三门课程都具有理论性较强，较为抽象，方法较难掌握的特点．为此，我们组织了多年在高校担任这三门课的教学工作并具有丰富教学经验的教师编写了这套高等院校工程数学课程系列辅导教材，以满足广大在校学生及自学人员的需求．

本书是这套系列教材中的第二册．全书共分9章：第一章为随机事件及其概率；第二章为随机变量及其分布；第三章为随机变量的数字特征；第四章为多维随机变量；第五章为大数定律与中心极限定理；第六章为样本及抽样分布；第七章为参数估计；第八章为假设检验；第九章为方差分析与回归分析简介．每章由基本内容，基本要求、基本解题方法、典型例题精解与综合练习题五部分组成．基本内容简明扼要，重点突出；基本要求体现了教学大纲的要求和考研范围；基本解题方法对本章的题型进行了归类并总结了解题方法和思路；典型例题精解部分所选的例题题型灵活，覆盖面广，难度由浅入深，并注重综合性，对所选例题不仅给出解答而且对有些题还予以详细分析，指出解题思路和技巧，旨在提高读者的分析综合能力；综合练习题部分所选题型丰

富多样，可使读者深入理解基本理论和掌握解题的方法和技巧.

本书的附录部分给出了 1993 年～2003 年全国硕士研究生入学考试“概率论与数理统计”试题与解答以及两套模拟试题. 书中的综合练习题与模拟试题均附有答案.

本书由陕西科技大学理学院数学教研室任小红、梁晓毅、杨战民编写，其中第七、八、九章及附录由任小红编写；第四、五、六章由梁晓毅编写；第一、二、三章由杨战民编写. 全书由任小红统稿.

陕西科技大学数学教研室的白云霄、王晓琴、谭宏武、王莉、李莉、王玉萍、彭卫丽等以及西安电子科技大学出版社在本书的编写过程中给予了大力支持，在此一并表示由衷的谢意.

由于编写时间仓促，水平有限，不妥之处敬请同行们提出宝贵意见.

编　者

2003 年 5 月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

1.1　基 本 内 容

1. 随机事件

1）随机试验

满足下列三个条件的试验称为随机试验，常用 E 表示随机试验.

（1）在相同条件下可以重复进行.

（2）试验的结果不止一个，所有结果事先都能明确地指出来.

（3）每次试验之前，无法预料会出现哪种结果.

2）随机事件

在随机试验中可能出现的结果称为随机事件，简称为事件，常用 A，B，C，…表示.

（1）基本事件即最简单的不能再分的单个事件.

（2）复合事件即由多个基本事件构成的事件.

（3）必然发生的事件称为必然事件(Ω)；不可能发生的事件称为不可能事件($\varnothing$).

3）样本空间

基本事件又称为样本点；样本点的全体称为样本空间(Ω).随机事件即为样本空间的一个子集.

4）事件之间的关系及运算

（1）子事件：若事件 A 发生，导致事件 B 必发生，则称事件 A 为事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

（2）相等：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

（3）和事件：事件 A 与事件 B 至少有一个发生，这一事件称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$.

（4）积事件：事件 A 与事件 B 同时发生，这一事件称为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB.

（5）差事件：事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为 A 与 B 的差事件，记为 $A-B(=A\overline{B}=A-AB)$.

（6）逆事件(对立事件)：事件 A 不发生称为 A 的逆事件，记为 $\overline{A}(=\Omega-A)$.

（7）互斥事件(互不相容事件)：事件 A 与事件 B 不同时发生称为 A 与 B 互斥，即 $AB=\varnothing$. 若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互斥，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为互斥事件组. 若 A_1，A_2，…，A_n 互斥，且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$，则称 A_1，A_2，…，A_n 为完备事件组.

2. 概率的定义

1）统计定义

在 n 次试验中事件 A 发生了 k 次，则称 $\dfrac{k}{n}$ 为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$. 而当 n 不断增大时，A 的频率 $f_n(A)$ 会趋于稳定，称频率 $f_n(A)$ 的稳定值 p 为事件 A 的概率，记 $P(A)=p$.

2）古典定义

若随机试验满足：① 有限性，即样本空间中基本事件的个数

有限；② 等可能性，即基本事件发生的可能性相等，则称之为古典概型，此时，若 Ω 中有 n 个基本事件，A 中有 m 个基本事件，则事件 A 的概率为 $P(A)=m/n$.

3）几何概型

若试验的样本空间为点集 G，G 的量度(长度、面积或体积)为 mG，随机点落入 G 的子集 G' 的可能性与 G' 的量度 mG' 成正比，则"点落在 G' 内"的事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{mG'}{mG}$.

4）公理化定义

设试验的样本空间为 Ω，$\forall\ A\subset\Omega$，$P(A)\in\mathbf{R}$，若满足下述三个公理：① 非负性，即 $P(A)\geqslant 0$；② 规范性，即 $P(\Omega)=1$；③ 可加性，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 互不相容，有 $P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

5）性质与公式

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) $P(\varnothing)=0$.

(3) $P(A)+P(\overline{A})=1$.

(4) 若 $A\subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$.

(5) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

(6) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，若 A 与 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

3. 条件概率、事件的独立性

1）条件概率

设 A、B 为二事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为事

件 B 在事件 A 发生的条件下的条件概率. 若 $P(B)>0$，则 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$.

2）乘法公式

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

3）全概率公式与 Bayes 公式

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组，则

(1) $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$ 为全概率公式.

(2) $P(A_j|B)=\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}, j=1, 2, \cdots, n$

为 Bayes 公式(贝叶斯公式或逆概率公式).

4）事件的独立性

若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与事件 B 相互独立. n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若 $\forall i\neq j$，A_i 与 A_j 独立，则称这 n 个事件两两相互独立；若 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，$2\leqslant k\leqslant n$ 均成立，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

注 ① 事件 A 与事件 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 亦相互独立.

② $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两相互独立是不同的概念，前者蕴涵后者，但反之不真.

③ A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)(P(A)>0)$.

④ $P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)\quad(P(A)>0)$；

$$P(A_1+A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B).$$

5）贝努利概型

在相同条件下将同一试验重复做 n 次，且这 n 次试验是相互独立的，每次试验的结果只有两个：A、$\overline{A}$，这样的试验称为 n 重贝努利概型(独立重复试验序列)．在贝努利概型中，设事件 A 发生的概率为 $P(0<p<1)$，则 n 次试验中 A 发生了 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$. 这个公式称为二项概率公式.

1.2　基 本 要 求

(1) 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系与运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，学会计算古典型概率，掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes) 公式.

(3) 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

注　考研题数学三、数学四对几何型概率提出了明确的要求.

1.3　基本解题方法

1. 事件的表示

事件的表示方法有：

(1) 以适当的形式表示试验的样本点、样本空间及事件.

(2) 用事件的关系和运算表示事件.

(3) 化简、证明与验证事件的关系.

2. 求事件的概率

1) 直接计算

(1) 几何概型计算概率:

① 建立问题的数学模型;

② 计算出样本空间和事件的度量 D 和 d;

③ 事件的概率为 d/D.

(2) 古典概型的概率计算:

① 选取适当的样本空间 Ω, 使它满足有限性和等可能性的要求, 且事件 A 为 Ω 的一个子集;

② 计算样本点总数 n 和事件 A 包含的基本事件个数 k;

③ $P(A) = k/n$.

注　计算 Ω 与 A 中基本事件数 n 与 k, 通常采用的方法是排列与组合.

2) 间接计算

(1) 根据问题的描述, 选择恰当的概率公式.

(2) 简化概率计算的复杂性, 注意利用事件的互斥性和独立性.

(3) 计算出所求概率.

常用于计算的公式和方法有:

(1) 逆事件概率公式.

(2) 加法公式.

(3) 条件概率公式与乘法公式.

(4) 全概率公式与逆概率公式.

(5) 建立差分或微分方程.

1.4　典型例题精解

【例 1-1】　设 A、B、C 是同一试验的三个事件，化简下列各式：

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$.

(2) $(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$.

分析　利用事件的运算化简.

解　(1)

$$(A\cup B)(B\cup C)=(B\cup A)(B\cup C)$$
$$=B\cup AC$$

(2)
$$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})$$
$$=(\overline{A}A\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})$$
$$=B\overline{B}=\varnothing$$

【例 1-2】　如果事件 A 与事件 B 是对立事件，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的关系为______.

分析　由于 A 与 B 是对立事件，有 $AB=\varnothing$，$A\cup B=\Omega$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}=\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}=\overline{\Omega}=\varnothing$，因此 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的关系仍为对立事件.

【例 1-3】　设 A、B、C 是三个事件，用 A、B、C 表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生.

(2) A、B、C 至少有一个发生.

(3) A、B、C 至少有一个不发生.

分析　利用事件间的关系与运算，将已知事件 A、B、C 恰当地联系起来.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$.

(2) $A+B+C$

或 $\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$

或 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$

(3) $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$

或 $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}$

【例 1-4】 设事件 A 与事件 B 互斥，$P(A)>0$，$P(B)>0$，则下列结论中一定成立的有(　　).

(A) A、B 为对立事件

(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互斥

(C) A 与 B 不独立

(D) A 与 B 相互独立

分析 A 与 B 互斥，即 $AB=\varnothing$，但 $A\cup B=\Omega$ 不一定成立，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}=\varnothing$ 也不一定成立，因此，选项(A)与(B)均不能选. 又因 $P(AB)=P(\varnothing)=0$，而 $P(A)P(B)>0$，所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，即 A 与 B 不独立. 因此答案应选(C).

【例 1-5】 设 A，B 是两个事件，证明：

$$1-P(\overline{A})-P(\overline{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

分析 利用关系式：

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

证明 因为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

而 $P(AB)\geqslant 0$，所以

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

又因为 $$AB\subset A\subset A\cup B$$

所以 $$P(AB)\leqslant P(A\cup B)$$