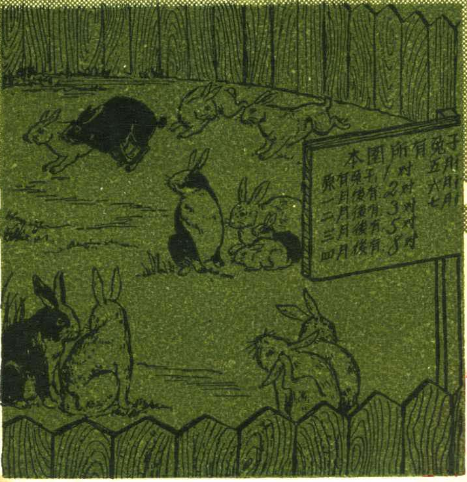
蘇聯青年科學叢書

斐波那契數

伏洛別也夫著



中国青年出版社

蘇聯青年科學叢書

斐波那契數

伏洛別也夫著
高 [illegible] 譯

中国青年出版社
一九五四年 · 北京

書號 306
斐波那契數

著　者	蘇聯　伏洛別也夫
譯　者	高　　徹
出版者	青年·開明聯合組織 中國青年出版社 北京東四12條老君堂11號
總經售	新　華　書　店
印刷者	光明日報印刷廠

字數 31,000　　一九五三年二月第一版
印數 10,001—15,000　　一九五四年五月第二次印刷

定價 1,800 元

內 容 提 要

本書以斐波那契數(一種民間數學)作基礎,詳盡地敍述數論方面一些基本問題,並且講到它和連分數以及幾何中一些問題的關係。只要對於數學有些基本知識的讀者,就可以看得懂這本書,並且會從這裏獲得一定程度的幫助。

Н. Н. ВОРОБЬЕВ
ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ
ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1951

原　序

在初等數學中，有許多困難的同時也是有趣味的問題，它們並沒有被冠以任何名稱，就性質來說倒寧可看作是一種'民間數學'. 這類問題散見於流傳較廣的通俗讀物或純粹包含趣味數學的讀物中，並且人們常常很難斷言這一個或那一個問題最早是在甚麼文獻裏出現的.

這些問題常常以種種不同的形態出現而流傳着；有時，好幾個問題合成一個比較更複雜的問題；反過來，有時一個問題又分解成好幾個比較簡單的問題；總之，常常難以說明，甚麼地方一個問題結束了而甚麼地方另一個問題又開始了. 人們可以十分正確地這樣來看，就是說每一個這類問題都牽涉到一些粗淺的數學理論，這些粗淺的數學理論的歷史、問題和方法，是和'高深數學'的歷史、問題和方法有着密切聯系的.

斐波那契數的理論就是這類粗淺的數學理論之一. 從有名的兎子問題開始，經過了七百五十年的攸久歷史，斐波那契數至今仍然是初等數學中非常吸引人的一章. 和斐波那契數有關的問題在許多通俗數學讀物中出現，在學校數學小組中常被作爲教材而研討，在數學競賽中常被提出.

這本小册子是 1949-1950 學年，列寧格勒國立列寧勳章

A. A. 日丹諾夫大學數學小組學習材料的內容. 針對着小組參加者的願望,學習材料偏重於數論方面的問題;這本小册子便把這些問題作了比較詳盡的發揮.

本書的對象是 9-10 年級的學生. 極限的觀念僅僅在第三章第 7、第 8 節出現. 對這個觀念還不能充分掌握的讀者,可以毫無影響地略去這幾節不讀而了解後面的內容. 對於二項式係數(第一章第 8 節)以及三角法(第四章第 2、第 3 節),情形也是和對於極限一樣. 書中所陳述的關於除法及連分數的初步理論從未超過學校課程範圍,並且是沒有假定讀者已經學過.

對於循環級數的結構有興趣的讀者,可以參照 A. И. 馬庫希維契所寫的、篇幅不多而內容豐富的小册子'循環級數'*(國家技術理論書籍出版局, 1950). 同樣,對於數論方面的現象有興趣的讀者,可以參考這一門學問裏比較高深的著作.

Н. Н. 伏洛別也夫

* 我國已有朱美琨譯本.——譯者註

目 次

前　　言

1. 上古歷史中很富於出色的數學家們的史實. 許多上古時代數學的成就,到今天仍然足以使人們對於當時的那些創作者起高度的崇敬;歐幾里德、阿基米德、蓋郎的名字更是爲任何有知識的人所熟悉.

至於中古時代的數學,情形就不同了. 除了生活在十六世紀當中的維也德,在中學課程裏幾乎沒有提到一個中古時代數學家的名字,雖然他們是處在一個比較接近於我們所處的時代. 這並不是偶然的. 在這一個階段裏數學發展得非常緩慢,數學家也非常少.

對於我們比較有興趣的是一本著作'Liber abacci'('算盤書'). 這書是著名意大利數學家比薩的萊翁那度寫的,他的另一個名字叫斐波那契(Fibonacci 是 filius Bonacci 的簡寫,意思是波那契之子). 這本書最初寫於 1202 年,流傳到我們現在的是另一個手本,完成於 1228 年.

'Liber abacci' 是一部內容極爲豐富的著作,幾乎包含了當時算術及代數知識的全部,並且對於後幾個世紀西歐的數學發展起過重要的作用. 特別是因爲這本書的緣故,使歐洲人認識了印度(阿剌伯)字碼. 'Liber abacci' 中所闡述的若

干問題組成了這本小册子很主要的部分.

在 1228 年那個手本的第 123 -124 頁有這樣的問題:

'由一對兔子開始,一年後可以繁殖成多少對兔子?'

'某人把一對兔子放在某處,四面用牆圍起來,目的在觀察,由這一對兔子開始,經過一年的繁殖,總共可以得到多少對兔子. 假設兔子的生殖力是這樣的:每一對兔子每一個月可以生一對兔子,並且兔子在出生兩個月以後就具有生殖後代的能力. 在第一個月裏第一對兔子生了一對後代,因此在第一個月兔子的總數是兩對;在這兩對中,只有第一對能夠在下一個月裏生一對兔子,所以在第二個月裏一共得到 3 對兔子;其中兩對可以在下個月裏從事生殖,所以在第三個月裏有兩對兔子出生,在這個月裏兔子數目增加到 5 對;其中 3 對在下個月可以產生後代,所以在第四個月裏增加到 8 對;其中 5 對可以在第五個月裏產生 5 對後代,再加上上月的 8 對一共是13 對;其中5對還不能在下個月生殖,但剩下的8對可以生殖,所以在第六個月裏一共得到 21 對兔子;再加上第七個月裏出生的13 對,一共得到34 對;再加上第八個月裏出生的 21 對,得到這個月的總數是 55 對;加上第九個月出生的 34 對,一

兔子的對數
1
第一個月
2
第二個月
3
第三個月
5
第四個月
8
第五個月
13
第六個月
21
第七個月
34
第八個月
55
第九個月
89
第十個月
144
第十一個月
233
第十二個月
377

圖 1

共得到 89 對；加上第十個月出生的 55 對，得到 144 對；再加上第十一個月出生的 89 對，得到這個月裏的總數是 233 對；再加上第十二個月出生的 144 對，得到 377 對；這就是從一對兔子開始，經過一年的繁殖所得到的兔子的總對數．事實上，你可以看出來，我們究竟在這頁的邊上*作了些甚麼；那就是，我們將第一個數加上第二個數，也就是 1 同 2；第二個加上第三個；第三個加上第四個；第四個加上第五個；這樣，一個加上下一個，一直到第十一個數加上第十二個數爲止，也就是 144 加上 233；這樣我們得到了兔子的總對數 377；這個手續一直可以推算下去直到無盡的月數.’

2. 我們現在從兔子轉移到數上來，考慮下面的級數：

$$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n, \tag{1}$$

其中每一項都等於它的前兩項的和，就是，當 $n>2$ 時

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{2}$$

凡是一種級數，它的每一項都可以表示爲它前面的項的函數的，稱爲**循環級數**，這種級數在數學裏常常出現．每一項由它前面各項來決定的這種逐次推進的手續稱爲**循環手續**．方程式(2)稱爲**循環方程式**．關於循環級數一般理論的初步，讀者可以參考前面已經提到過的馬庫希維契所寫的小册子（見第iv頁）．

首先注意，單單由條件(2)並不能算出級數(1)的各項．

* 見圖 1．斐波那契把所有的圖表和計算都寫在頁的邊上．

我們可以找到許多滿足條件(2)而各不相同的級數，例如：

$$2,5,7,12,19,31,50,\cdots\cdots,$$

$$1,3,4,7,11,18,29,\cdots\cdots,$$

$$-1,-5,-6,-11,-17,\cdots\cdots$$

等等.

由此可知，要想唯一地決定級數(1)，單單條件(2)是不够的，我們還得找些條件來補充. 例如，我們可以先決定級數(1)的最初幾項. 究竟先要決定多少最初項才能够依靠條件(2)而將以後所有的項都算出來呢？

單由條件(2)不能決定級數(1)的各項這一個事實，從這樣的理由就已經可以明瞭了；就是，並非級數(1)的每一項前面都有兩項，例如第一項的前面就再沒有項了，而第二項前面僅有一項. 由此可知，要完全決定級數(1)，除了條件(2)以外，必須先決定最初的兩項.

要決定級數(1)，顯然這些條件也已經充分了. 事實上，u_3 可以作爲 u_1 同 u_2 的和而計算出來；u_4 是 u_2 同方才算出的 u_3 之和；u_5 是方才算出的 u_3 同 u_4 之和等等‘一直無盡地推演到任何項’. 由級數的相鄰兩項推出緊隨着的後一項這種方式，使我們可以推算出級數的任何項.

3. 現在我們轉到級數(1)的一個重要的特別情形，這時 $u_1=1,u_2=1$. 如同上面所指出，由條件(2)就可算出級數中所有的各項.

容易看出，在這個特別情形級數的最前面 14 項是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,$$

這些數正是前面兔子問題裏所出現的。為了對問題創作者表示敬意，凡是級數(1)而適合 $u_1=u_2=1$ 的，稱爲**斐波那契級數**；它的每一項稱爲**斐波那契數**.

斐波那契數具有很多有趣並且重要的性質，本書的目的就是從事於闡發這些性質.

一 斐波那契數的簡單性質

1. 首先讓我們來求最初 n 個斐波那契數的和. 那就是證明

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=u_{n+2}-1. \tag{3}$$

事實上，我們有:

$$u_1=u_3-u_2,\qquad u_2=u_4-u_3,$$

$$u_3=u_5-u_4,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_{n-1}=u_{n+1}-u_n,\quad u_n=u_{n+2}-u_{n+1}.$$

將上列各等式兩邊加起來，就得到

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=u_{n+2}-u_2,$$

再想到 $u_2=1$，就得所要的結果.

2. 指標爲奇數的斐波那契數的和是

$$u_1+u_3+u_5+\cdots\cdots+u_{2n-1}=u_{2n}. \tag{4}$$

爲了證明這個等式，先寫出

$$u_1=u_2,\qquad u_3=u_4-u_2,$$

$$u_5=u_6-u_4,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_{2n-1}=u_{2n}-u_{2n-2}.$$

把這些等式兩邊加起來,就得到所要的結果.

3. 指標爲偶數的斐波那契數的和可以表成如下形式:

$$u_2+u_4+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+1}-1. \tag{5}$$

由第1節,我們知道

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+2}-1;$$

由此式的兩邊分別減去等式(4)的兩邊就得到

$$u_2+u_4+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+1}-1,$$

這正是我們所要的結果.

更進一步,由(4)的兩邊分別減去(5)的兩邊,得到

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}=-u_{2n-1}+1. \tag{6}$$

在(6)的兩邊各加上 u_{2n+1}:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots-u_{2n}+u_{2n+1}=u_{2n}+1. \tag{7}$$

將(6)與(7)合併起來看,就得到正負相間的斐波那契數的求和公式:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1. \tag{8}$$

4. 公式(3)及(4)是把一串簡明的等式兩邊分別加起來得到的. 這個方法的應用,更進一步的例子就是求最初 n 個斐波那契數的平方和:

$$u_1^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_n^2=u_nu_{n+1}. \tag{9}$$

我們注意

$$u_k u_{k+1}-u_{k-1}u_k=u_k(u_{k+1}-u_{k-1})=u_k^2.$$

將等式

$$u_1^2=u_1u_2,\qquad u_2^2=u_2u_3-u_1u_2,$$

$$u_3^2=u_3u_4-u_2u_3,\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_n^2=u_nu_{n+1}-u_{n-1}u_n$$

兩邊加起來就得到(9).

5. 許多關於斐波那契數之間的關係,以完全歸納法來證明,較為方便.

完全歸納法(也稱為數學歸納法)的要義可以照下面來敘述:為了要證明某一個和自然數關聯的命題,對於所有的自然數都成立,只要證明:

(1) 當該自然數為 1 時命題成立;

(2) 如果對於一個任意選擇的自然數 n 命題是成立的,則對於自然數 $n+1$ 命題也成立.

因此,以歸納法來證明某一個命題對於所有的自然數都成立,這個證明就包含着兩部分.

在第一部分(通常是比較簡單的)中,我們確定所要證明的命題對於 1 是成立的. 證明的這一部分有時被稱為**歸納的初段**. 在第二部分(通常是比較複雜的)中,是先假設了命題對於某一個任意(不固定的)自然數 n 為真,進而推出對於自然數 $n+1$ 命題也成立. 第二部分稱為**歸納的推演**;第二部分中的假設通常稱為**歸納法假設**.

對完全歸納法比較詳細的敘述,它的許多應用,以及它的各種不同的表現形式,讀者可以在 И. С. 索明斯基所寫的小册子'數學歸納法'*裏找到(這本小册子是'通俗數學講座'中的第三册,國家技術理論書籍出

* 我國已有高徹譯本. ——譯者註

版局 1950 年出版). 例如,歸納法有一種表現形式是'由 n 及 $n+1$ 推演到 $n+2$';這個變體在索明斯基的小冊子裏第 13 頁曾提到並且在第 20 頁問題 18 及 19 加以闡明.

讓我們用歸納法來證明下面的重要公式:

$$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}. \tag{10}$$

對 m 用歸納法來證明這個公式. $m=1$ 時這個公式取如下的形式:

$$u_{n+1}=u_{n-1}u_1+u_nu_2=u_{n-1}+u_n,$$

它的成立顯然可以看出. $m=2$ 時公式(10)也真,這是因爲

$$u_{n+2}=u_{n-1}u_2+u_nu_3=u_{n-1}+2u_n=u_{n-1}+u_n+u_n$$
$$=u_{n+1}+u_n.$$

歸納的初段是完成了. 至於歸納的推演,我們採用下面的形式:設公式(10)對於 $m=k$ 以及 $m=k+1$ 爲眞,求證它對於 $m=k+2$ 也成立.

因此,設已知 $$u_{n+k}=u_{n-1}u_k+u_nu_{k+1}$$

以及 $$u_{n+k+1}=u_{n-1}u_{k+1}+u_nu_{k+2}.$$

將以上兩個等式的兩邊分別加起來,我們得到

$$u_{n+k+2}=u_{n-1}u_{k+2}+u_nu_{k+3},$$

這正是所要證的結果.

在公式(10)中取 $m=n$,我們得到

$$u_{2n}=u_{n-1}u_n+u_nu_{n+1},$$

或 $$u_{2n}=u_n(u_{n-1}+u_{n+1}) \tag{11}$$

由這裏就看出來 u_{2n} 可以被 u_n 除盡. 在下一節我們將要證更廣一些的結果.

因爲
$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1},$$
所以公式(11)可以寫成
$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}),$$
或
$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2,$$
這就是說, 指標相差 2 的兩個斐波那契數, 它們平方的差仍然是一個斐波那契數.

類似的步驟(取 $m=2n$)可以用來證明
$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3.$$

6. 將來, 我們會要用到下面這個公式:
$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n. \tag{12}$$

對 n 用歸納法來證明這個公式. $n=1$ 時公式(12)取如下的形式:
$$u_2^2 = u_1 u_3 - 1,$$
這個顯然是對的.

現在設我們已經證明了公式(12) 對某一個數 n 是成立的. 在它的兩邊加上 $u_{n+1}u_{n+2}$. 我們得到
$$u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} = u_n u_{n+2} + u_{n+1}u_{n+2} + (-1)^n,$$
或
$$u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) = u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^n,$$
或
$$u_{n+1}u_{n+3} = u_{n+2}^2 + (-1)^n,$$
或
$$u_{n+2}^2 = u_{n+1}u_{n+3} + (-1)^{n+1}.$$

如此就把公式(12)對於任何 n 的情形都證明了.

7. 和以上所證明的關於斐波那契數的性質相類似的，有以下的性質:

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2,$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\cdots\cdots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1,$$

$$nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\cdots\cdots+2u_{n-1}+u_n$$
$$=u_{n+4}-(n+3).$$

這幾個公式的證明我們讓讀者自己去補足.

8. 斐波那契數和另一類更可注意的數——二項式係數——之間存在着一些關聯. 我們現在就來指明一些這類關係. 將二項式係數依照下列方式排成所謂巴斯噶三角形:

$$\begin{array}{llll}
C_0^0 & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

也就是

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$