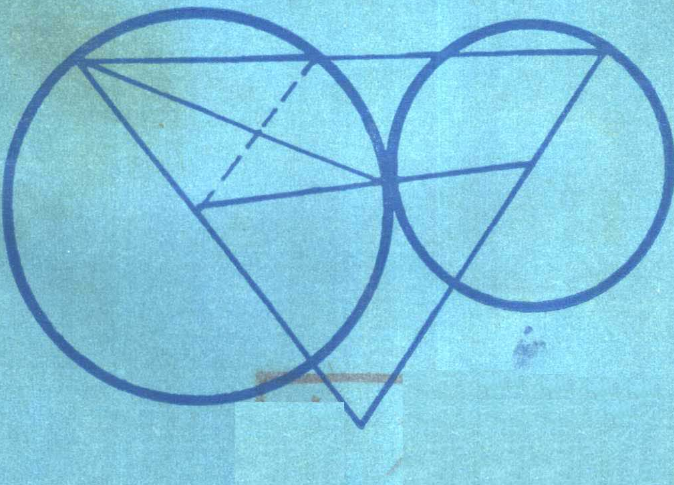
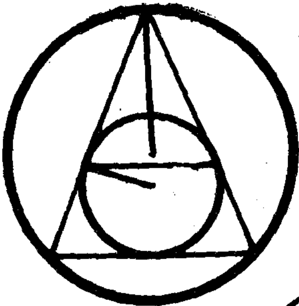
初中数学讲座

CHUZHONGSHUXUE
JIANGZUO



安徽教育出版社



初中数学讲座

chuzhong
shuxue
jiangzuo

责任编辑： 蒋業荣
封面设计： 应梦莺

初中数学讲座

赵世友等

安徽教育出版社出版

（合肥市跃进路1号）

安徽省新华书店发行 六安新华印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张：9 字数150,000

1984年4月第1版 1984年4月第1次印刷

印数1—37500

统一书号：7276·114 定价：0.68元

前言

为了配合学习初中数学的需要，使学生更好地掌握课本的主要内容，并为教师上好初中数学课提供一点参考资料，特编写这本《初中数学讲座》。

本书是以教学大纲为指导，把统编课本的基本内容列成二十个专题。各个专题着眼于解题方法的介绍，并对一些典型的数学题目，进行比较详细的分析，以揭示解题的基本思想与一般方法，指出解题的关键与规律性，目的在于使读者形成合理的思考方法，找出正确的解题途径，提高解题的技能和技巧。

本书中的专题内容，是经集体讨论后分头进行编写的。张家富、路捷合编第一、二、三、九、十、十一讲，宁为编写第四、五、六、七、八讲，赵世友编写第十二、十五、十七、十八讲，吴荣发编写第十三、十四、十六、十九、二十讲。书中的插图是唐朴章绘制的。

由于我们水平有限，加之时间仓促，错误在所难免，敬请读者批评指正。

编者

目　录

第一讲　绝对值与算术根…………………………………… 1

第二讲　因式分解…………………………………………… 13

第三讲　分式和根式的运算………………………………… 30

第四讲　一元二次方程根的判别式和韦达定理的应用………………………………………………… 47

第五讲　用换元法解一元方程……………………………… 57

第六讲　二元二次方程组…………………………………… 66

第七讲　怎样列方程解应用题……………………………… 76

第八讲　不等式组的一些应用……………………………… 90

第九讲　指数与对数的运算………………………………… 100

第十讲　二次函数…………………………………………… 116

第十一讲　解三角形………………………………………… 151

第十二讲　命题和证明……………………………………… 178

第十三讲　关于添辅助线的几种常用方法………………… 192

第十四讲　怎样证明线段相等或不等……………………… 207

第十五讲　怎样证明两角相等或不等……………………… 218

第十六讲　怎样证明两直线垂直或平行…………………… 231

第十七讲　关于线段和角的和差倍分的证明……………… 240

第十八讲　关于比例线段的证题…………………………… 250

第十九讲　怎样证明三点共线或四点共圆………………… 265

第二十讲　关于面积问题的证法…………………………… 274

第一讲　绝对值与算术根

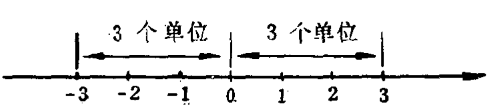
绝对值与算术根是中学数学中两个应用广泛的概念，贯穿于教材的始终。深刻理解和掌握这两个概念是很有必要的。

一、绝对值

(一)绝对值的概念

1．绝对值的定义：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。

2．绝对值的几何意义：一个数的绝对值是指在数轴上表示这个数的点离开原点的长度。长度是用正数或零来表示的，因此，任何实数的绝对值都是一个非负数。例如：在数轴上表示＋3和－3的两个点离开原点的长度都是3个单位，因此，它们的绝对值都是3。



3．绝对值的表示法

实数a的绝对值用$|a|$表示。$|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0)。\end{cases}$

(二)绝对值的化简

正确去掉绝对值符号是绝对值化简的关键，去掉绝对值

符号时应首先判定绝对值符号内代数式值的符号（正数、负数、零），再根据绝对值定义去掉绝对值符号。

这类问题，一般分为两大类：

第一类　不需讨论，直接化简。

属于这种类型的，一般有以下几种情况：

1. 具体数字；

2. 条件明确；

3. 恒为非负值。

例1　求下列各式的值：

(1) $|\sqrt{2}-1|-|\sqrt{2}-\sqrt{3}|$；

(2) $|\sin\alpha-1|\quad(0^\circ<\alpha<90^\circ)$；

(3) $|\lg a-1|+\lg a\quad(0<a<10)$。

解　(1) $\because\ \sqrt{2}-1>0,\quad \sqrt{2}-\sqrt{3}<0$。

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{2}-1-[-(\sqrt{2}-\sqrt{3})]$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1$。

(2) $\because\ 0^\circ<\alpha<90^\circ,\quad \therefore\ 0<\sin\alpha<1,$

$\sin\alpha-1<0,$

$\therefore$ 原式 $=-(\sin\alpha-1)=1-\sin\alpha$。

(3) $\because\ 0<a<10,\quad \therefore\ \lg a<1,$

$\lg a-1<0,$

$\therefore$ 原式 $=-(\lg a-1)+\lg a=1$。

例2　化简下列各式：

(1) $|2x+y|+|x-y|-|y-x|\quad(x<y<0)$；

(2) $\left|\dfrac{a+b}{b+1}\right|-\dfrac{|a+b|}{b+1}\div\dfrac{a+b}{|b+1|}\quad(a<-b<1)$；

(3) $|x^2+1|-|x^2+2x+3|$。

解　(1) $\because\ x<y<0,$

$\therefore \quad 2x+y<0, \quad x-y<0, \quad y-x>0$，

$\therefore$ 原式$=-(2x+y)+[-(x-y)]$

$-(y-x)=-2x-y$。

(2) $\because \quad a<-b<1$，$\therefore \quad a+b<0, \quad b+1>0$，

$\therefore$ 原式$=-\dfrac{a+b}{b+1}+\dfrac{a+b}{b+1}\cdot\dfrac{b+1}{a+b}$

$=\dfrac{1-a}{b+1}$。

(3) $\because \quad x^2+1\geqslant 1$，

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2\geqslant 2$，

$\therefore$ 原式$=x^2+1-(x^2+2x+3)=-2x-2$。

第二类　讨论后，再化简。

1．题中没给条件，或虽给条件，但条件不明确，需经讨论后再化简。

例 3　化简下列各式：

(1) $\sqrt{m^2-8m+16}+\left|2m+\dfrac{7}{2}\right| \quad (m<-4)$；

(2) $|2x+1|$。

解　(1) $\because \quad m<-4$，$\quad \therefore \quad 2m+\dfrac{7}{2}<0$，

$\therefore$ 原式$=4-m-2m-\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}-3m$。

(2) $|2x+1|=\begin{cases}2x+1, & (2x+1\geqslant 0 \text{ 即} x\geqslant -\frac{1}{2}), \\ -(2x+1)。 & (2x+1<0 \text{ 即} x<-\frac{1}{2})。\end{cases}$

2．求几个绝对值的代数和

这种类型的题目一般是分别求出绝对值符号内代数式的根，这些根把全体实数（或指定的数值范围）分成几个区

间，再在这几个区间内进行化简求值。

例 4 化简：

(1) $|3-2a|-|3a-10|$ $(2<a<4)$；

(2) $|x-2|+|x+5|$。

解 (1) ∵ $2<a<4$，

∴ 当$2<a<3\frac{1}{3}$时， $3-2a<0$，

$3a-10<0$，

∴ 原式$=-(3-2a)+(3a-10)=5a-13$；

当$3\frac{1}{3}\leqslant a<4$时， $3-2a<0$， $3a-10\geqslant 0$，

∴ 原式$=-(3-2a)-(3a-10)=7-a$。

(2) 当 $x\leqslant -5$时， $x-2<0$， $x+5\leqslant 0$，

∴ 原式$=-(x-2)-(x+5)=-2x-3$。

当 $-5<x\leqslant 2$时，$x-2\leqslant 0$， $x+5>0$，

∴ 原式$=-(x-2)+(x+5)=7$。

当 $x>2$时， $x-2>0$， $x+5>0$，

∴ 原式$=x-2+x+5=2x+3$。

（三）已知某数的绝对值求此数

由绝对值的几何意义知，绝对值等于某一正数的实数有两个，它们互为相反数。

例 5 x为何值时，下列各式成立？

(1) $|3-x|=4$； (2) $|3-x|=0$；

(3) $|3-x|=-2$。

解 (1) ∵ $|3-x|=4$， ∴$3-x=\pm 4$，

$x_1=-1$； $x_2=7$。

∴ 当$x=-1$或$x=7$时， $|3-x|=4$成立。

（2）$\because$ $|3-x|=0$，　　$\therefore$ $x=3$。

$\therefore$ 当$x=3$时，　$|3-x|=0$成立。

（3）$\because$任何实数的绝对值均为非负数，故无论x取任何实数，$|3-x|\neq-2$，故本题无解。

例6　已知$|a|=2$，$|b|=5$，求$a+b$的值。

分析： 欲求"$a+b$"的值，需先求a、b的值。

解　$\because$ $|a|=2$，　$\therefore$ $a=\pm2$；　$|b|=5$，$b=\pm5$。

$\therefore$ 当$a=2$、　$b=5$时，　$a+b=7$；

当$a=2$、　$b=-5$时，$a+b=-3$；

当$a=-2$、$b=5$时，　$a+b=3$；

当$a=-2$、$b=-5$时，$a+b=-7$。

例7　回答下列问题：

（1）若$|a|=-a$，则a是怎样的数？

（2）若$|m|=|n|$，则$m=n$永远成立吗？为什么？

（3）若$|m|>|n|$，则m一定大于n吗？为什么？

解　（1）$\because|a|\geqslant0$，$|a|=-a$，　$\therefore-a\geqslant0$，　$\therefore a\leqslant0$，

$\therefore$ 当$|a|=-a$时，a是一个非正数，

即　$a\leqslant0$。

（2）当$|m|=|n|$时，$m=n$不是永远成立的，只有当m，n同号或都等于零时，才有$m=n$。（如$|5|=|-5|$，但$5\neq-5$）。

（3）当$|m|>|n|$时，不一定m大于n。

若$m>0$，则$m>n$；　若$m<0$，则$m<n$。

注　①在没有给定条件的情况下，用字母表示的数的性质不能确定，如$-a$不一定是负数。若a表示正数，则$-a$是负数；若a表示负数，则$-a$就是正数了。②两个数相等，则这两个数的绝对值一定相等；反过来不一定成立。

二、算术根

（一）算术根的概念

正数a的正的n次方根，叫做a的n次算术根，记作$\sqrt[n]{a}$（$a>0$，n是大于1的正整数）。

零的算术根是零；负数没有算术根。

当$n=2$时，$\sqrt[n]{a}$称为a的算术平方根，记作$\sqrt{a}$。

由算术平方根的定义可知：

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0)。\end{cases}$$

在理解算术根的概念时，应抓住两个"非负数"，即被开方数为非负数，其方根也为非负数，例如$\sqrt{(-2)^2}=2$，

$$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=\begin{cases} x-1 & (x\geqslant 1), \\ -(x-1) & (x<1)。\end{cases}$$

（二）为什么要规定算术根？

因为每个数学式子都要求只有一个值，这样，在一个包含许多式子的运算中，可以得到一个确定的结果。在根式运算中，规定算术根的概念后，便将所有的根式运算转化为算术根的运算，其结果便是唯一的。

例如计算$\sqrt{36}+\sqrt{9}$，若不规定算术根，便会有

$\sqrt{36}+\sqrt{9}=\pm 6\pm 3=\begin{cases}\pm 9\\ \pm 3\end{cases}$，出现了四种运算结果，而规定了算术根，其结果为$\sqrt{36}+\sqrt{9}=6+3=9$，便是唯一的了。

（三）算术根的运算

根式的运算可以看作算术根的运算。

我们知道，任何实数的绝对值总是个非负数，而任何一个非负数的算术根也是一个非负数，故绝对值和算术根是同一问题的不同表现形式。一般地，算术根的问题总是转化成绝对值的问题来解决。

例 8 求$(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x)+13$的算术根。

解 $\sqrt{(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x)+13}$

$=\sqrt{(x^2-5x-6)^2-2(x^2-5x-6)+1}$

$=\sqrt{(x^2-5x-6-1)^2}=|x^2-5x-7|$

$$=\begin{cases} x^2-5x-7 & \left(x\leqslant\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}\text{或}x\geqslant\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}\right); \\ -x^2+5x+7 & \left(\dfrac{5-\sqrt{53}}{2}<x<\dfrac{5+\sqrt{53}}{2}\right)。\end{cases}$$

例 9 化简下列各式：

（1）已知$1<x<3$，化简$\sqrt{(1-x)^2}+\sqrt{(x-4)^2}$；

（2）$\sqrt{a^2-10a+25}+\sqrt{a^2+2a+1}$。

解 （1）原式$=|1-x|+|x-4|$。于是问题转化为绝对值的化简。（请读者续完）

（2）原式$=\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+1)^2}$

$=|a-5|+|a+1|$。（请读者续完）

三、绝对值与算术根的应用

应用绝对值和算术根的概念解题时，应注意它们均为“非负数”。

例10 求适合等式$\sqrt{\log_3(2x-y-2)}+|3x-2y-8|=0$的$x$和$y$的值。

解 ∵ $\sqrt{\log_3(2x-y-2)}\geqslant0$，$|3x-2y-8|\geqslant0$，

$$\sqrt{\log_3(2x-y-2)}+|3x-2y-8|=0。$$

$\therefore\quad \begin{cases}\log_3(2x-y-2)=0,\\3x-2y-8=0。\end{cases}$

即 $\begin{cases}2x-y-2=1,\\3x-2y-8=0。\end{cases}$ 解 得 $\begin{cases}x=-2,\\y=-7。\end{cases}$

故适合原等式的$x=-2$，$y=-7$。

注 要几个非负数的和等于零，只有每一个非负数等于零。

例11 当x为何值时，下列等式成立？

$$\left|\frac{x+3}{2x-1}\right|=\frac{x+3}{1-2x}。$$

解 要使 $\left|\frac{x+3}{2x-1}\right|=\frac{x+3}{1-2x}$成立，

只有$\frac{x+3}{1-2x}\geqslant 0$，

故 $\begin{cases}x+3\geqslant 0\\1-2x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+3\leqslant 0,\\1-2x<0\end{cases}$。

由 $\begin{cases}x+3\geqslant 0\\1-2x>0\end{cases}$ 得 $-3\leqslant x<\frac{1}{2}$；

而 $\begin{cases}x+3\leqslant 0\\1-2x<0\end{cases}$为空集。

$\therefore$ 当$-3\leqslant x<\frac{1}{2}$时， $\left|\frac{x+3}{2x-1}\right|=\frac{x+3}{1-2x}$成立。

例12 已给代数式$\frac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$，实数$a$为何值时：(1)其值为正？(2)其值为负？(3)没有意义？(4)其值可否为零？

解 (1)要使 $\frac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}>0$，由于$1+\sqrt{a^2}=1+|a|>0$，

$\therefore$ 只要$1-\sqrt{a^2}=1-|a|>0$，即$|a|<1$，

$\therefore\quad -1<a<1$。

故当$-1<a<1$时，$\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$的值为正值。

(2) 要使$\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$为负，由(1)知

只要$1-\sqrt{a^2}=1-|a|<0$，即$a>1$或$a<-1$。

故当$a>1$或$a<-1$时，$\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$的值为负。

(3)由(1)知，当$1-|a|=0$时，即$a=\pm1$时，$\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$没有意义。

(4) 要使$\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}=0$，只有$1+\sqrt{a^2}=0$且$1-\sqrt{a^2}\neq0$，显然这是不可能的。（读者考虑，为什么？）

故 $\dfrac{1+\sqrt{a^2}}{1-\sqrt{a^2}}$的值不能为零。

例13 解方程：$|x-1|+|x-2|=1$。

解 (1) 若$x\leqslant1$，　则$x-1\leqslant0$，　$x-2<0$。

故原方程化为$1-x+2-x=1$，　$x=1$。

(2) 若$1<x\leqslant2$，　则$x-1>0$，　$x-2\leqslant0$。

故原方程化为　$x-1+2-x=1$。

显然，x为大于1且小于或等于2的一切实数，方程均成立。

(3) 若$x>2$，　则$x-1>0$，　$x-2>0$。

故原方程化为　$x-1+x-2=1$，　$x=2$。

易知，原方程没有大于2的解，

$\therefore$原方程的解为$1\leqslant x\leqslant2$。

注 解绝对值方程时，应首先去掉绝对值符号。

习 题 一

1．求下列各式的值：

(1) $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}+|\sqrt{5}-\sqrt{7}|$； $(\sqrt{7}-1)$

(2) $\sqrt{(-2)^6}$ ； (8)

(3) $|-x^{23}|$ $(x<0)$； $(-x^{23})$

(4) $|\operatorname{tg}\alpha-1|$ $(45°<\alpha<90°)$； $(\operatorname{tg}\alpha-1)$

(5) $|a|-|b|$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$。

$$\begin{pmatrix} a-b & (a>0、b>0) \\ -a+b & (a<0、b<0) \\ a+b & (a>0、b<0) \\ -a-b & (a<0、b>0) \end{pmatrix}$$

2．当a是什么实数时，下列各等式成立？

(1) $|a|=|-a|$； (任何实数)

(2) $|a|=a$； $(a\geqslant 0)$

(3) $|a^3|=a^3$； $(a\geqslant 0)$

(4) $|a^4|=-a^4$。 $(a=0)$

3．求适合下式中的x：

(1) $|x^2-x-12|=-(x^2-x-12)$； $(-3\leqslant x\leqslant 4)$

(2) $\left|\dfrac{x-1}{2x+3}\right|=\dfrac{x-1}{2x+3}$。 $\left(x<-\dfrac{3}{2}\text{或 }x\geqslant 1\right)$

4．已知 $|x|=4\dfrac{2}{5}$， $|y|=1\dfrac{3}{5}$，求$x-y$的值。

($x-y$的值为 $2\dfrac{4}{5}$或$-2\dfrac{4}{5}$或 6 或-6)

5．回答下列问题：

(1) 已知 $|m|=4$，是否能断定$m=4$？

(不能。$m=4$ 或$m=-4$)

(2) 已知 $|m|>4$，是否可断定$m>4$？

（不能。当$m>0$时，$m>4$；当$m\leqslant 0$时，$m<4$）

（3）已知$m<n$，能否断定$|m|<|n|$？

（不能。可分别分m、n同号或异号讨论）

6．求下列各式中未知数的值：

（1）$|3x-2|=5$；　　（$\frac{7}{3}$，-1）

（2）$\left|\frac{2x-1}{3}\right|=0$。　　（$x=\frac{1}{2}$）

7．改正下列各题的错误：

（1）$\sqrt{(-7)^2}=-7$；　（2）$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$；

（3）$\sqrt{\lg^2 3-2\lg 3+1}=\lg 3-1$；

（4）$\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\cos\alpha$　　（$90^\circ<\alpha<180^\circ$）

8．化简下列各题：

（1）$2|a-1|+\sqrt{1-4a+4a^2}$（$\frac{1}{2}<a<1$）；　　（1）

（2）$\sqrt{x^2-6x+9}+|1-x|$；　$\left(\begin{cases}4-2x & (x\leqslant 1)\\ 2 & (1<x\leqslant 3)\\ 2x-4 & (x>3)\end{cases}\right)$

（3）$\frac{2-x}{x+1}\sqrt{\frac{x^2+2x+1}{x^2-4x+4}}$。　$\left(\begin{cases}-1 & (x<-1)\\ 1 & (-1<x<2)\ 且x\neq -1, x\neq 2\\ -1 & (x>2)\end{cases}\right)$

9．（1）设$|x|<3$，求$\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}$的值。

$$\left[\begin{cases}-2x-2 & (-3<x<1)\\ -4 & (1\leqslant x<3)\end{cases}\right]$$

（2）已知$2a^2-5a+2<0$，

化简$2\sqrt{a^2-4a+4}+|2a-1|$。　　（3）

10．若$-x<y<-1$，化简

$$\frac{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}{|y+1|}+\left(\frac{y+1}{x+y}\right)^{-1}。$$　　（0）

11．求a和b的值：

(1) $\sqrt{3a+1}+|b-1|=0$； $(a=-\frac{1}{3},\ b=1)$

(2) $\sqrt{2a-3b-1}+(a-2b)^2=0$； $(a=2,\ b=1)$

(3) $|-4+5b|+\sqrt{a^2-10ab+25b^2}=0$。$(a=4,\ b=\frac{4}{5})$

12。求$(x^2-3x+1)^2-4(x^2-3x)$的算术根；

（提示：原式化为$(x^2-3x-1)^2$，再求算术根）

13。解下列方程：

(1) $|x-5|-|x+4|=9$；

(2) 设$\frac{3}{2}<x<2$，$|3-2x|+|2-x|=5$。（无解）

14。当a为何值时，方程$|ax-2y-3|+|5x+9|=0$的解满足条件：x和y同号。 $(a>-\frac{5}{3})$

15。已知$-a^2+7a-12>0$，计算

$\sqrt{a^2-10a+25}+|a^2-5a-14|-14\log_{(a^2-5)}(a^2-5)$。

（提示：由条件知$3<a<4$，据此分别判断出"$a-5$"与"$a^2-5a-14$"的符号；再去绝对值符号。原式$=5+4a-a^2$。）

16。解方程：$|x-3|+\sqrt{2-x}=3$。

（提示：欲使原方程成立，需$x\leqslant 2$，然后去掉绝对值符号，$x=1$）

17。若$|ab|+1=|a|+|b|$，求a，b。

（提示：将原式化为$(|a|-1)(|b|-1)=0$。由此得$a=\pm 1$，$b=\pm 1$。）