初中代数复习参考资料

赵宪初编

上海教育出版社

初中代数复习参考資料

赵 宪 初 編

上海教育出版社

一九六三年·上海

初中代数复习参考資料

赵宪初編

*

上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
上海市书刊出版业营业許可証出090号
上海新华印刷厂印刷
新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

*

开本：787×1092 1/32　印张：5 11/16　字数：125,000
1963年4月第1版　1963年4月第1次印刷
印数：1—93,000本

統一书号：7150·1396
定　价：（八）0.48元

出版説明

为了帮助中学生复习好数学,本社曾于1958年出版了中国数学会上海分会中学数学研究委員会編写的“初中数学复习資料”和“高中数学复习資料”两书,提供教师們在指导学生复习数学时参考. 这两书在1959年还曾作了一次全面修訂. 为了符合当前中学数学各科教学的要求和使用上便利起见，此次特請上两书的原作者在原书各有关部分的基础上，并吸取几年来中学数学老师們指导学生复习数学的实际經驗,重行修訂,分册出版.

数学課的复习,是教师在平时所应注意的經常工作,只有在平时不断复习巩固的基础上来作最后系統的复习，才能收到較好的教学效果. 因此,我們决不能放松平时的复习,而只重視毕业前的总复习.

“进行复习的目的,不仅是使学生在記忆上重现一下个别的公式、法則、定义、定理或者解答习题的方法,还要使学生能够对于新旧課題作更巩固而明确的联想以及邏輯的联系，能够确定解决同类問題的法則和方法的异同，并且能够以新的更全面的观点闡明所学习过的教材.”(中华人民共和国教育部編訂:《中学数学教学大綱(修訂草案)》，1956年第三版第4頁.)考虑到这一点,本书在复习系統的安排上,采用了按照本課程中的几个主要內容，分类集中，划分成若干个单元进行专題复习的办法，企图使学生对每一部分的知識，能够有比較完整的、系統的认識. 另外,根据本課程內容的特点，在这些項目相互之間，又是

交錯联系的；为此，在例題和习題的选擇安排上，注意了尽可能使安排在前面复习的內容，不太多地牽涉到后面复习的知識，而在后面复习的內容里，多安排一些綜合性的題目，来巩固前面复习的知識，以期使学生通过复习能够达到反复巩固、灵活运用的目的.

本书每个单元里都包括前言、提要、例題和习題四个部分."前言"里除了簡单叙述本单元复习的主要內容和它在整个課程中的作用和地位以外，还提出了复习本单元的注意点."提要"里系統地指出了本单元的重要知識."例題"里安排了各种类型的題目，并作了示范性的解答；一部分例題里，在具体作出解答以前，还指出了思考方法，或者在解答以后提出了一般的注意，提供解題的指导."习題"里配备了一部分最基本的題目，同时也配备了一部分較难的題目，提供了练习的材料.企图使讀者在运用这本复习参考資料时，可以首先在明确复习要求的基础上，整理一下学过的知識，熟悉解題的方法，进行必要的练习，从而巩固所学过的知識，发展解題的能力.

在重編本书的时候，曾邀請部分中学数学老师进行座談，承蒙提出了改編的意见，还提供了一些具体資料，謹向他們表示感謝.本书无論在选材上、編排体系上，可能还存在不少缺点，希望讀者批評指正，以便将来再作修訂，使它逐步趋于完善.

目　录

第一单元　实数

I. 前　言

在初中代数課程中，我們把数的范围扩展到实数．数的范围的扩展分做几个阶段，在算术里，我們首先把数从自然数发展到非負有理数（就是正的整数、正的分数和零）．在代数里引进了負数以后，就把数的范围扩展到有理数．在引进了无理数以后，我們又把数的范围扩展到实数．这一单元里，我們主要复习实数范围内的有关数的概念和运算．

复习时必須注意以下各要点:

（1）負数的計算和小数的乘法、乘方等，最容易发生錯誤，要特别加以注意．

（2）近似計算是一个难点，复习时主要要求能够正确运用近似計算的法則，使指定的近似計算达到要求的精确度．有一些量的值，象时間、长度等，从性质来說，都应該只是近似值，但是在許多問题里，如果給出的数据只有一位有效数字，象3秒钟、1小时、2厘米、5公里等，那末假使沒有特别說明，我們往往就把它当作准确值处理．比如，一个矩形的长和寬分别是3米和5米，那末面积应該是15平方米，不要机械地套用近似計算规則，說是原始数据只有一位有效数字，而把面积四舍五入到20平方米．这在物理的习题里更应該注意．

注　根式$\sqrt{2}$、$\sqrt[3]{3}$等都是实数，但是根式的恒等变形与运算内容

較丰富，我們将在另一单元加以复习，这一单元里暂不討論.

II. 提　要

§1. **自然数**　表示物体个数的一、二、三等叫做自然数. 自然数的个数是无限多的. 自然数里最小的一个是“一”，但是并沒有最大的自然数. 任何一个自然数总还有比它更大的自然数.

把自然数从小到大一个一个地順次排列的这一列数一、二、三、四、五、……叫做自然数列. 自然数列里第一个数是“一”，但是它沒有最后面的一个数. 我們說“自然数列有始无終”.

在自然数列里的任何两个数都不相同，排在前面的較小，排在后面的較大.

注意　对自然数与自然数列这两个名称应該加以区别，自然数列指的是1、2、3、4、……这一列有順序的数列的整体，而自然数是这一数列里任何一个单独的数.

§2. **整数**　整数的概念是有发展的. 在算术里，整数是指自然数和零. 但是在代数里，整数就包括正整数、零和負整数.

注意　正整数就是自然数.（零不是自然数）

§3. **有理数**　正整数、正分数、零、負整数和負分数，总起来叫做有理数. 有理数总可以表示成为以整数为分子、自然数为分母的分数形式. 如果把有理数表示成小数形式，那末一定是有限小数或者无限循环小数.

§4. **无理数**　无限不循环小数叫做无理数. 无理数不可能表示成为以整数为分子、自然数为分母的分数形式.

注意　开不尽的方根都是无理数，例如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{4}$、……等都是无理数. 但并不是所有无理数都是从开方产

生的．例如圓的周长与直径的比叫做圓周率，是一个无理数 3.14159265……．它不可能化成分数的形式，也不能化成一个有限次的方根的形式．普通我們拿一个希腊字母 π 来表示它．在实际計算中，我們通常可以根据需要的精确程度取它的近似值 3.14 或 3.1416 或 $3\frac{1}{7}$等．此外，如 0.101001000100001…… 也是无理数．角的三角函数值大多数也都是无理数．

§5．实数 有理数和无理数总起来叫做实数．

实数的分类如下表：

- 实数
  - 有理数
    - 正有理数
      - 正整数（就是自然数）
      - 正分数（包括正有限小数或者正循环小数）
    - 零
    - 負有理数
      - 負整数
      - 負分数（包括負有限小数或者負循环小数）
  - 无理数
    - 正无理数
    - 負无理数

§6．数軸 数軸是一条規定了正方向、原点和单位长度并且用来表示数的直綫（图 1）．

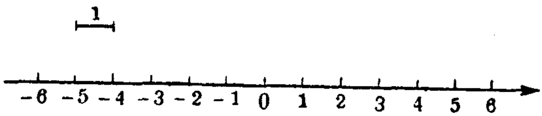

图 1

任何实数可以用数軸上的一个点来表示，反过来，数軸上任何一点都表示一个实数．不同的实数有不同的点，不同的点表示不同的实数．我們說：实数与数軸上的点是"一一对应"的．

§7．相反的数 ＋3 与－3 是相反的数，它們在数軸上的点是在原点的左右两側，并且离原点同样远．我們說和 ＋3 相

反的数是-3，和-3相反的数是$+3$. 如果用字母a来表示任何一个实数,那末和它相反的数就用$-a$来表示.

§8. 絕对值 一个正数的絕对值就是这个数本身,一个負数的絕对值是和它相反的一个正数. 零的絕对值是零.

我們在一个数的两旁加上两条竪綫来表示这个数的絕对值. 例如:

$$|+5|=+5, \qquad |-5|=+5, \qquad |0|=0.$$

§9. 实数的大小比較 設有两个实数a和b,并且設数軸上的A点表示实数a,B点表示实数b.

(1) 如果A点在B点的左面,那末$a<b$;

(2) 如果A点和B点重合,那末$a=b$.

由此可知:

(1) 任何正实数都大于零,任何負实数都小于零,任何正实数都大于任何負实数.

(2) 两个正实数化成小数以后,如果对应数位上的数字都相同,那末这两个正实数相等;如果整数部分不相同,那末整数部分較大的正实数較大;如果整数部分相同,而小数部分不完全相同,那末从小数点后面第一位起,在第一个数字不相同的数位上,哪一个数的数字所表示的数較大,就是較大的数.

(3) 如果两个負实数的絕对值相等,那末这两个負实数相等;如果两个負实数的絕对值不等,那末絕对值大的負实数較小. 例如:

$$365.345\cdots\cdots>365.3289\cdots\cdots;$$

$$-365.345\cdots\cdots<-365.3289\cdots\cdots.$$

§10. 实数的六种基本运算(加、减、乘、除、乘方、开方)以及它們之間的关系

1．六种基本运算

（1）加法　加数甲＋加数乙＝和．

（2）减法　被减数－减数＝差．

（3）乘法　被乘数×乘数＝积．（或者因数甲×因数乙＝积）

（4）除法　被除数÷除数＝商．（“÷”讀做“除以”）

注　除数不能是零．

（5）乘方　$(\text{底数})^{\text{指数}}=\text{幂}$．

（6）开方　$\sqrt[\text{根指数}]{\text{被开方数}}=\text{方根}$．

說明　（1）当根指数是偶数时，被开方数必須是正数或者零．

（2）当根指数是偶数、被开方数是正数时，开方的結果有两个值，它們互为相反的数．通常把$\sqrt[\text{根指数}]{\text{被开方数}}$只表示其中正的一个方根（就是算术根）．

2．六种基本运算之間的关系

（1）加法和减法互为逆运算．

例如，　加数甲＋加数乙＝和，

那末，　　和　－加数甲＝加数乙，

　　　　　和　－加数乙＝加数甲．

例如，　被减数－减数＝差，

那末，　　差　＋减数＝被减数，

　　　　被减数－　差　＝减数．

（2）乘法和除法互为逆运算．

例如，　因数甲×因数乙＝积，

那末，　　积　÷因数甲＝因数乙，（如果因数甲不等于0）

　　　　　积　÷因数乙＝因数甲．（如果因数乙不等于0）

例如，　被除数÷除数＝商，

那末，　　　　商　×除数＝被除数，

被除数÷　商　＝除数.

(3) 乘方和开方互为逆运算.

例如，　甲数的平方是乙数，

那末，　　乙数的一个平方根是甲数.

(4) 当乘数是大于1的正整数的时候，乘法是相同加数的加法的简便算法.

例如：$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times 5=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$,

$$(-2)+(-2)+(-2)=(-2)\times 3=-6.$$

但如果乘数不是大于1的正整数，乘法的意义就不能說是相同加数加法的简便算法了.

(5) 当指数是大于1的正整数的时候，乘方是求相同因数的积的运算，乘方的結果叫做幂.

例如：$3\times 3\times 3\times 3=3^4=81$,

$$(-1)\times(-1)\times(-1)=(-1)^3=-1.$$

§11. 运算定律

1. 加法交换律：$a+b=b+a$.

2. 加法結合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$.

3. 乘法交換律：$a\times b=b\times a$.

4. 乘法結合律：$(ab)c=a(bc)$.

5. 乘法对于加法的分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

这里a、b、c是任意实数.

§12. 运算順序

1. 在加、减、乘、除、乘方、开方这六种运算中，加和减是第一級运算，乘和除是第二級运算，乘方和开方是第三級运算. 在

沒有括号的运算中，首先进行第三級的运算，然后第二級，再第一級；就是先乘方、开方，然后乘、除，最后加、減.

2. 一个式子里如果有括号，先进行括号里面的运算.

3. 如果只有同一級运算，就从左到右依次运算.

4. 根据运算定律可以变更上面的运算顺序.

§13. 有关近似計算的一些概念

1. 准确数与近似数　表示量的准确值的数叫做准确数；表示量的大約的值的数叫做近似数. 近似数大于准确数的叫做过剩近似値，近似数小于准确数的叫做不足近似值.

2. 近似数的誤差与誤差界　一个近似数和它所代表的准确数的差的絕对值，叫做这个近似数的絕对誤差；近似数的絕对誤差和近似数本身的比，叫做这个近似数的相对誤差.

例如，用 a 表示近似数，用 A 表示它所代表的准确数，那末

絕对誤差　　$\varDelta=|A-a|$,

相对誤差　　$K=\dfrac{\varDelta}{a}=\dfrac{|A-a|}{a}$.

一个近似数的絕对誤差所不超过的某一个数，叫做这个近似数的絕对誤差界；一个近似数的絕对誤差界和近似数本身的比，叫做这个近似数的相对誤差界. 相对誤差界也就是一个近似数的相对誤差所不超过的某一个数.

3. 近似数的截取方法

(1) 去尾法　把某一个数保留到某一指定的数位为止，以后的数字全部舍去；例如 3.14159 用去尾法計算到千分位的近似数是 3.141.

(2) 进一法　把某一个数保留到某一指定的数位为止，以后的数字全部舍去，但如果舍去的数字不全是零，那末在保留的

最后一位数字上加 1；例如 16.65307 用进一法計算到千分位的近似数是 16.654.

(3) 四舍五入法　把某一个数保留到某一指定的数位为止，以后的数字全部舍去，如果舍去的第一位数字是 5 或者大于 5，在保留的最后一位数字上加 1；如果舍去的第一位数字是 4 或者小于 4，那末不必加 1. 例如用四舍五入法計算到百分位，那末 $0.72513\approx0.73$，$3.5972\approx3.60$，$36.84498\approx36.84$. 在进行近似計算的时候，除根据实际情况另有规定外，一般总是用四舍五入法.

4. 近似数的有效数字的个数　用四舍五入法截取所得的近似数，从它最左的不是零的数字算起，到最后一位保留的数字为止，一共有几个数字，就叫做这个近似数有几个有效数字. 例如，近似数 3.14 有三个有效数字，近似数 0.006724 有四个有效数字，近似数 8.010 有四个有效数字.

5. 近似数的精确度　如果 3.54 是一个用四舍五入法截取到的近似数，我們說它精确到 0.01 或者精确到百分位，我們也可以說它精确到三个有效数字. 我們說一个近似数精确到某一数位时，就是說这一数位是保留数字的最后一位. 用四舍五入法截取近似数精确到某一数位，那末这个近似数的絕对誤差界就是这个数位上的一个单位的$\frac{1}{2}$，比如近似数 3.54 的絕对誤差界是 0.01 的$\frac{1}{2}$就是 0.005. 我們說一个近似数精确到几个有效数字时，就是說这一近似数从最左的不是零的数字起到最后一位保留的数字止一共有几个数字，而不管最后的一个数字在哪一数位上.

§14. 近似数的計算法則

1. 近似数的加减法　在近似数相加(加数不超过10个)或者相减的时候,小数位数較多的近似数,只要比小数位数最少的多保留一位,其余的都舍去;在計算的結果里应保留的小数位数和原来近似数里最少的一个的相同.(只有整数的近似数仿此)

例如,$1.3567+3.5\approx1.36+3.5\approx4.9$.

又如,123000是精确到千位的近似数,那末$123000-2130\approx123000-2100\approx121000$.(这个結果仍然精确到千位)

2. 近似数的乘除法　近似数相乘或者相除,要注意各个近似数有效数字的个数.有效数字个数較多的数,只要比有效数字个数最少的数多保留一个,其余的都舍去;所得的結果,从第一个不是零的数字起保留的数字的个数,应該和有效数字个数最少的那个数所有的有效数字的个数相同.

例如$3.2634\times0.0054\approx3.26\times0.0054\approx0.018$.

3. 近似数的乘方和开方　把近似数乘方或者开方,所得的結果从第一个不是零的数字起保留的数字的个数,应該和原数的有效数字的个数相同.例如,$(0.312)^2\approx0.0973$,$\sqrt{1.04}\approx1.02$.

4. 混合运算　近似数的混合运算,应該依照上面的法則分步計算,但中間步驟的演算結果里,应該比上面法則里的規定多保留一个数字.可以概括成下列几句話:加减运算,依照数位;乘除运算,依照个数;中間步驟,多留一个.

III. 例　題

例1　計算:
$$+16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times(+2).$$

解 原式$=16\times 9+5\times(-3)-12\div 2+(-60)$

$$\div(-4)+18\times(-8)-(-3)\times(+2)$$

$$=144-15-6+15-144+6=0.$$

說明 (1) 先进行乘方，再乘、除，最后加、減.

(2) 先把这一代数和里的一些互为相反的数合并，这样，运算就比較簡捷.

例 2 計算: $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\div 5+\frac{3}{7}$

$$\div(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{-2}{5}\right)\left(\frac{-5}{7}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

解 原式$=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{3}{14}+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{3}{14}+\frac{2}{7}\right)$$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{5}{10}-\frac{7}{14}$$

$$=-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{3}{8}.$$

說明 把分母之間有倍数关系的分数先合并起来，运算就变得簡捷.

例 3 計算: $2.75-\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+4\frac{2}{3}\right].$

解 原式$=2.75-\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{3}{8}\right)-4\frac{2}{3}$

$$=2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{8}-4\frac{2}{3}$$

$$=\left(2\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\right)-\left(\frac{5}{6}+4\frac{2}{3}\right)$$

$$=3\frac{5}{8}-5\frac{1}{2}=-1\frac{7}{8}.$$

說明 如果算式里既有小数又有分数，一般先把小数化成分数,再进行运算.

例4 計算: $-1\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\times(-0.2)\times1\frac{3}{4}\div1.4\times\left(-\frac{3}{5}\right).$

解 原式$=-\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{5}\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$$=-\frac{3}{10}.$$

說明 (1) 遇到乘除混合运算,可以先把除法化成乘法,再进行运算.

(2) 在乘除运算里,先把带分数化成假分数.

(3) 可以先决定結果的符号.

例5 計算: $\left[(-5)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1.$

解 原式$=\left[25\times\left(-\frac{3}{5}\right)+15\right]\times8\div7+1$

$$=(-15+15)\times8\div7+1$$

$$=0+1$$

$$=1.$$