

035-3701

82183

中国力学学会 第一次流体力学学术讨论会 论文选集

教师资料室书
借不得往外拿

(内部资料)



中国力学学会編輯
科学出版社出版



040717C

中国力学学会

第一次流体力学学术讨论会

论文选集

(内部资料)

中国力学学会編輯
科学出版社出版

中国力学学会
第一次流体力学学术讨论会
论文选集

中国力学学会编辑

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街117号

北京市书刊出版业营业登记证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行

*

1965年8月第一版 开本：787×1092 1/16

1965年8月第一次印刷 印张：11 3/4

印数：0001—1,100 字数：270,000

统一书号：13031·2172

本社书号：3306·13—2

定价：1.80元

前 言

中国力学学会于 1963 年 10 月在上海举行了全国第一次流体力学学术讨论会。会上共宣读论文 53 篇，内容包括空气动力学、一般流体力学、水动力学以及渗流理论等方面，为了更广泛地交流经验，并且作为我国力学学科发展的记录，现将会议中较好的论文汇编出版。

本选集共搜集了论文全文 11 篇，作为第一部分；为了避免重复，凡已在全国性学报或高等院校学报发表过的论文，此处只刊登摘要，作为第二部分；凡在会上宣读过的其他论文则刊登题目，作为第三部分，以供参考。渗流理论方面的论文由石油工业部另行出版。

选入的论文，出版前均经过复审，并由作者作了必要的补充和修改。在此，谨向大力支持本选集出版的作者、审稿者与科学出版社表示深切的谢意。

中国力学学会

1964 年 10 月

目 录

第 一 部 分 (全文刊登)

细长体高超声速小攻角绕流·····	湯福坤、蔡荣善、高芝照	1
超声速、高超声速尖头轴对称体定常及非定常問題·····	錢福星	20
高速湍流边界层噴入其他气体时的摩阻和热传导·····	王培生	34
关于激波反射的非定常效应·····	黃 敦、胡祖熾	48
一类气体力学方程組初值問題的准确解·····	黃 敦、胡祖熾、崔春芳	57
考虑非平衡离解效应时高速无粘性空气繞鈍头的流动·····	賀觉民	73
理想流体有势流动的电模拟·····	楊岍生、陈棣忠、李建新	89
矩形柱体地震动水压力的近似計算·····	謝省宗、錢 璘	114
单跨梁在平行水流作用下的自由振动·····	肖天鐸	125
地震波所激起而作用于水坝上的流体动压力——論抗震坝型最优纵断面·····	陈振誠	138
任意軸对称物体对自由液面的垂直撞击·····	陈九錫	156

第 二 部 分 (摘要刊登)

直升机升力桨的广义涡流理論·····	王适存	171
不完全膨胀的軸对称超声速湍流射流·····	姜正行	171
超声速薄翼錐形流問題的一种解法·····	林超強	172
超声速箭形机翼某些气动导数的計算·····	林超強	172
非平衡离解气体繞有攻角圓錐体的高超声速流动·····	吳江航、叶瑞人	173
計算不可压缩流体中大攻角小展弦比矩形平板机翼空气动力性能的一个簡單方法·····	周光炯、丁譔丽	173
近代高速气体动力学現狀·····	张涵信	173
超高速鈍体湍流传热問題·····	呼和敖德、牛家玉	174
激波管及激波管风洞中駐点传热率的測量·····	俞鴻儒、馬家驥、罗明暉	174
Ляпунов 关于运动稳定性的某些理論在流体层流运动稳定性問題上的推广·····	周 恆	175
均匀各向同性湍流在后期衰变时的三元速度关联·····	黃永念	175
高 Reynolds 数下的均匀各向同性湍流运动·····	周培源、是助剛、李松年	176
滑行板的纵搖与升沉运动·····	苏鈞麟、孙明光、张滌明、李惠兰	176
后掠水翼理論·····	李百齐、何友声	177
短翼理論及其在船舵上的应用·····	刘应中、沈泓萃、刘恆茂	177
超空泡和局部空泡水翼的綫性化理論·····	董世湯	177
超空泡圓弧型水翼的流体动力性能計算方法·····	計志也	178

• • •

第三部分 (題目刊登)

儲熱式加熱器的非定常氣流問題·····	連淇祥	179
任意梯形后掠機翼的低速俯仰阻尼導數的計算·····	黃明格	179
在縱向加速流場內用風速管測量風速時的理論修正·····	顧高墀	179
流場中存在橫向速度場時對繞流物體壓強分布的影響·····	顧高墀	179
有自由面的鉛直平面向旋運動·····	張長高	179
剛性周綫在有奇點平面不可壓勢流中的運動·····	程惕吾	179
冷卻池水流運動的模型相似性問題·····	陳惠泉	180
二維進水口曲綫的壓力分布·····	許協慶、趙振國	180
摻氣水流的濃度和流速測量方法·····	時啟燧	180
水面下物體作任意運動的興波阻力·····	何友聲	180
綫性化空泡流體力學的速度面法·····	湯福坤	180

滲流理論部分(另行出版)

用壓力恢復曲綫計算油井折算半徑問題的分析·····	李永善、陳鼎、郭尙平	180
行列注水時非均質油田開發過程的水動力學計算·····	郭尙平、劉慈羣	181
面積注水時非均質油田開發過程的水動力學計算方法·····	劉慈羣、郭尙平	181
用電網模型研究兩相平面非定常滲流的一種近似方法·····	陳鍾祥	181
關於毛細管壓力在兩相重力分離問題中的作用·····	陳鍾祥	181
在具有不滲透的蓋層和底層并夾有低滲間層的有限地層中液體的不穩定滲流 ·····	劉慰寧	181
油田在面積注水方式下開發設計的水動力學計算方法·····	陳元干、梅占馨	181
用壓力恢復曲綫計算油氣儲量·····	李惕平、李永善	182
多油層的壓力變化規律·····	劉慈羣、李永善	182
非均質彈性水壓驅動油田中油藏和油井動態分析·····	劉慈羣、李永善	182
滲透率按單調規律分布時的一維彈性滲流問題·····	李永善、劉慈羣	182
地層滲透率非均質的定量估計·····	黃延章、劉慈羣	182
用壓力恢復曲綫求油層參數的幾個新公式·····	李永善、陳鼎	182

第一部分

細长体高超声速小攻角繞流

湯福坤 蔡荣善 高芝照

(上海交通大学)

提 要

本文以高超声速小扰动理论研究了幕次外形 ($R_b = Cx^m$) 細长体小攻角繞流问题。考虑 α/τ 为小量而計算其一級扰动。以 Mach 数 $M \rightarrow \infty$ 之解作为零級解, 而 $M \neq \infty$ 之改进, 则以小参数 $\epsilon = 1 / \left(M\tau \frac{dR_{00}}{dx} \right)^2$ 展成級数。由于幕次外形物体繞流流场所具有的相似性质, 引入相似变量后方程组化为非线性常微分方程组。在幕次 $1 \geq m \geq \frac{1}{2}$ 范围, 本文按一定间隔进行了 ϵ^0 級的数值积分。给出了流場內各流动参数、物面压力系数、法向力系数导数、力矩系数导数的数值结果。

一、引 言

細长体在高速飞行技术中有很大的实际意义。錢学森^[1]曾首先研究高超声速小扰动流动之相似律。W. D. Hayes^[2]将其推广至三維有旋流动之一般情形, 且进一步指出了相似律的物理解释。細长体高超声速飞行之小扰动理論指出, 在飞行方向之扰动速度是二級小量, 而橫向之扰动速度是一級小量。若略去二級小量, 則仅需对橫向扰动流場进行研究。在固定坐标系之任一橫截面看来, 此相当于一个內边界运动之不定常流动。按固結于飞行器上之动坐标系而作定常問題处理, 則可略去方程組中沿来流方向之扰动量。方程組得到了一定的簡化。当飞行 Mach 数 $M \rightarrow \infty$ 时, 幕次外形 ($R_b = Cx^m$) 細长体的无攻角流場有相似性质, 相似性解实际存在的限制是 $1 \geq m \geq \frac{1}{2}$ 。苏联学者对这种不定常問題之研究^[7]称为“自模”(Автомодельный)。Л. Г. Велеско 等^[8]曾对不同幕次 m 的相似性解进行了数值計算¹⁾。久保田^[6]和 M. Mirels^[10]按櫻井^[9]对強爆炸問題处理 $M \neq \infty$ 修正之同样方法, 将解展成小参数 $\epsilon = \frac{1}{\left(M\tau \frac{dR_\infty}{dx} \right)^2}$ (R_∞ 为激波半径) 的幕級数研究了 $M \neq \infty$

之修正項。L. Lees 和久保田^[5,6]指出, 考虑一級修正后之压力分布与实验值十分吻合, 級数解取第一項修正后已属良佳。

本文以高超声速小扰动理論研究了幕次外形軸对称細长体之小攻角流場。考虑 α/τ 为小量而計算其一級扰动。以 Mach 数 $M \rightarrow \infty$ 之解取为零級解, $M \neq \infty$ 之改进, 則同

1) 文献[3]第 80—82 页引用了此结果。

样展成小参数 $\epsilon = \frac{1}{\left(M\tau \frac{dM_\infty}{dx}\right)^2}$ 的幂级数。在幂次 $1 \geq m \geq \frac{1}{2}$ 范围，按一定间隔进行

了 ϵ^0 级的数值积分。给出了压力系数、法向力系数导数、力矩系数导数的数值结果。

二、高超声速小扰动理论基本方程和边界条件

讨论细长迴转体的高超声速绕流问题。设气体是无粘性、无热传导的完全气体，不考虑真实气体效应。

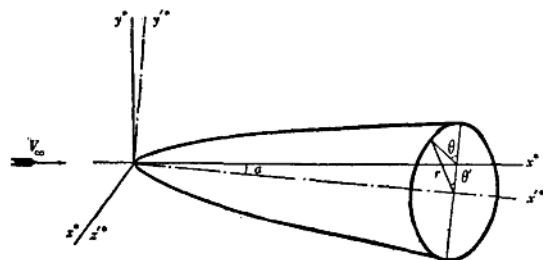


图 1

在无攻角时流场是轴对称的，激波形状也是轴对称的。有攻角时，流场的轴对称性将遭到破坏。如果仅限于小攻角范围，可以认为有攻角绕流解等于无攻角绕流解加上一个和攻角有关的扰动项。将它代入基本方程组，并略去扰动量的二级小量，就得到带变系数的扰动量

线性方程组。同样，对小攻角时激波形状，也认为是无攻角激波形状加上扰动。

由于物体是迴转体，采用圆柱坐标系 x^*, r^*, θ (图 1)。 x^* 取均匀来流方向， θ 为子午面坐标， x^* 和物体轴 x'^* 组成的上半平面取作 $\theta = 0$ 。

在上述假设和坐标系下，气体运动的基本方程是：

$$\begin{cases} (V_\infty + u^*) \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{w^*}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x^*}, \\ (V_\infty + u^*) \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + \frac{w^*}{r^*} \frac{\partial v^*}{\partial \theta} - \frac{w^{*2}}{r^*} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial r^*}, \\ (V_\infty + u^*) \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + \frac{w^*}{r^*} \frac{\partial w^*}{\partial \theta} + \frac{v^* w^*}{r^*} = -\frac{1}{\rho^* r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial x^*} [\rho^* (V_\infty + u^*)] + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (\rho^* v^* r^*) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho^* w^*) = 0, \\ (V_\infty + u^*) \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{p^*}{\rho^{*2}} \right) + v^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{p^*}{\rho^{*2}} \right) + \frac{w^*}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p^*}{\rho^{*2}} \right) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 V_∞ 是来流速度， u^*, v^*, w^* 分别是 x^*, r^*, θ 方向的扰动速度分量， p^*, ρ^* 分别是压力和密度。

根据高超声速小扰动理论，细长体高超声速小攻角绕流流场气流参数的量级估计是：

$$u^* \sim V_\infty \tau^2, \quad v^* \sim V_\infty \tau, \quad w^* \sim V_\infty \tau, \quad \Delta p^* \sim \rho_\infty V_\infty^2 \tau^2, \quad \Delta \rho^* \sim \rho_\infty.$$

这里， ρ_∞ 是来流密度， τ 是物体的厚度比， $\tau^2 \ll 1$ 。

根据上述量级估计，引进下列无量纲自变量和气流参数：

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{u^*}{V_\infty \tau^2}, \quad \bar{v} = \frac{v^*}{V_\infty \tau}, \quad \bar{w} = \frac{w^*}{V_\infty \tau}, \quad \bar{p} = \frac{p^*}{\rho_\infty V_\infty^2 \tau^2}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho^*}{\rho_\infty}, \quad \bar{x} = \frac{x^*}{L}, \quad \bar{r} = \frac{r^*}{L\tau}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 L 为物体的特征长度(如取物体总长), 将式(2.2)代入(2.1), 略去 τ^2 项, 整理后便得到下列无量纲形式的方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r}, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \frac{\bar{v} \bar{w}}{r} = -\frac{1}{\bar{p} r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{p} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{p}}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} + \frac{\bar{p} \bar{v}}{r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}'} \right) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}'} \right) + \frac{\bar{w}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\bar{p}}{\bar{p}'} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

式(2.3)比(2.1)少了未知数 $\bar{u}$ 和 x^* 方向的扰动方程, 这是高超声速小扰动理论带来的简化. $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$, $\bar{p}'$ 可以和 $\bar{u}$ 无关地单独确定, 根据已经确定的 $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$, $\bar{p}'$ 再由 Bernoulli 方程便能确定 $\bar{u}$.

在小攻角范围内, 可将解表达为下列形式:

$$\begin{cases} \bar{p} = p_0 + \frac{\alpha}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\theta + \tilde{p}_n \sin n\theta), & (a) \\ \bar{\rho} = \rho_0 + \frac{\alpha}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n \cos n\theta + \tilde{\rho}_n \sin n\theta), & (b) \\ \bar{v} = v_0 + \frac{\alpha}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (v_n \cos n\theta + \tilde{v}_n \sin n\theta), & (c) \\ \bar{w} = \frac{\alpha}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (w_n \sin n\theta + \tilde{w}_n \sin n\theta), & (d) \\ R = R_0 + \frac{\alpha}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n \cos n\theta + \tilde{s}_n \sin n\theta), & (e) \end{cases} \quad (2.4)$$

其中 α 是攻角, $p_0(x, r)$, $\rho_0(x, r)$, $v_0(x, r)$ 是无攻角气流参数, $p_n, \tilde{p}_n, \dots, w_n, \tilde{w}_n$ 等仅是 x, r 的函数, $R_0(x)$ 是无攻角激波形状.

可以证明, 由于略去了 $(\alpha/\tau)^2$ 项, Fourier 级数实际上仅需保留一项, 于是式(2.4)的最终形式是:

$$\begin{cases} \bar{p} = p_0 + \frac{\alpha}{\tau} p_1 \cos \theta, \\ \bar{\rho} = \rho_0 + \frac{\alpha}{\tau} \rho_1 \cos \theta, \\ \bar{v} = v_0 + \frac{\alpha}{\tau} v_1 \cos \theta, \\ \bar{w} = \frac{\alpha}{\tau} w_1 \sin \theta, \\ R = R_0 + \frac{\alpha}{\tau} s_1 \cos \theta. \end{cases} \quad (2.5)$$

将式(2.5)代入(2.3), 分别得到 α/τ 零级和一级的基本方程组.

$\frac{\alpha}{\tau}$ 零級:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \rho_0}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{\rho_0 v_0}{r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) = 0; \end{cases} \quad (2.6)$$

$\frac{\alpha}{\tau}$ 一級:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial r}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{v_0 w_1}{r} = \frac{p_1}{r \rho_0}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial r} + \rho_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + v_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{\rho_0 w_1}{r} + \frac{\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0}{r} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_1}{\rho_0^\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\gamma p_0 \rho_1}{\rho_0^{\gamma+1}} \right) + v_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \right) + v_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_1}{\rho_0^\gamma} \right) \\ - v_0 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma p_0 \rho_1}{\rho_0^{\gamma+1}} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

下面建立边界条件.

先討論激波边界条件.

在激波 $R = R_0 + \frac{\alpha}{\tau} s_1 \cos \theta$ 上, 根据質量、动量和能量守恒条件, 可得出下列关系

式:

$$\begin{cases} \frac{p^*}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{\bar{v}_n^2}{a_\infty^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right], \\ \frac{\rho^*}{\rho_\infty} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{a_\infty^2}{\bar{v}_n^2} \right]}, \\ v_n^* = \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho^*} \right) \bar{v}_n, \end{cases} \quad (2.8)$$

其中 $\bar{v}_n = \mathbf{V}_\infty \cdot \mathbf{n} = -V_\infty \cos(n, \mathbf{x}^*)$, $\cos(\mathbf{x}^*, \mathbf{n})$ ——激波法綫和 $\mathbf{x}^*$ 軸夾角的余弦.

激波面方程为

$$F = r^* - \tau L \left(R_0 + \frac{\alpha}{\tau} s_1 \cos \theta \right) = 0. \quad (2.9)$$

設 $\mathbf{n}$ 是激波法綫方向单位矢量, 則

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\partial F}{\partial x^*} / A, \frac{\partial F}{\partial r^*} / A, \frac{1}{r^*} \frac{\partial F}{\partial \theta} / A \right], \quad (2.10)$$

其中

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r^*} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2};$$

对于細长体, $A \approx 1$. 将(2.9)代入(2.10), 有

$$\mathbf{n} = \left[-\tau \left(\frac{dR_0}{dx} + \frac{\alpha}{\tau} \cos \theta \frac{ds_1}{dx} \right), 1, \frac{1}{r} \frac{\alpha}{\tau} s_1 \sin \theta \right]. \quad (2.11)$$

因此,

$$\bar{v}_n = V_\infty \tau \left(\frac{dR_0}{dx} + \frac{\alpha}{\tau} \cos \theta \frac{ds_1}{dx} \right). \quad (2.12)$$

激波后速度分量 $v^* = v_n^* \cos(n, r^*)$, $w^* = v_n^* \cos(n, \theta)$. 将 ρ^* , ρ^* , v^* , w^* 在 $r = R_0$ 处展开, 并按式(2.2)无量纲化, 最后得到要在 $r = R_0$ 处满足的无量纲形式边界条件:

$$\begin{cases} p_0 = \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{dR_0}{dx} \right)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{\gamma(M\tau)^2}, \\ \rho_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{1}{\left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \right]} \right\}, \\ v_0 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{dR_0}{dx} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \right]; \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{4}{\gamma+1} \frac{dR_0}{dx} \frac{ds_1}{dx} - s_1 \frac{\partial p_0}{\partial r}, \\ \rho_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{4}{(\gamma-1) \left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \frac{\frac{ds_1}{dx} / \frac{dR_0}{dx}}{\left[1 + \frac{2}{(\gamma-1) \left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \right]^2} - s_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial r}, \\ v_1 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{ds_1}{dx} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \right] - s_1 \frac{\partial v_0}{\partial r}, \\ w_1 = \frac{2}{\gamma+1} \frac{s_1}{R_0} \frac{dR_0}{dx} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{dR_0}{dx} M\tau \right)^2} \right]. \end{cases} \quad (2.13')$$

其次讨论物体表面边界条件.

无量纲形式的物体表面方程是

$$r = R_b(x) - \frac{\alpha}{\tau} x \cos \theta, \quad (2.14)$$

即

$$r - R_b(x) + \frac{\alpha}{\tau} x \cos \theta = 0.$$

物体表面法线方向单位矢量

$$\mathbf{n} = \left[\tau \left(\frac{\alpha}{\tau} \cos \theta - \frac{dR_b}{dx} \right), 1, -\frac{1}{r} \frac{\alpha}{\tau} x \sin \theta \right]. \quad (2.15)$$

在物体表面上应满足

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_\infty + \mathbf{q}^*) = 0,$$

其中 $\mathbf{q}^*$ 为扰动速度矢量. 将式(2.15)代入上式, 在 $r = R_b$ 处展开, 最后得到要在 $r = R_b$ 处满足的条件:

$$v_0 = \frac{dR_b}{dx}, \quad (2.16)$$

$$v_1 = \frac{\partial v_0}{\partial r} x - 1. \quad (2.16')$$

到此为止,我們已經建立了問題的基本方程和边界条件。(2.7)和(2.13'),(2.16')一起完全能够确定整个流場。关于 $s_1(x)$ 如何决定下面將談到。

三、方程和边界条件的变换

在小扰动理論中,方程組和边界条件得到了一定程度的簡化,但是对于任意外形細长体問題的求解还是困难的。我們面对的是非綫性偏微分方程組的求解。更麻煩的是:边界条件的提法虽属确定,但边界之一的激波其位置在問題解出之前并不知道。当然这个困难是非綫性的超声速流动問題所共有的。

L. Lees, 久保田^[5]及 Л. И. Седов^[7]等指出,在 $M \rightarrow \infty$ 时,对于幂次外形($R_b = x^m$)物体的无攻角繞流,激波的外形是相似的,即激波是同次幂的幂次外形($R_{00} = Cx^m$),而且整个流場的流动参数也是相似的,按激波上的参数整理后它仅与 $\frac{r}{R_{00}}$ 有关。对于实际存在的流場,幂次的限制为 $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$ 。 $m = 1$ 是圓錐; $m = \frac{1}{2}$ 則相当于帶小鈍头的平直圓柱体。Велеско 等人^[8]在1956年发表了上述相似性解的数值結果。

在 M 甚大但 $M \neq \infty$ 时,可按小参数 $\varepsilon = 1 / \left(M \tau \frac{dR_{00}}{dx} \right)^2$ 展开,在相似性解的基础上求高阶修正項。久保田^[6]首先处理了无攻角幂次外形物体的一級修正。現在我們用相似解法处理小攻角繞流問題。

引进一組新变量:

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{r}{R_{00}} = \frac{r}{Cx^m}, \\ \theta = \theta, \end{cases} \quad (3.1)$$

于是

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{m\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R_{00}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (3.2)$$

在新变量系統,无攻角繞流相似性解的激波位置为 $\eta = 1$,物体表面为 $\eta = \eta_b = \frac{1}{C}$ 。

引入小参数 ε :

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{\left(M \tau \frac{dR_{00}}{d\xi} \right)^2}, \\ \frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{2(1-m)}{\xi} \varepsilon, \end{cases} \quad (3.3)$$

根据激波边界条件引入新的因变量,并展开成 ε 的幂级数:

$$\begin{cases} \frac{v_0}{\frac{dR_{00}}{d\xi}} = v_{00}(\eta) + \varepsilon(\xi)v_{01}(\eta) + \dots, \\ \frac{p_0}{\left(\frac{dR_{00}}{d\xi}\right)^2} = p_{00}(\eta) + \varepsilon(\xi)p_{01}(\eta) + \dots, \\ \rho_0 = \rho_{00}(\eta) + \varepsilon(\xi)\rho_{01}(\eta) + \dots, \\ R_0 = R_{00}[1 + \varepsilon(\xi)a_1 + \dots], \end{cases} \quad (3.4)$$

其中 a_1 为常数;

$$\begin{cases} \frac{p_1}{\frac{dR_{00}}{d\xi} \frac{ds_{10}}{d\xi}} = p_{10}(\eta) + \varepsilon(\xi)p_{11}(\eta) + \dots, \\ \frac{\rho_1}{\frac{ds_{10}}{d\xi} / \frac{dR_{00}}{d\xi}} = \rho_{10}(\eta) + \varepsilon(\xi)\rho_{11}(\eta) + \dots, \\ \frac{v_1}{\frac{ds_{10}}{d\xi}} = v_{10}(\eta) + \varepsilon(\xi)v_{11}(\eta) + \dots, \\ \frac{w_1}{\frac{s_{10}}{R_{00}} \frac{dR_{00}}{d\xi}} = w_{10}(\eta) + \varepsilon(\xi)w_{11}(\eta) + \dots, \\ s_1 = s_{10}(\xi)[1 + \varepsilon(\xi)b_1 + \dots], \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 b_1 为常数.

将(3.1)–(3.5)代入(2.6),(2.7),(2.13),(2.13')并按 ε 的阶整理,得:

无攻角部分

ε^0 :

$$\begin{cases} (\nu_{00} - \eta) \frac{d\rho_{00}}{d\eta} + \rho_{00} \frac{dv_{00}}{d\eta} + \frac{\rho_{00}v_{00}}{\eta} = 0, \\ (\nu_{00} - \eta) \frac{dv_{00}}{d\eta} + \frac{1}{\rho_{00}} \frac{dp_{00}}{d\eta} - \beta v_{00} = 0, \\ (\nu_{00} - \eta) \left(\frac{1}{\rho_{00}} \frac{dp_{00}}{d\eta} - \gamma \frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{d\eta} \right) - 2\beta = 0; \end{cases} \quad (3.6)$$

ε^1 :

$$\begin{cases} \frac{dv_{01}}{d\eta} + \frac{(\nu_{00} - \eta)}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{01}}{d\eta} + \left(\frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{d\eta} + \frac{1}{\eta} \right) v_{01} + \left[2\beta - \frac{(\nu_{00} - \eta)}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{d\eta} \right] \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} = 0, \\ (\nu_{00} - \eta) \frac{dv_{01}}{d\eta} + \frac{1}{\rho_{00}} \frac{dp_{01}}{d\eta} + \left(\frac{dv_{00}}{d\eta} + \beta \right) v_{01} - \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}^2} \frac{dp_{00}}{d\eta} = 0, \\ (\nu_{00} - \eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{01}}{\rho_{00}} - \gamma \frac{\rho_{00}}{\rho_{00}^2} \frac{dp_{01}}{d\eta} \right) + v_{01} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{00}}{\rho_{00}^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

式中 $\beta = \frac{1}{m} - 1$.

边界条件(2.13),(2.13')原于 $r = R_0 = R_{00}(1 + \varepsilon a_1)$ 处满足,按新变量即 $\eta = 1 +$

εa_1 处满足, 考虑到 ε 为小参数, 可換到 $\eta = 1$ 处满足.

設 $\theta(\eta)$ 代表 ρ_{00} , ρ_{01} , p_{01} 等任意一个参数, 則

$$(\theta)_{\eta=1+\varepsilon a_1} = (\theta)_{\eta=1} + \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=1} \varepsilon a_1.$$

这样, 激波边界条件化为:

$\eta = 1$ 处,

$$\begin{cases} v_{00} = \frac{2}{\gamma + 1}, \\ p_{00} = \frac{2}{\gamma + 1}, \\ \rho_{00} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}; \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} v_{01} = -\frac{2}{\gamma + 1} - \left[\frac{dv_{00}}{d\eta} - \frac{2}{\gamma + 1} (1 + 2\beta) \right] a_1, \\ p_{01} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma + 1)} - \left[\frac{dp_{00}}{d\eta} - \frac{4}{\gamma + 1} (1 + 2\beta) \right] a_1, \\ \rho_{01} = -2 \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)^2} - \frac{d\rho_{00}}{d\eta} a_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

小攻角摄动項:

ε^0 :

$$\begin{cases} (v_{00} - \eta) \frac{dv_{10}}{d\eta} + v_{10} \frac{dv_{00}}{d\eta} - \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}^2} \frac{dp_{00}}{d\eta} + \frac{1}{\rho_{00}} \frac{dp_{10}}{d\eta} = 0, \\ (v_{00} - \eta) \frac{d\omega_{10}}{d\eta} + \frac{\omega_{10} v_{00}}{\eta} - \frac{p_{10}}{m\eta\rho_{00}} = 0, \\ \frac{1}{\rho_{00}} (v_{00} - \eta) \frac{d\rho_{10}}{d\eta} + \frac{dv_{10}}{d\eta} + \left(\frac{dv_{00}}{d\eta} + \frac{v_{00}}{\eta} + \beta \right) \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} + \\ + \left(\frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{d\eta} + \frac{1}{\eta} \right) v_{10} + \frac{m}{\eta} \omega_{10} = 0, \\ (v_{00} - \eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{10}}{\rho_{00}^\gamma} \right) - \gamma (v_{00} - \eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{00}}{\rho_{00}^\gamma} \cdot \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} \right) + \beta \gamma \frac{p_{00}}{\rho_{00}^\gamma} \frac{\rho_{10}}{\rho_{00}} - \\ - \beta \frac{p_{10}}{\rho_{00}^\gamma} + v_{10} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{00}}{\rho_{00}^\gamma} \right) = 0; \end{cases} \quad (3.10)$$

ε^1 :

$$\begin{cases} (v_{00} - \eta) \frac{dv_{11}}{d\eta} + \left(2\beta + \frac{dv_{00}}{d\eta} \right) v_{11} + \left(v_{01} \frac{dv_{10}}{d\eta} + v_{10} \frac{dv_{01}}{d\eta} \right) = \\ = \left(\frac{\rho_{10}}{\rho_{00}^2} \frac{dp_{01}}{d\eta} - 2 \frac{\rho_{01}\rho_{10}}{\rho_{00}^3} \frac{dp_{00}}{d\eta} + \frac{\rho_{01}}{\rho_{00}} \frac{dp_{10}}{d\eta} \right) + \frac{\rho_{11}}{\rho_{00}^2} \frac{dp_{00}}{d\eta} - \frac{1}{\rho_{00}} \frac{dp_{11}}{d\eta}, \\ (v_{00} - \eta) \frac{d\omega_{11}}{d\eta} + \left(2\beta + \frac{v_{00}}{\eta} \right) \omega_{11} + \left(\frac{d\omega_{10}}{d\eta} + \frac{\omega_{10}}{\eta} \right) v_{01} = \frac{p_{11}}{m\eta\rho_{00}} - \frac{\rho_{01}}{m\eta\rho_{00}^2} p_{10}, \\ \frac{(v_{00} - \eta)}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{11}}{d\eta} + \left(3\beta + \frac{dv_{00}}{d\eta} + \frac{v_{00}}{\eta} \right) \frac{\rho_{11}}{\rho_{00}} + \frac{dv_{11}}{d\eta} + \left(\frac{1}{\rho_{00}} \frac{d\rho_{00}}{d\eta} + \frac{1}{\eta} \right) v_{11} + \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & + \frac{m}{\eta} \omega_{11} + \frac{1}{\rho_{00}} \left[\rho_{01} \frac{dv_{10}}{d\eta} + v_{10} \frac{d\rho_{01}}{d\eta} + \rho_{10} \frac{dv_{01}}{d\eta} + v_{01} \frac{d\rho_{10}}{d\eta} + \frac{m}{\eta} \rho_{01} v_{10} + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_{01} v_{10} + v_{01} \rho_{10}}{\eta} \right] = 0, \\ & (v_{00} - \eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{11}}{\rho_{00}^\gamma} - \gamma \frac{p_{10} \rho_{01}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} \right) - \gamma (v_{00} - \eta) \frac{d}{d\eta} \left[\frac{p_{00} \rho_{11} + p_{01} \rho_{10}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} - \right. \\ & \left. - (\gamma + 1) \frac{\rho_{01} \rho_{10} p_{00}}{\rho_{00}^{\gamma+2}} + \beta \left(\frac{p_{11}}{\rho_{00}^\gamma} - \gamma \frac{p_{10} \rho_{01}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} \right) - \beta \gamma \left[\frac{p_{00} \rho_{11} + p_{01} \rho_{10}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\gamma + 1) \frac{\rho_{01} \rho_{10} p_{00}}{\rho_{00}^{\gamma+2}} \right] \right] + \\ & + v_{11} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{01}}{\rho_{00}^\gamma} \right) + v_{10} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{01}}{\rho_{00}^\gamma} - \gamma \frac{\rho_{01} p_{00}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} \right) + v_{01} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{p_{10}}{\rho_{00}^\gamma} - \gamma \frac{\rho_{10} p_{00}}{\rho_{00}^{\gamma+1}} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

外边界条件: $\eta = 1$ 处,

ϵ^0 :

$$\left\{ \begin{aligned} p_{10} &= \frac{4}{\gamma + 1} - m \frac{dp_{00}}{d\eta}, \\ \rho_{10} &= -m \frac{d\rho_{00}}{d\eta}, \\ v_{10} &= \frac{2}{\gamma + 1} - m \frac{dv_{00}}{d\eta}, \\ \omega_{10} &= \frac{2}{\gamma + 1}; \end{aligned} \right. \quad (3.12)$$

ϵ^1 :

$$\left\{ \begin{aligned} p_{11} &= \left[\frac{4(1 + 2\beta)a_1}{\gamma + 1} - m a_1 \frac{d^2 p_{00}}{d\eta^2} - m \frac{dp_{01}}{d\eta} - a_1 \frac{dp_{10}}{d\eta} \right] + \left[\frac{4(3 - 2m)}{\gamma + 1} - m \frac{dp_{00}}{d\eta} \right] b_1, \\ \rho_{11} &= \left[\frac{4(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2} - m a_1 \frac{d^2 \rho_{00}}{d\eta^2} - m \frac{d\rho_{01}}{d\eta} - a_1 \frac{d\rho_{10}}{d\eta} \right] - m \frac{d\rho_{00}}{d\eta} b_1, \\ v_{11} &= \left[\frac{2}{\gamma + 1} - m a_1 \frac{d^2 v_{00}}{d\eta^2} - m \frac{dv_{01}}{d\eta} - a_1 \frac{dv_{10}}{d\eta} \right] + \left[\frac{2(3 - 2m)}{\gamma + 1} - m \frac{dv_{00}}{d\eta} \right] b_1, \\ \omega_{11} &= \left[\frac{2(2\beta a_1 - 1)}{\gamma + 1} - a_1 \frac{d\omega_{10}}{d\eta} \right] + \frac{2}{\gamma + 1} b_1. \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

物面条件: $\eta = \eta_b$ 处,

$$\left\{ \begin{aligned} v_{00} &= \eta_b, & (a) \\ v_{01} &= 0, & (b) \\ v_{10} &= \left[m \frac{dv_{00}}{d\eta} - 1 \right] / \frac{ds_{10}}{d\xi}, & (c) \\ \text{或} & & \\ \frac{ds_{10}}{d\xi} &= \left[m \frac{dv_{00}}{d\eta} - 1 \right] / v_{10}, & \\ v_{11} &= \left[m \frac{dv_{01}}{d\eta} \right] / \frac{ds_{10}}{d\xi}. & (d) \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

現在問題就歸結為常微分方程之求積。對現在的自變量而言,不僅邊界條件確定,而且外邊界的位置也是確定的,即 $\eta = 1$ 。我們現在就可在 $\eta = 1$ 處按確定的邊界條件向

$\eta < 1$ 处进行数值积分。先积无攻角绕流解,然后积小攻角摄动项。

物面边界条件则用以确定待定常数 $\eta_b, a_1, \frac{ds_{10}}{d\xi}, b_1$ 。由边界条件 $v_{00}|_{\eta=\eta_b} = \eta_b$ 确定 η_b 。

解无攻角一级方程组时,由于方程的线性性质,可设

$$Q_{01} = Q'_{01} + a_1 Q''_{01}$$

(Q 代表 p, ρ 等任一气流参数)。

在 $\eta = 1$ 处得到 Q'_{01}, Q''_{01} 的方程组及边界条件,此时条件中均不出现 a_1 ,就可分别解出 Q'_{01}, Q''_{01} 。然后由物面条件

$$v_{01}|_{\eta=\eta_b} = 0$$

得

$$a_1 = - \left(\frac{v'_{01}}{v''_{01}} \right)_{\eta=\eta_b}.$$

同理,

$$\frac{ds_{10}}{d\xi} = \left[\frac{m \frac{dv_{00}}{d\eta} - 1}{v_{10}} \right]_{\eta=\eta_b},$$

$$b_1 = \left[\frac{\left(m \frac{dv_{01}}{d\eta} / \frac{ds_{10}}{d\eta} \right) - v'_{11}}{v''_{11}} \right]_{\eta=\eta_b}.$$

四、数值结果

不难看出,方程(3.6),(3.7)在边界条件(3.8),(3.9)以及方程(3.10),(3.11)在边界条件(3.12),(3.13)下均可化为典型的一阶常微分方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_k),$$

然后进行数值积分。

式(3.6)之数值积分即无攻角流相似性解,曾由 Велеско 等作出^[8]。式(3.7)之数值积分,即 $Mr \neq \infty$ 之 ϵ^1 级修正项,文献[5]及[10]中曾计算过。我们对小攻角摄动项进行 ϵ^0 级,即式(3.10)之数值积分。 $\gamma = 1.4; m = 1, 0.85, 0.75, 0.70, 0.65, 0.5715$ 。

无攻角参数(γ)₀₀均取自文献[3]刊印的 Велеско 等之计算结果。

数值积分的进行,前四点采用 Runge-Kutta 法,后采用 Adams 法。每一点均以闭型 Adams 法重复计算,以使结果在第四位有效数字收敛。

但是,由于物面附近当 $\eta \rightarrow \eta_b$ 时 $(v_{00} - \eta) \rightarrow 0$ 。故方程组(3.6),(3.7),(3.9),(3.10)在 η_b 是奇异的。正常的数值计算程序在此将受破坏。可以将方程在奇点邻域作渐近展开后分析解的渐近性质,将得到的此渐近解析解与数值解在离 η_b 若干步长处连接。渐近解则可利用文献[19]的结果。

当 $0 < \beta < 1$ 时,

$$\begin{cases} \frac{p_{10}}{p_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}+1} [\tilde{p}_1 + \theta_0^{1-\beta} \tilde{p}_2 + \dots], \\ \frac{v_{10}}{\eta - v_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{v}_1 + \theta_0^{1-\beta} \tilde{v}_2 + \dots], \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{w_{10}}{\eta} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{w}_1 + \theta_0^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \tilde{w}_2 + \cdots], \\ \frac{p_{10}}{\rho_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{\rho}_1 + \theta_0^{\frac{1-\beta}{\gamma}} \tilde{\rho}_2 + \cdots], \\ \tilde{N} = 0.5, \quad \frac{\beta}{2}, \quad -\frac{\gamma}{\gamma-\beta}, \quad -1, \end{cases}$$

这里 θ_0 乃由 Mirels 由流函数引入的参变量:

$$\theta_0 = \theta_0(\eta) \approx K_0 [\eta^2 - \eta_b^2]^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}} \left[1 + \frac{\beta}{2(2\gamma-\beta)\rho_{00}(\eta_b)} K_0 (\eta^2 - \eta_b^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}} \right],$$

其中 K_0 是一个由零级无攻角解决定的常数.

当 $\beta = 0$ 时,

$$\begin{cases} \frac{p_{10}}{\rho_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}+2} [\tilde{p}_1 + \theta_0^2 \tilde{p}_2 + \cdots], \\ \frac{v_{10}}{\eta - v_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{v}_1 + \theta_0^2 \tilde{v}_2 + \cdots], \\ \frac{w_{10}}{\eta} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{w}_1 + \theta_0^2 \tilde{w}_2 + \cdots], \\ \frac{p_{10}}{\rho_{00}} = \theta_0^{\tilde{N}} [\tilde{\rho}_1 + \theta_0^2 \tilde{\rho}_2 + \cdots], \\ \tilde{N} = 0.5, \quad \frac{\beta}{2}, \quad -1, \quad -2, \end{cases}$$

$$\theta_0 \approx K_0 (\eta^2 - \eta_b^2) \left[1 - \frac{1}{12\gamma\eta_b^2\rho_{00}(\eta_b)} K_0 (\eta^2 - \eta_b^2)^2 \right];$$

这里 $\tilde{N}$ 及诸系数 $\tilde{v}_1, \tilde{\rho}_1, \cdots$ 对 β 的关系乃由方程在 $\eta \rightarrow \eta_b$ 处的渐近展开得到的线性代数方程组所决定.

渐近解析解是上述解 $\tilde{N}$ 取不同值的四个独立解的线性组合. 有四个待定常数 $\tilde{p}_{i\tilde{N}}$, 这四个常数可由满足 $\eta^2 - \eta_b^2$ 较小之某 η 处的数值解与渐近解析解相接来确定.

结果如下:

$$\beta = 0$$

$$\begin{cases} \frac{p_{10}}{\rho_{00}} \approx -0.046\theta_0^{0.5} + 0.0793\theta_0^2 + 1.2\theta_0 + 2.02, \\ \frac{p_{10}}{\rho_{00}} \approx -0.0329\theta_0^{0.5} + 0.0566\theta_0^2 + 856\theta_0 + 0.0138, \\ \frac{v_{10}}{\eta - v_{00}} \approx -0.261\theta_0^{0.5} + 10.9\theta_0^{-1} - 0.168, \\ \frac{w_{10}}{\eta} \approx -0.786\theta_0^{0.5} - 0.00445\theta_0^2 - 0.21\theta_0 + 0.34, \end{cases}$$

$$\theta_0 \approx 6.298(\eta^2 - \eta_b^2)[1 - 0.51(\eta^2 - \eta_b^2)^2].$$

奇点解与数值解于 $\theta_0 = 0.0576$ 处连接; 对应 $\eta = \eta^* = 0.920$.